

Aproximación preliminar mediante transformadas *wavelet* a la topografía de la zona central de Antioquia (Colombia) de Gerardo Botero Arango

Sergio Andrés Restrepo-Moreno^{1,2*} ; Kenneth Roy Cabrera-Torres³ 
Luis Norberto Parra-Sánchez³ 

¹Departamento de Geociencias y Medio Ambiente, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. (*) sarestrepm@unal.edu.co

²Department of Geological Sciences, University of Florida, Gainesville, USA.

³Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia. krcabrer@unal.edu.co; lnparra@unal.edu.co

Resumen

El trabajo clásico *Contribución al conocimiento de la geología de la zona central de Antioquia*, publicado por el doctor Gerardo Botero, en 1963, abordó por primera vez aspectos morfoclimáticos relevantes en la porción norte de las cordilleras Central y Occidental, e incorporó altimetría, geomorfología, tectónica y clima como elementos de lo geológico que dan forma a una relevante provincia morfotectónica: el Altiplano Antioqueño (AA) en el Macizo Oriental (MO) de Antioquia, *sensu* Botero, y los cañones de los ríos Medellín-Porce que lo disectan, y Cauca y Magdalena que lo delimitan al occidente y oriente, respectivamente. Dadas las restricciones tecnológicas de su época, no tuvo el doctor Botero posibilidades de aproximar estos tópicos con base en el análisis digital del terreno. Su trabajo fue principalmente descriptivo-cualitativo y orientado a establecer elementos morfogenéticos en la evolución del paisaje. Presentamos una propuesta del uso de modelos de elevación digital (DEM-SRTM) y las herramientas GRASS y extensiones de R que permiten un tratamiento cuantitativo-geomorfométrico del terreno para abordar la expresión topográfica del AA-MO como conjunto de señales periódicas-cuasiperiódicas, específicamente mediante transformadas *wavelets*. Evaluamos preliminarmente el papel de las transformadas *wavelet Haar* tanto en un relieve sintético como en un caso real sobre una porción del MO con elementos del AA y de los cañones/valles de los ríos Medellín y Cauca. El segmento diádico de DEM del MO (~512×512 píxeles de 90×90 m) permitió diseccionar preliminarmente el paisaje, sin pérdida de información espacial, en varios niveles jerárquicos, cada uno con accidentes geográficos diferenciados dentro de un dominio de escala espacio-frecuencia similar. Nuestra aproximación tiene potencial para el análisis de diversas geofomas que incluyen sistemas complejos de colinas, valles y mesetas. Con esta aplicación pionera de las *wavelets* a problemas de geomorfología en Colombia, demostramos el potencial de estos novedosos métodos para descomposiciones-recomposiciones bajo ambientes GRASS-R.

Palabras clave: Altiplano Antioqueño; Cordillera Central; DEM; Transformada *wavelet*; GRASS-R.

A preliminary assessment of the topography of Botero's Central Zone of Antioquia (Colombian Andes) via wavelet transforms

Abstract

The classic work “*Contribución al conocimiento de la geología de la zona central de Antioquia*” by Dr. G. Botero (1963) addressed for the first time important morpho-climatic aspects in the northern portion of the Central and Western mountain ranges, incorporating altimetry, geomorphology, tectonics and climate as geological elements that shape a key morpho-tectonic province in the Northern Andes: the Antioquia Altiplano (AA) in the Eastern Massif (OM) of Antioquia, *sensu* Botero, and the canyon of the Medellín-Porce river that dissect it, and the Cauca and Magdalena rivers that delimit it to the west and east respectively. Given the technological restrictions at the time, Dr. Botero was unable to address these topics based on digital analysis of the terrain. His work was mainly descriptive-qualitative and focused on establishing genetic elements in the evolution of the landscape. We present a preliminary proposal for using digital elevation models (DEM-SRTM) and GRASS tools and R extensions, to facilitate a quantitative-geomorphometric treatment of the terrain to address the topographic expression of AA-MO as a set of periodic-quasiperiodic signals, specifically through wavelet transforms. We preliminarily evaluate the role of the Haar wavelet transform both in a synthetic relief and a real case study on a portion of the MO, incorporating elements of the AA and the canyons/valleys of the Medellín and Cauca rivers. The dyadic DEM segment of the MO (~512×512 pixels of 90×90 m) enabled the preliminary dissection of the landscape, without loss of spatial information, into several levels, each containing landforms within a similar scale domain in space-frequency. Our approach holds promise for analyzing diverse landforms, including composites of hills, valleys and plateau systems. This pioneering application of wavelets to geomorphology problems in Colombia demonstrates the potential of these novel methods for decompositions and recompositions under GRASS-R is demonstrated.

Keywords: Antioqueño Plateau; Central Cordillera; DEM; Wavelets transform; GRASS-R.

Introducción

El Macizo Antioqueño (MA), definición acuñada por Gerardo Botero en su trabajo *Contribución al conocimiento de la geología de la zona central de Antioquia*, es también un hecho cartográfico que incluye elementos geológicos-geográficos importantes en la porción norte de las cordilleras Occidental (Macizo Occidental) y Central (Macizo Oriental) (ver Plancha No. I en Botero (1963) y Figura 1 en este trabajo). Entre estos dos macizos, separados por el cañón del río Cauca, se destaca el Macizo Oriental (MO) por sus hitos geomorfológicos mayores como el Altiplano Antioqueño (AA), los cañones-frentes de erosión de los ríos Cauca (al occidente), Medellín-Porce (al centro) y Magdalena (al oriente) que lo confinan y lo obliteran gradualmente (Figura 1), y por otros rasgos menores tipo *inselberg* (El Peñol, Entreríos y El Marial) y organales (Botero, 1963, Plancha No. II).

También sobresalen elementos litoestructurales clave como el Batolito Antioqueño y otros cuerpos plutónicos (Cretácico), las rocas metamórficas del Complejo Cajamarca (Paleozoico y Triásico) y estructuras corticales relacionadas con los sistemas de fallas de Cauca-Romeral y Otú-Pericos (Botero, 1941, 1942, 1963; Hermelin, 1965, 1982, 1992; Page y James, 1981; Feininger y Botero, 1982; Restrepo y Toussaint,

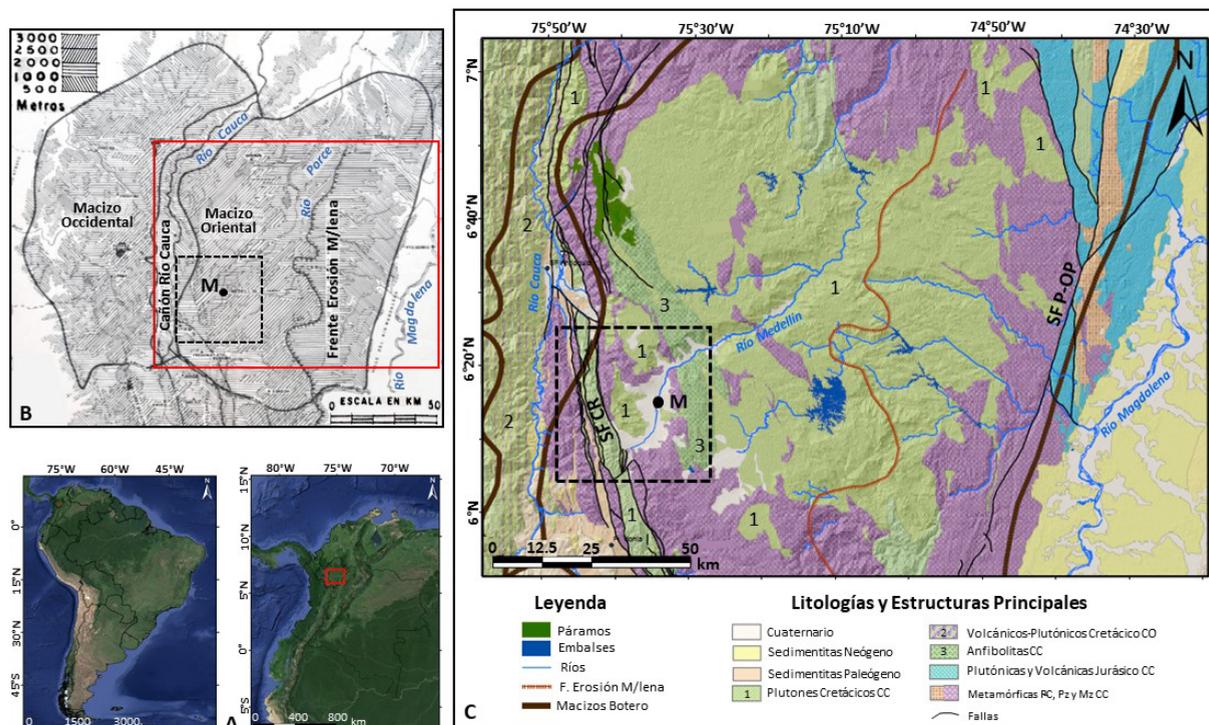
1982; Arias, 1995, 1996; Paucar y Saenz, 1995; Saenz, 2003; García y Hermelin, 2004; Vinasco *et al.*, 2006; Restrepo-Moreno, 2009; Restrepo-Moreno, *et al.*, 2009; Duque-Trujillo *et al.*, 2019; Noriega-Londoño *et al.*, 2020). Estos rasgos litoestructurales influyen sobre la morfogénesis del sistema MO-AA (Botero, 1963; Arias, 1995; Restrepo-Moreno *et al.*, 2009, 2019; Hermelin, 2015). Es importante resaltar que el trabajo de Botero (1963) fue disruptivo disciplinarmente, pues relega parcialmente los asuntos petrológicos, abordados por él un par de décadas antes para la misma región (Botero, 1942), y trae la geomorfología al terreno de las ciencias geológicas, por lo que contribuye a su escisión de las ciencias geográficas. Fue este un aspecto sustancial en la evolución del pensamiento geológico en el país que Botero impulsó en sus tareas como docente-investigador.

El presente trabajo se enfoca en el desarrollo preliminar de una estrategia novedosa de análisis digital del terreno (ADT) que permite abordar la topografía del MA de Botero mediante técnicas modernas de análisis de señales por transformadas *wavelet*, con el fin de discriminar conjuntos de geoformas por sus diferentes escalas espaciales en términos de frecuencias y amplitudes, es decir, como si se tratara de señales cuasiperiódicas que representan una firma

geomorfométrica de los elementos del paisaje. Dentro del MA, el AA es un laboratorio natural ideal para este propósito y para lo que ha sido el desarrollo del grupo de trabajo multidisciplinar en análisis-procesamiento de señales en modelos de elevación digital (DEM, por sus siglas en inglés) del Laboratorio de Sistemas Complejos de la UNAL, Sede Medellín.

Este altiplano, levantado a una altura promedio de 2500 m.s.n.m., representa un rasgo morfotectónicamente clave de los Andes del Norte, pues constituye la superficie denudativa más extensa (>5000 km²) y mejor preservada en Colombia. Se extiende en sentido sur-norte desde ~6°N al término de la topografía tipo sierra de la Cordillera Central, hasta los 7°N de latitud en el descenso hacia el Bajo Cauca en las

estribaciones septentrionales de esta cordillera, y en sentido oeste-este desde ~75,7°W en el cañón del río Cauca, hasta ~75°W en el frente de erosión del río Magdalena (Figuras 1 y 2). Está subdividido en Altiplano Norte (Santa Rosa de Osos) y Altiplano Sur (Oriente Antioqueño), separados por el Valle de Aburrá a lo largo del cual el sistema fluvial Medellín-Porce incisa el AA a profundidades de ~1,3 km (Botero, 1963; Arias, 1996; Restrepo-Moreno, 2009, 2019). Cada uno de estos altiplanos presenta varios niveles de peneplanación y rasgos topográficos en distintos niveles de frecuencia y amplitud (Page y James, 1981; Arias, 1996; Arias y González, 2003; Restrepo-Moreno, 2009; Bustos, et al., 2013; Noriega-Londoño et al., 2021, 2024).



Se ha sugerido que la textura topográfica de esta región está controlada por la litología (Botero, 1963; Arias, 1995; Restrepo-Moreno, 2009; Restrepo-Moreno *et al.*, 2009; Hermelin, 2015), que hacia el interior del AA corresponde principalmente a rocas plutónicas félsicas del extenso Batolito Antioqueño (> 9000 km²), sobre las que se ha desarrollado una penillanura elevada con rasgos típicos de *etch-topography* (por su definición en inglés; Arias, 1995; Restrepo-Moreno, 2009; Noriega-Londoño *et al.*, 2021, 2024). Hacia la periferia del AA predomina un “blindaje” de rocas metamórficas Permo-Triásicas, algunas de las cuales conservan la topografía de cordillera remanente a elevaciones de ~3100 m, *e. g.*, Cordillera Zafra-Baldías hacia el oeste del AA (Botero, 1963; Arias, 1995; Restrepo-Moreno, 2009; Hermelin, 2015). Los límites tectónicos del sistema AA se definen por estructuras corticales mayores: al oeste el sistema de fallas de Cauca Romeral y al este las fallas Otú-Pericos y Palestina (Restrepo-Moreno, 2009) (Figura 1). Reológicamente este bloque cortical es semirrígido (Montes *et al.*, 2005), lo cual le da coherencia litoestructural y le permite comportarse como un bloque morfotectónicamente discreto (Restrepo-Moreno *et al.*, 2009), excepto en su borde occidental (Bustos *et al.*, 2013; Noriega-Londoño *et al.*, 2020).

La generalidad topográfica del AA es fácil de identificar en varias representaciones cartográficas. El mapa físico de Antioquia 1:500.000 (IGAC, 2017) lo muestra como una zona de incremento en la separación de las curvas de nivel y un sistema de matices hipsométricos que dan cuenta de la dimensión y elevación de esta altiplanicie, sin que puedan identificarse elementos importantes de las geoformas en la multiescala espacial. En los DEM, los rasgos geomorfológicos del AA son mucho más conspicuos, evidenciados por la extensa planicie, los sistemas colinados internos y la ausencia de las largas y empinadas laderas, interfluvios y profundos valles en “V” típicos de las cordilleras Central y Occidental, y de los Andes colombianos en general (Restrepo-Moreno *et al.*, 2019). La diferencia en el formato de representación y la posibilidad de reconocer el carácter de multiondulaciones dentro del AA es clara si se comparan la cartografía de elevaciones en Botero (1963), trazada en achurado a intervalos de 500, 1000, 2000, 2500 y 3000 m.s.n.m. (Plancha No. I en Botero (1963) y Figura 1A en este trabajo), o el mapa físico de Antioquia (IGAC, 2017), contra el DEM para la misma región (Figura 2). La observación *in situ* (panorámicas) permite verificar sistemas topográficos de diversa escala en un orden de jerarquías complejo donde el altiplano aparece surcado internamente por valles-cañones de diferentes profundidades, varios sistemas de *inselbergs* y remanentes “cordilleranos”, así como sistemas de colinas a la manera

de superficies ondulantes con diferentes longitudes y amplitudes de onda (Botero, 1963; Arias, 1995, 1996).

Si bien el MO fue abordado reiterativamente por Botero en trabajos que van desde la petrología y la paleontología hasta el análisis tectónico (Botero, 1940, 1942; Botero *et al.*, 1968; Botero y González, 1983), la aproximación desde lo geomórfico siempre estuvo relegada, debido en parte a limitaciones tecnológicas. En los años 60 del siglo pasado, el geomorfólogo no contaba con herramientas robustas en lo computacional para la adquisición-representación-análisis de datos geoespaciales, tales como los sistemas de información geográfica (SIG), los sensores remotos (SR) y otros artefactos de la informática. En ese momento predominaba la aproximación cualitativa-descriptiva desde observaciones *in situ* (*i. e.*, en campo), así como a través de la manipulación de la cartografía (topografía y geología) y de las fotografías aéreas (ver por ejemplo Florinsky, 2011; Viles, 2016). Dicho abordaje buscaba responder preguntas de tipo morfogenético/morfoclimático, que en el caso de Botero llevaron a una discusión que se movía en el ámbito de las ideas “erosionistas”, razón por la cual en sus trabajos (Botero, 1963), y los de sus estudiantes (Hermelin, 2015), se empezaron a utilizar recurrentemente términos como “erosión fluvial”, “procesos de erosión”, “actividades erosivas”, “velocidad de erosión”, “residuos de erosión”, “superficie de erosión” y “frente de erosión”. Las geoformas se describían entonces mediante algunos parámetros basados en mapas de pendientes y aspecto, perfiles topográficos, geometría de las vertientes (longitud, pendiente, concavidad-convexidad), así como unos pocos parámetros de la red de drenaje, atributos que en su conjunto eran cartografiables, pero que resultaban tediosos en su generación y no permitían la disección-caracterización cuantitativa de elementos del relieve en formato digital a partir de imágenes (Adediran *et al.*, 2004; Viles, 2016).

Con los avances de las ciencias de la computación se suscita el desarrollo de los SIG/SR en los años 80, y se consolida en la transición al siglo XXI (Foresman, 1998; O’Regan y O’Regan, 2008; Jensen, 2009). El campo disciplinar de la geomorfología experimentó una verdadera revolución que lo llevó definitivamente al terreno de lo cuantitativo (Summerfield, 2005; Burbank y Anderson, 2013; Viles, 2016; Restrepo-Moreno *et al.*, 2019; Xiong *et al.*, 2022). La geomorfología cuantitativa ha permitido establecer jerarquías de las geoformas, así como el tipo, la cronología y la distribución espaciotemporal de los procesos involucrados en esculpir el paisaje (Summerfield, 2005; Restrepo-Moreno, 2019; Szypuła, 2019). La UNAL, sede Medellín, fue testigo de una profunda transformación del campo disciplinar de la geomorfología que en parte fundó

Botero, pero que no pudo disfrutar dado su deceso en 1986. El SIG en la UNAL se inició a principios de los 90 con la introducción de equipos de cómputo de escritorio que operaban bajo ambiente DOS y que permitían correr programas del tipo ER-Mapper® y las primeras versiones del SIG Geographic Resources Analysis Support System (GRASS; ver [Zatelli y Antonello, 2002](#); [Neteler et al., 2012](#)). Posteriormente, el cambio de siglo trajo la posibilidad de crear DEMs no solo desde ortofotos y planos topográficos de curvas de nivel, sino a partir de la generación masiva de DEMs globales de resolución creciente (desde los primeros DEM de 90 m hasta los de 5 m en la actualidad), a partir de datos por interferometría de radar satelital, *e. g.*, SRTM ([SRTM, 2000](#); [Rabus et al., 2003](#)) o ALOS-PALSAR (Japan AEA, 2006-2011); que actualmente ha llegado al uso de plataformas muy versátiles tipo dron, instrumentadas con sensores diversos y desde las que se pueden realizar restitutiones del relieve a escala centimétrica desde conjuntos de imágenes por ortofotos o bases de datos por LIDAR ([Szypuła, 2019](#)).

Desde el trabajo de [Botero \(1963\)](#) se han llevado a cabo numerosas investigaciones en el MA, incluidos trabajos en petrología, geoquímica-isotopía, radiocronología, estratigrafía y riesgo geológico, como los referidos anteriormente, aunque destacan también indagaciones de lo geomórfico en el terreno de la termocronología, geomorfología-tectónica y evolución del paisaje de base cuantitativa ([Saenz, 2003](#); [Restrepo-Moreno, 2009](#); [Restrepo-Moreno et al., 2009](#); [Duque-Trujillo et al., 2019](#); [Noriega-Londoño et al., 2020, 2024](#); [Pérez-Consuegra et al., 2021](#); [Zapata et al., 2021](#)). Pese a ello, poco se ha abordado el sistema MA utilizando las herramientas de ADT para entender cuantitativamente la geomorfología, excepción hecha de algunos trabajos ([González, 2004](#); [Agudelo-Duque, 2007](#); [Bustos et al., 2013](#); [Noriega-Londoño et al., 2020, 2021](#)). La convergencia de las aproximaciones del tipo Botero, *i. e.*, geomorfología descriptiva y de corte morfogenético (Botero, 1963; [Arias, 1995, 1996](#); [Rendón-Rivera et al., 2011](#)), con las nuevas aproximaciones de tipo multiescala en geomorfometría por SIG-SR-ADT en general, y por análisis-procesamiento de señales en particular, sumado a las técnicas radiocronológicas aplicadas a la morfotectónica ([Restrepo-Moreno et al., 2019](#)), plantea una hibridación necesaria de estos dominios para una mejor comprensión de la evolución del paisaje en el MA, que era en esencia lo que perseguía Botero en algunas de sus investigaciones (*e. g.*, Botero, 1963).

El trabajo que presentamos para esta sección especial sobre Gerardo Botero Arango, en el *Boletín de Geología* de la UIS, es el primero de su tipo en Colombia al proponer

una estrategia de ADT que demuestra el potencial de las transformadas *wavelets* para disectar el relieve multiescalar del MA. Para ello revisamos los avances recientes en el uso de las herramientas de ADT, particularmente el análisis computacional de señales por *wavelets*, y desarrollamos un paquete tecnológico preliminar en la fusión GRASS-R, que permite la disección de las geoformas mediante descomposiciones-recomposiciones (DR) por transformada *wavelet Haar*. La estrategia es inicialmente aplicada a un “paisaje” sintético en el que se puede verificar que no hay pérdida de información geoespacial (escala, posición y forma) durante las DR. Luego la aplicamos a un pequeño segmento de paisaje del MA que incluye rasgos geomorfológicos amplios tipo penillanura y cañones de los ríos Cauca y Medellín y sus frentes de erosión, así como rasgos menores tipo sistemas de colinas (en varias escalas), remanentes de antiguas cordilleras, cañones incizados, rampas denudativas, organales, peñoles y otros sistemas de *inselbergs*. Los procedimientos en el enlace GRASS-R para operar transformadas *wavelets* sin pérdida de información geoespacial logrados en este trabajo constituyen un primer paso importante para futuros abordajes de la estructura del paisaje y la topografía en Colombia mediante el ADT.

Marco teórico para el estudio del relieve del AA por análisis espectral de señales

El análisis de señales tiene aplicaciones en diversidad de campos y escalas espaciales. Algunos ejemplos incluyen estudios en radiología y neurología ([Polikar et al., 2001](#); [Khatami et al., 2017](#)), análisis de estructuras moleculares en nanotecnología ([Heath et al., 2021](#)), reconocimiento automático de sonidos musicales en ingeniería de audio ([Kostek y Zwan, 2001](#)) e investigaciones de la estructura del dosel en ecología ([Bradshaw y Spies, 1992](#)). El procesamiento de imágenes digitales es esencial en geociencias ([Gerstner et al., 2003](#)). Se ha aplicado exitosamente al estudio de fenómenos como el clima, la actividad solar y los patrones atmosféricos ([Marsh et al., 2002](#); [Saunders et al., 2005](#); [Debret et al., 2009](#); [Muñoz et al., 2017](#)); la oceanografía ([Guo et al., 2022](#)); la edafología ([Si, 2008](#)); la sismicidad, la gravedad y la estructura cortical ([Stark et al., 2003](#); [Telesca et al., 2004](#)); los patrones de migración de dunas y otras aplicaciones en geomorfología ([Kalbermatten et al., 2012](#); [Doglioni y Simeone, 2014](#); [Dong et al., 2021](#)).

En el campo específico de la geomorfometría se han realizado estudios interesantes entre los que se encuentran un trabajo pionero de análisis espectral unidimensional de cuatro aspectos independientes de

la topografía como la magnitud de periodicidades de las geoformas, el espacio de periodicidad, la rugosidad y el contraste entre pendientes (Pike y Rozema, 1975); los estudios del relieve con foco en el fenómeno de escala (Gallant y Hutchinson, 1997; Zatelli y Antonello, 2002); las DR del relieve para identificar patrones de lineamientos morfotectónicos asociados a estructuras de la corteza (Jordan y Schott, 2005); el monitoreo de la deformación de la superficie por interferometría (Shirzaei, 2012); la detección de diferentes escalas de información de datos cuasiperiódicos en geoformas fluviales tipo meandros (Guenther, 2017); y el análisis por transformadas *wavelets* discretas en 2D para la identificación de singularidades topográficas y caracterización de deslizamientos en DEMs (Kalbermatten *et al.*, 2012).

La topografía multiescalar del AA es uno de esos fenómenos naturales que puede ser abordado como conjunto de señales conformadas por mezclas de oscilaciones periódicas o cuasiperiódicas complejas. Estas señales son irregulares y están cargadas de ruido, pero contienen estructuras o patrones importantes descifrables mediante técnicas matemáticas de análisis espectral de señales como las transformadas de Fourier o las transformadas *wavelets* (Galli *et al.*, 1996). Manipular las geoformas como señal n-dimensional ha sido un paso significativo en la geomorfometría por análisis de señales (Pike y Rozema, 1975; Saunders *et al.*, 2005). Para ello, se asume que los rasgos topográficos en un paisaje son la expresión de señales ubicadas en el dominio espacio-frecuencial (Wood, 1996; González, 2004; Falorni *et al.*, 2005; Kalbermatten *et al.*, 2012). Las geoformas así concebidas pueden ser el resultado de una superposición, adyacencia o coalescencia de señales en diferentes formas y escalas que admiten ser disectadas para su análisis detallado. En las siguientes secciones nos referimos a algunos elementos clave relacionados con la geomorfología cuantitativa desde el ADT y las *wavelets* y su potencial aplicación al estudio del relieve.

ADT: geomorfología cuantitativa y el paisaje como conjunto de ondas

Los avances en tecnología computacional han permitido que el procesamiento de imágenes sea más eficiente, facilitando los estudios geomorfológicos por ADT a través del análisis de señales. En el contexto SIG-SR-ADT, el examen de las geoformas es comúnmente abordado mediante el DEM como representación del relieve en función de la elevación de unidades discretas o

pixeles que portan información en *xyz* (latitud, longitud, elevación). Dado que la topografía es un continuo, el DEM es una simplificación, sin embargo, a medida que la resolución espacial del DEM incrementa, la representación se aproxima a la “realidad” geométrica de las geoformas y refleja con fidelidad características como forma, rugosidad, curvatura de las superficies, gradientes y textura topográfica (Wilson y Gallant, 2000; Hani *et al.*, 2011) (Figuras 2 y 3). El análisis geomorfométrico utilizando DEM es altamente sensible a la resolución espacial (Gallant y Hutchinson, 1997); al disminuir esta, las características finas se pierden y la superficie se “suaviza” (Figura 3), lo cual afecta los atributos topográficos de las geoformas (Wood, 1996; Hutchinson y Gallant, 2000; Finlayson y Montgomery, 2003).

El ADT mediante el estudio de señales, bien sea por transformadas de Fourier o *wavelets*, se ha aplicado a imágenes del terreno tipo DEM obtenidas por satélites (SRTM y ALOS-PALSAR), es decir, en formatos asimilables a una señal 2D (Zatelli y Antonello, 2002; Falorni *et al.*, 2005). Aunque la geomorfometría paramétrica desde el DEM ha llegado a la posibilidad de aislar automatizadamente las geoformas individuales o “geomorfones”, *e. g.*, valles, colinas, cimas e *inselbergs* (Stepinski y Jasiewicz, 2011; Jasiewicz y Stepinski, 2013), nuestro enfoque busca un análisis integrado de las geoformas a escala regional, no una a una, sino en tanto un continuo complejo de señales. Aunque el relieve en un DEM tratado como un conjunto de señales permite identificar ondas localizadas de diferentes frecuencias, longitudes de onda y amplitudes, puede decirse que las técnicas espectrales aplicadas al ADT tienen una tradición relativamente corta (Gao y Yan, 2011). El abordaje espectral de geoformas inicia de manera incipiente con análisis de Fourier 2D, con base en el supuesto de que algunas geoformas podrían tener algún grado de periodicidad (Pike y Rozema, 1975), ejemplo más reciente de ello es el abordaje de los *karsts* por fracturamiento (Davis y Chojnacki, 2017).

La topografía como conjunto multiespectral se insinúa también en Hay *et al.* (2003), quienes desarrollan un análisis multiescala de los objetos topográficos dominantes del paisaje. Aunque las tecnologías de análisis numérico basadas en el uso de *wavelets* son sumamente útiles para swwepear los componentes de frecuencia en las geoformas (Kalbermatten *et al.*, 2012), en algunos casos se pierde información geoespacial (ubicación y forma) y resolución (escala).

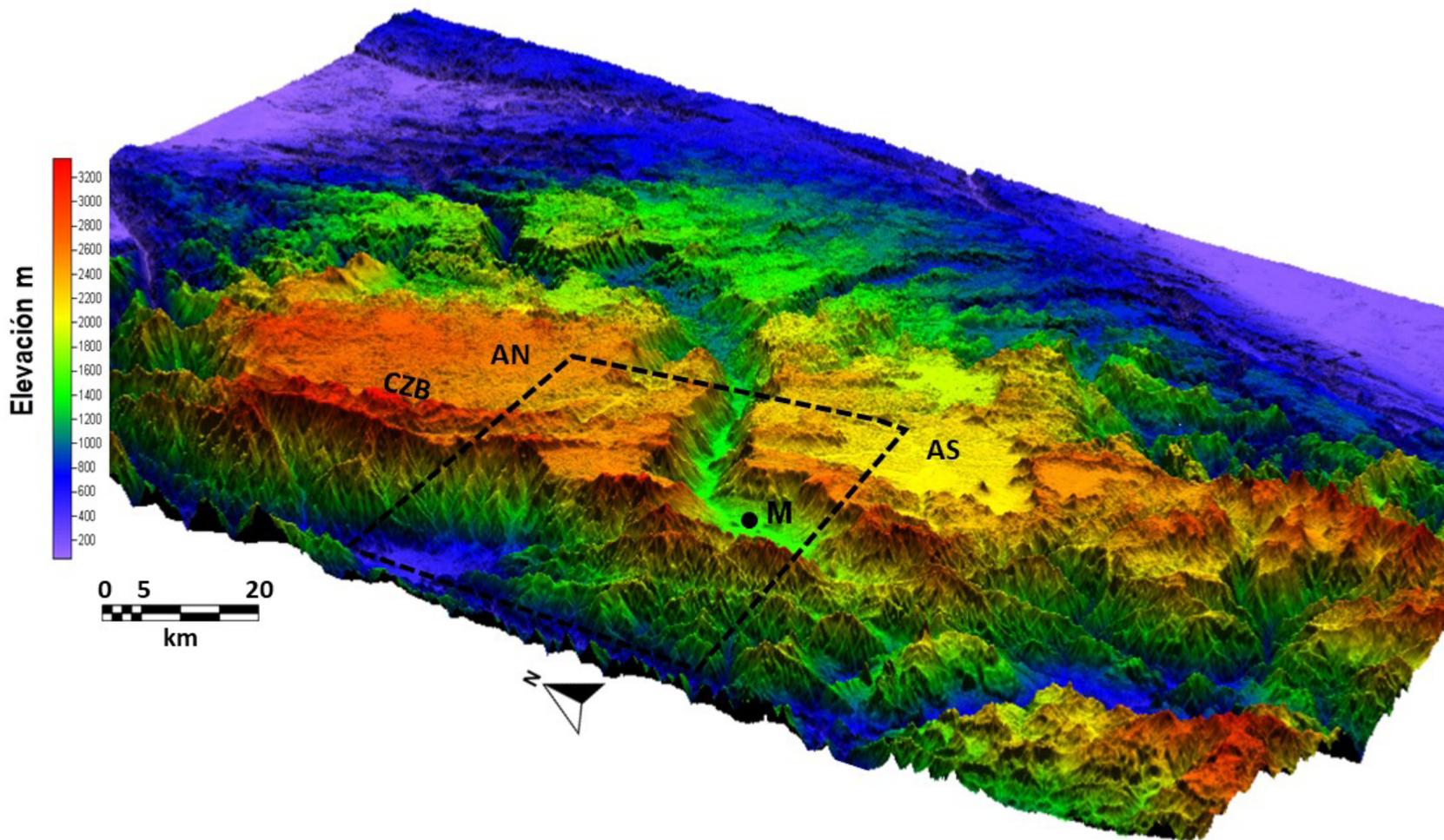


Figura 2. Altiplanos y cañones en el área de estudio. DEM en hipsometría 3D que muestra el contexto geomórfico de altiplanos, valles, cañones, *inselbergs*, frentes de erosión y sistemas de colinas en el ámbito del AA. La ciudad de Medellín (M) se marca como referencia, AN = Altiplano Norte, AS = Altiplano Sur, CBZ = Cordillera de Zafra Baldías. El recuadro negro de línea discontinua muestra la ubicación del DEM utilizado para descomposición *wavelet* implementada en este trabajo (modificado de Restrepo-Moreno *et al.*, 2009).

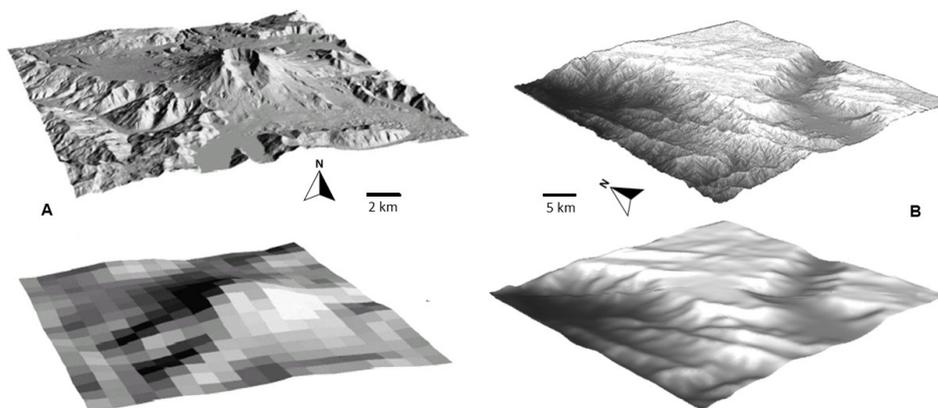


Figura 3. Importancia de la resolución espacial en la representación del relieve por medio de DEMs. Relieves sombreados para **A.** Monte Santa Helena (USA) con resolución 30 m (arriba) y 900 m (abajo). La resolución de 900 m mantiene solo una aproximación “suavizada” de la expresión topográfica del volcán (adaptado Finlayson y Montgomery, 2003). **B.** En geoformas mayores como el AA y cañones asociados el efecto no es tan notorio para los casos de 90 m (arriba) y de 900 m (abajo), aunque se logra percibir una reducción sustancial de los detalles de las geoformas y se empiezan a perder elementos del relieve de escala espacial restringida: en el caso del AA, por ejemplo, los sistemas de colinas, y en el cañón del río Cauca se disuelve la rugosidad del terreno y la complejidad de las vertientes y su red de drenaje, así como una reducción del relieve local (diferencia de elevaciones).

La transformada *wavelet* ha sido exitosamente aplicada para el análisis y procesamiento de señales no estacionarias, pues utiliza ventanas cortas en las altas frecuencias y ventanas largas en las bajas (Doglioni y Simeone, 2014). Este tipo de transformadas, en lugar de fijar las resoluciones, permite generar un análisis multiresolución y multiescala (Bjørke y Nilsen, 2003; Gao y Yan, 2011) a lo largo del dominio espacio-frecuencia, lo cual puede resolver el problema de pérdida de información geoespacial. Puesto que la conceptualización del relieve como conjunto de señales implica una transformación de los datos espaciales originales al campo espectral, se pueden aprovechar variadas técnicas para tipificar las diversidades de formas, frecuencias, amplitudes y periodicidades de las geoformas para aislar jerarquías con base en su similitud espectral (Bjørke y Nilsen, 2003; González, 2004; Doglioni y Simeone, 2014), lo cual equivale a una disección de los diferentes elementos del relieve.

Un ejemplo de tal conceptualización aplica a las altiplanicies denudativas tipo AA, donde los sistemas de colinas representan las altas y medias frecuencias y la superficie de peneplanación y los grandes cañones representan las bajas frecuencias. Nuestro estudio se enfoca en el AA en tanto altiplano erosivo con una historia morfotectónica compleja de paroxismos tectónicos separados por interludios en los que se construyen las penillanuras, que son luego elevadas y posteriormente incisadas por la red fluvial en valles-cañones de dimensiones variadas (Restrepo-Moreno, 2009; Restrepo-Moreno *et al.*, 2009). Como palimpsesto

de procesos y geoformas, el AA ofrece elementos geomórficos en diversas escalas espaciales (jerarquías) que van desde el AA como un todo (penillanura) hasta los frentes de erosión, pasando por remanentes cordilleranos, *inselbergs*, organales, sistemas de colinas equialitudinales y redes fluviales que se encajonan sobre los rasgos topográficos preexistentes (Botero, 1963; Arias, 1995; Arias y González, 2003).

Las wavelets

El análisis de la topografía por *wavelets* es una de las variantes del ADT (Bjørke y Nilsen, 2003; Doglioni y Simeone, 2014). Una *wavelet* no es “una” función *per se*, sino un conjunto de técnicas matemáticas para analizar señales no periódicas con el uso de funciones base especiales o función madre (Graps, 1995; Polikar, 2001; Addison, 2016). Por ejemplo, la función base *Morlet*, o “*wavelet Morlet*”, ampliamente conocida y utilizada para el análisis de series de tiempo (t), y en nuestro caso para el análisis espacial (x), resulta de tomar una función coseno de cierta frecuencia y “atenuarla” mediante la multiplicación por una función del tipo campana de Gauss, bien sea para t o para x :

$$\begin{aligned}\psi_0(t) &= k_0 \cos(\omega t) e^{-\frac{1}{2}t^2} \\ \psi_0(x) &= k_0 \cos(\omega x) e^{-\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}\tag{1}$$

donde k_0 es la constante de normalización y ω es la frecuencia, en tanto que $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ es la función campana de Gauss en espacio (x).

Las *wavelets* pueden ser miradas también como oscilaciones de corta duración localizadas en el tiempo que satisfacen dos requisitos clave que las diferencian de las funciones de base de Fourier: a) tienen un valor de cero para la media (condición de admisibilidad), y b) poseen energía finita (el cuadrado de la función tiene un valor finito para el área bajo la curva, a diferencia de las funciones sinusoidales) (Hess-Nielsen y Wickerhauser, 1996) (Figura 4). Cada tipo de *wavelet*, e. g., Haar, Daubechies, etc., posee parámetros específicos y características intrínsecas en términos de ser continuas o discretas, con o sin soporte compacto, suaves o con discontinuidades, ortogonales o biortogonales (Figura 5). Dadas esas características, las *wavelets* pueden utilizarse para "cortar" datos tipo señal en diferentes componentes de frecuencia-amplitud y poder estudiar cada componente con una resolución que coincida con alguna función madre "wavelet" escalada.

La transformada *wavelet* es una herramienta matemática que utiliza *wavelets* para analizar señales y extraer información del tipo de componentes de onda en el espacio-frecuencia (Polikar, 2001; Addison, 2016) y que opera como una especie de "lupa espectral" que permite identificar patrones similares a ondas, ocultos en señales, que de otro modo serían invisibles (Graps, 1995; Galli et al., 1996; Saunders et al., 2005; Gao y Yan, 2011). Aunque la transformada de Fourier permite extraer información acerca de variaciones en la morfología de la superficie del terreno en varias escalas, tiene dos problemas: a) asume estacionalidad de la señal, lo cual no aplica a datos topográficos, y b) utiliza formas de ondas oscilatorias (funciones seno) como las funciones base dentro de las cuales los datos muestreados son descompuestos. Es decir, en la transformada Fourier la función compleja o señal se representa como una "suma" de funciones seno de diferentes frecuencias-amplitudes que permite detectar los componentes de frecuencia ($\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$) presentes en la señal original, pero se pierde la información de tiempo (t) y espacio (x) (Guenther, 2017) (Figura 4), lo que la hace inapropiada para el análisis de efectos de escala en datos topográficos (Gallant y Hutchinson, 1997). El primer problema se puede solucionar mediante la transformada *wavelet*, puesto que esta permite analizar señales no estacionarias (Polikar et al., 2001). En cuanto a la segunda dificultad, hay una amplia selección de funciones base en las que la transformada *wavelet* cumple con el requisito de media igual a cero o grado de oscilación (Graps, 1995; Gallant y Hutchinson, 1997).

Elegir el tipo de *wavelet* implica entender la aplicación específica. Las *wavelets* de interpolación promedia

biortogonal tienen la propiedad de conservar valores promedios de los datos en diferentes escalas (Bruun y Nilsen, 2003). Así, por ejemplo, la *wavelet Haar* (Figura 5) es útil para aproximar datos caracterizados por una serie de cambios abruptos discretos (similares a los de un DEM), produce un error relativo pequeño entre los datos originales y la reconstrucción de la imagen original y es simple para el cómputo (Saunders et al., 2005). La *wavelet Daubechies*, gracias a su ortonormalidad, tiene una consecuencia matemática e ingenieril importante, pues algunas funciones continuas pueden ser proyectadas dentro de las bases de funciones *wavelet* y expresadas como combinación lineal de las funciones base, pero posee un gasto computacional superior y es conceptualmente más compleja (Rowe y Abbott, 1995; Kaplan, 2001). Podría pensarse que para el análisis de señales solo bastaría con técnicas de filtraje como las de paso alto y paso bajo (ver por ejemplo Wang et al., 2016), pero esto es un error conceptual debido a que estas técnicas no aíslan las geoformas por su escala, y además eliminan y/o resaltan cierto tipo de información, dado que no son linealmente aditivas, mientras que la *wavelet Haar* sí lo es, por lo que evita la pérdida de información que puede contener características secuenciales invisibles con la técnica de filtraje. En otras palabras, las *wavelets* destinan partes específicas del espectro para ser depuradas, e. g., la alta (o la baja, o la media) frecuencia del espectro puede ser totalmente removida de acuerdo a la necesidad del investigador.

Con el fin de generar una representación matemática adecuada de la topografía terrestre a partir del análisis de señales en imágenes tipo DEM, es necesario tener en cuenta dos aspectos: escala y localización. La transformada *wavelet* admite determinar el contenido frecuencial en cada fracción del espacio (Gerstner et al., 2003). Abordar lo geomorfológico a partir de descomposiciones de señales utilizando transformadas *wavelets* supone separar (disectar), a diferentes escalas, la diversidad de formas que constituyen el relieve. En el caso de los DEMs se puede obtener información relevante si se analiza el comportamiento de sus frecuencias. La frecuencia hace referencia a la tasa de cambio que evidencia la señal (Polikar et al., 2001). En este sentido, si la señal fuera invariable estadísticamente en el espacio, no habría problema y se podría trabajar directamente con la transformada clásica de Fourier, por cuanto los componentes de frecuencia se extenderían infinitamente a lo largo de toda la señal (Hess-Nielsen y Wickerhauser, 1996). Sin embargo, este es rara vez el caso de las señales del mundo real caracterizadas por frecuencias de extensión finita.

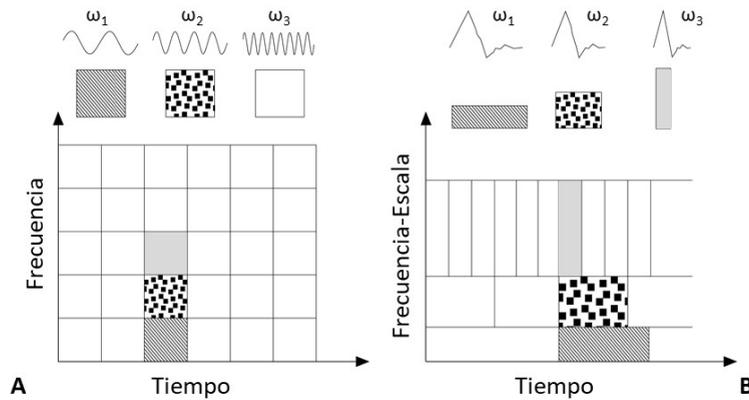


Figura 4. Funciones de base Fourier vs. *Wavelet*. **A.** Funciones de base Fourier. **B.** Funciones de base *wavelet* de *Daubechies*. En ambos casos, se representan los mosaicos de tiempo-frecuencia (t- ω), entendiendo que las resoluciones temporal y frecuencial de una señal están acopladas. Los análisis por transformada de Fourier capturan la resolución espectral y sacrifican la temporal, algo que logra corregir el análisis por transformadas *wavelet*, donde el eje de “frecuencia” es también eje de “escala” (modificado de Graps, 1995).

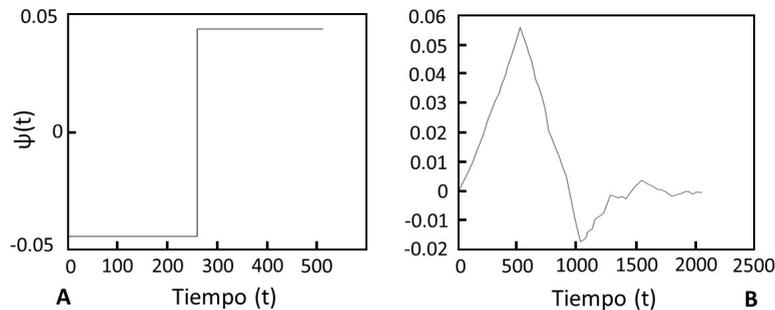


Figura 5. Comparación de dos familias de *wavelets* comunes. **A.** Las *wavelets Haar* empleada en este estudio y **B.** *Daubechies* comúnmente utilizadas para el análisis espectral de señales. Solo se muestra la porción “derecha” de cada *wavelet* (modificado de Graps, 1995).

Bajo esta condición, también conocida como no estacionariedad, se comportan muy bien las técnicas de representación simultánea de espacio-frecuencia (Graps, 1995; Klees y Haagmans, 2000), esto debido a que la transformada *wavelet* realiza la descomposición de una señal o imagen por medio de una familia de funciones de la forma:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_0(2^j x - k) \quad (2)$$

la cual se genera a partir de una *wavelet* madre prototipo $\psi(x)$ a través de su escalamiento (j) y translación (k). La *wavelet* madre tiene que satisfacer la condición $\int \psi(x) dx = 0$ (Mojsilovic et al., 2000). Así, cualquier función $f(x) \in L^2(R)$ con $x \in \mathbb{R}$ admite la representación:

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{jk} \psi_{jk}(x) \quad (3)$$

en la que las funciones base son escaladas y trasladadas respecto de una “*wavelet* madre” $\psi(x)$, i. e., la función

base $\psi_{jk}(x)$ resulta indexada por un parámetro de escala (j) y uno de translación (k) (Figura 6).

Esta es conocida como la descomposición *wavelet* de la señal $f(x)$, donde los d_{jk} representan los coeficientes *wavelets* para una dilatación-escalamiento j y una translación k (Yu y Karlsson, 2001), que en nuestro caso particular referidos a la *wavelet Haar* se define como:

$$\psi_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4)$$

La transformada *wavelet* actúa por medio de un par de “filtros”, que representan las funciones complementarias de escalamiento y *wavelet* y que separan las frecuencias bajas y altas de una imagen, respectivamente. Los dos “filtros” actúan de forma progresiva sobre las señales resultantes para cada escala de análisis (Mojsilovic et

al., 2000). La transformada *wavelet* puede extenderse al caso bidimensional para el tratamiento de imágenes del tipo DEM. Si bien allí se emplean el mismo par de “filtros”, su aplicación combinada en el sentido vertical y horizontal de la imagen hace que se generen cuatro imágenes finales para cada escala de descomposición (Figura 7). Una ventaja de la técnica *wavelet* así aplicada es que permite la recomposición de la imagen original a partir de los coeficientes de frecuencia alta (detalles) y los de frecuencia baja (imagen suavizada) finalmente obtenida, u obtener series de imágenes donde se eliminen o separen componentes de frecuencia de acuerdo con la necesidad y a lo largo de varias rutas de descomposición.

Materiales y métodos

Desarrollamos una metodología basada en la descomposición-recomposición por *wavelets Haar* de los conjuntos de señales que constituyen un DEM. Inicialmente, lo hicimos sobre un DEM-relieve sintético (caja de huevos) que combina altas y bajas frecuencias

+ ruido, y posteriormente sobre una porción del DEM-SRTM-90m del MA que recoge elementos de altiplano, cañones y frentes de erosión (*sensu* Botero, 1963). En la creación de los DEMs y la manipulación de datos geoespaciales se emplearon los paquetes de *software* gratuito y de código abierto GRASS y R, ambos cubiertos por licencias GNU (Ihaka y Gentleman, 1996; Neteler et al., 2012; de Mícheaux et al., 2013). Dado el alto flujo de información requerido al procesar bases de datos significativamente grandes en imágenes tipo DEM en estos programas, se utilizó una estación gráfica de ingeniería con doble procesador (Epyc 7301®), tarjeta gráfica profesional (Radeon Pro WX® 7100), RAM de 125 Gb ECC y una serie de discos duros de decenas de terabytes; esto porque para regiones del DEM de Antioquia los procesos de análisis de señales por *wavelets* implican una multiplicación del espacio en cada descomposición, cuatro por cada ruta en cada nivel (Figura 7), lo cual requiere discos duros considerables en espacio y con altas velocidades de procesamiento.

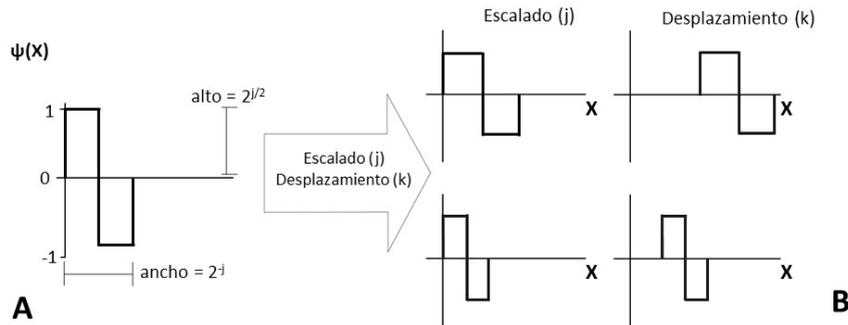


Figura 6. Escalado y desplazamiento de la *wavelet Haar*. **A.** Definición gráfica de la $\psi(x)$ para una *wavelet Haar*. **B.** Escalado (j) por cambio en altura (amplitud), ancho (frecuencia) y desplazamiento (k) en x de la *wavelet Haar*.

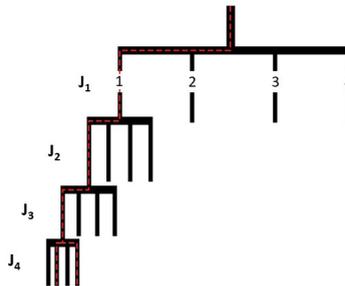


Figura 7. Rutas de descomposición por *wavelets* en patrón de “árbol”. Se dan descomposiciones para cada nivel jerárquico ($J_1, J_2, J_3, J_4, \dots$) determinadas por un número de sub-DEM = 2^{2n} (4, 16, 64...). La línea roja punteada muestra las rutas de descomposición-recomposición 1112 y 1114 referidas en el texto para nuestro caso piloto.

En el análisis de señales, una vez obtenida la matriz de elevaciones del DEM, buscamos que la descomposición tuviera las mismas dimensiones que la matriz original para poder comparar y ubicar correctamente las características de frecuencia obtenidas sin pérdida de información geoespacial. Los paquetes para análisis de wavelets en R (Ihaka y Gentleman, 1996; Kalbermatten *et al.*, 2012; de Micheaux *et al.*, 2013) proporcionan descomposiciones, pero no generan matrices con la misma resolución del tamaño original, por lo que ocasiona pérdida de la georreferenciación entre las imágenes. Tampoco permiten obtener todas las descomposiciones posibles que ofrecería un paquete wavelet para descomposición en árbol. Por otro lado, GRASS ofrece el paquete *r.wavelets* (González, 2004), el cual tiene problemas en la descomposición diagonal y el limitante de disminuir el tamaño de las matrices resultantes. Debido a estas restricciones se desarrolla en nuestro trabajo una aproximación alternativa que profundiza en DR wavelet tipo árbol (paquetes wavelets) sin reducción en el tamaño de las imágenes (wavelets frames) y sin pérdida de información geoespacial, con el fin de obtener una representación detallada de todo el espectro de espacio-frecuencia de una imagen DEM. El siguiente paso en nuestra aproximación consistió en generar un vínculo GRASS-R para acceder a toda la potencia estadística del R en combinación con las capacidades para manejar documentos georreferenciados del GRASS. Por tratarse de un piloto, el ejercicio wavelet que se realizó se da por comparación entre una superficie (o topografía) sintética y una real, esta última cubre apenas una porción del AA y cañones asociados (Figuras 1 y 2).

Para el primer DEM, con el que se pone a prueba nuestra metodología en un caso espacialmente simplificado, se generó un relieve sintético (Figura 8A) mediante una función sinusoidal bidimensional (Ecuación 2) que da como resultado una función tridimensional compuesta por frecuencias altas, bajas y ruido (ver detalles en resultados). La imagen se obtuvo con una resolución diádica de 256×256 píxeles para guardar similitud espacial con el DEM-SRTM-90 real. En el DEM sintético se observan claramente las superposiciones de las señales entre baja y alta frecuencia (Figuras 8A y 8B). En el caso del DEM “real” utilizamos una porción del SRTM-90 m sobre un sector del AA porciones Norte y Sur en el entorno de la ciudad de Medellín (Colombia), que recoge elementos del AA propiamente dicho, así como del Valle de Aburrá y el cañón del río Cauca (Figuras 1 y 2), en un área total

de ~2123,3 km² también diádica (~512×512 píxeles, imagen de 46,08 km de lado). Esta área se ubica entre coordenadas geográficas CRS-WGS 84 norte: 6° 36' 29,65", sur: 6° 10' 38,04", este: -75° 24' 5,51", y oeste: -75° 49' 40,84", en un orden de magnitud espacial que se acomoda al ejercicio de caracterización del relieve a escala regional implícito en Botero (1963). Para la construcción de este DEM se tomó el elemento areal de la región central de Antioquia arriba referido y se procesó inicialmente en GRASS-SIG. Posteriormente, en el formato *geoTIFF*, se importó el DEM al R con el paquete *terra*. Para ambos DEMs se realizó la descomposición de prueba hasta el cuarto nivel de jerarquía (J_4) utilizando la transformada wavelet de Haar, esto porque con otras transformadas se pierde un poco de “ruido” en la recomposición. Para las descomposiciones se usó la función *modwpt.2d* (modificada del paquete *waveslim* de González, 2004). La descomposición de alta frecuencia (*high*) que se siguió en ambos casos resultó de la adición de las rutas 1112 y 1113. La descomposición en baja frecuencia (*low*) tomó la ruta 1111. La suma de las tres rutas recompone el relieve original (*i. e.*, DEM de partida = DEM de llegada), sin pérdida de información geoespacial alguna y omitiendo un efecto de error o ruido de la ruta 1114 (Figura 7). Las descomposiciones así obtenidas se exportaron a formato *geoTIFF* para ser leídas por el GRASS-SIG y luego se procedió a definir los perfiles con una línea de tipo vectorial convertida a puntos para exportar los correspondientes perfiles y graficarlos de nuevo en R.

Resultados y discusión

En esta sección se presentan y discuten los resultados en torno a las dos aproximaciones empleadas que incluyen la validación de nuestra metodología transformada wavelet utilizando un relieve sintético tipo “caja de huevos + ruido” (Figura 8) para luego aplicarla a un caso real (Figura 9) en un sector del DEM del MA de Botero (1963).

Ejemplo con una geoforma sintética

La descomposición realizada sobre el relieve sintético (Figura 8A) como señal estacionaria o cuasi-estacionaria sirve para destacar la descomposición realizada mediante wavelets así:

$$f(x, y) = 1000 + 4[\text{sen}(\pi x)\text{sen}(2\pi y) + \text{sen}(\pi x) \cdot \text{sen}(3\pi y/5)] + 1/2[\text{sen}(12\pi x)\text{sen}(16\pi y)] \quad (5)$$

con: $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$

La función tridimensional obtenida es similar a una “caja de huevos” y permite reconocer la composición de frecuencias altas, bajas y ruido que constituyen las geoformas sintéticas. En este DEM se observan las superposiciones de las señales entre baja y alta frecuencia (Figuras 8A y 8B), con la segunda que aparece como elementos “microtopográficos” que “salpican” las superficies de las bajas frecuencias, en un patrón espacial muy similar al que se observa sobre algunas áreas en el AA (Arias, 1995, 1996; Restrepo-Moreno, 2009). Para las bajas frecuencias la señal principal está constituida por paquetes de ondas que en la dimensión espacial del DEM soportan hasta 2 ciclos, mientras que en las altas

frecuencias puede llegar a 20, es decir, una diferencia de un orden de magnitud en el espacio-frecuencia. Respecto de las amplitudes, estas también son muy superiores para la descomposición de baja frecuencia (~1000 m) comparadas con las de alta frecuencia (~200 m). En este ejercicio preliminar se observa manifiestamente cómo el paquete tecnológico diseñado y aplicado a unas geoformas sintéticas permite el trabajo de disección (DR) de las diferentes frecuencias sin pérdida de información geoespacial y sin modificación de posición ni escala, al punto que la imagen DEM inicial es a la vez punto de partida para la descomposición y punto de llegada luego de la recomposición.

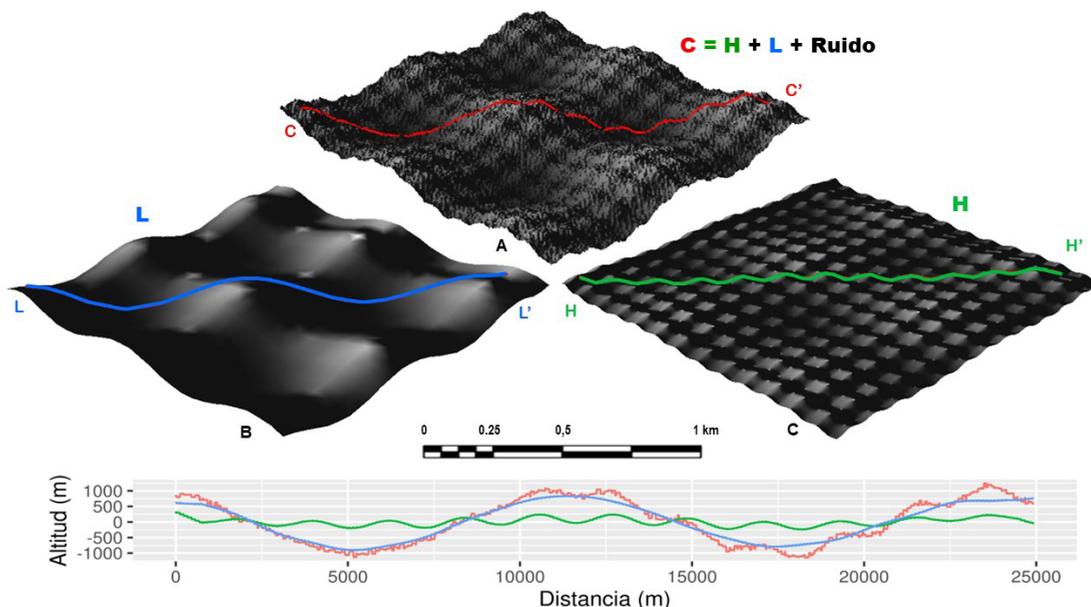


Figura 8. Geoforma sintética tipo “caja de huevos” y perfiles. **A.** Caja de huevos + ruido con su respectiva línea de perfil C-C’ (rojo), corresponde tanto al punto de partida (DEM original) como de llegada (recomposición). **B.** Componente de baja frecuencia L y perfil L-L’ (azul). **C.** Componente de alta frecuencia H y su perfil topográfico H-H’ (línea verde) sobre el DEM. En el perfil inferior se representan comparativamente los tres componentes: normal (C-C’), baja (L-L’) y alta (H-H’) frecuencias.

Ejemplo con un caso real

La representación tridimensional del DEM del sector del AA seleccionado (Figura 9A) permite ver la complejidad de la topografía en cuanto a la composición de frecuencias de distintas escalas y en diferentes sitios como conjunto de señales mixtas no estacionarias, para las que la transformada de Fourier no cumple los supuestos para generar su descomposición, por tanto, se hace necesario el análisis por transformadas *wavelets*. Al aplicar nuestra aproximación puede verificarse cómo después de haber llegado al cuarto nivel jerárquico en la descomposición (J_4) se obtiene un componente de baja frecuencia (Figura 9B); la técnica implementada permite aislar y destacar los elementos más extensos del relieve o las geoformas que registran las bajas frecuencias y amplitudes mayores.

En este caso, se produce una señal asociada al perfil “topográfico” con longitud de onda y amplitudes aproximadas de 3000 m y 400 m, respectivamente, lo que conceptualmente se traduce en un relieve local de menos de 300 m de incisión o encajonamiento de los cauces. Estas geoformas de gran amplitud y baja frecuencia serían las que inicialmente Botero (1963) y luego otros autores (Arias, 1995, 1996; Restrepo-Moreno, 2009) referirían como estructuras mórficas de orden principal, *i. e.*, altiplanos, grandes cañones, rampas denudativas y frentes de erosión). Por su parte, las estructuras de alta frecuencia (Figura 9C) corresponden a las ondulaciones menores que “cabalgan” sobre las bajas frecuencias en el paisaje, y que reproducen longitudes de onda y amplitudes entre 500 y 40 m, que dan lugar a relieves colinados (Arias, 1996;

Arias-López y Gonzáles-Santamaría, 2007), con mucho menor incisión fluvial y relieve local. Ambos dominios de la señal están asociados, posiblemente, a fenómenos espacial y temporalmente contrastados, y ambos dominios ejercen actualmente (y son afectados por) controles en lo fluvial y lo edafológico, quizás igualmente diferenciados (Botero, 1963; Page y James, 1981; Arias, 1996; Arias-López y Gonzáles-Santamaría, 2007; Salazar *et al.*, 2008; Restrepo-Moreno, 2009; Hermelin, 1965).

La descomposición del terreno en niveles mediante transformada *wavelet* es en principio la misma que se propone por otros autores (*e. g.*, Kalbermatten *et al.*, 2012), sin embargo, hay diferencias con el procedimiento nuestro. Los autores referidos aplican la técnica *wavelet* en su sentido clásico, es decir, con la reducción de escala y la “recomposición” por relleno con ceros, técnica en la que se pierde información geoespacial y que es superada por nosotros en el presente trabajo. Por otro lado, a pesar de las diferentes escalas de descomposición solo trabajan con las de alta frecuencia, mientras que en nuestro abordaje trabajamos también con las de baja frecuencia. Adicionalmente, Kalbermatten *et al.* (2012) no hacen referencia respecto al árbol de descomposición, o rutas (*e. g.*, 1112, 1114...), que surge en este tipo de transformada, cuando nuestro aporte es justamente que las posibles combinaciones de la transformada *wavelet* a lo largo de esas diversas rutas muestran características geomorfológicas importantes no solo en la escala espacial (o espacio-frecuencia), sino que estas se pueden relacionar con sus jerarquías genéticas (Botero, 1963; Arias y González, 2003; Restrepo-Moreno *et al.*, 2019).

El ejemplo presentado por nosotros, si bien es un primer paso, permite vislumbrar el potencial de la descomposición no solo de las altas frecuencias sino de las frecuencias bajas e intermedias, que se pueden explorar en los diferentes niveles permitiendo obtener descomposiciones de las geoformas que tendrán interpretación morfogenética. Finalmente, aunque Kalbermatten *et al.* (2012) demuestran la ventaja de utilizar la descomposición de *wavelet*, en contraste con la transformada de Fourier, solo la aplican a la disección enfocada en un fenómeno de corta duración y restringido espacialmente como lo es un deslizamiento, muestran la interpretación solo en ese contexto y se concentran exclusivamente en los filtros de paso alto. La propuesta nuestra va más allá de un fenómeno local, y expande el concepto a geoformas combinadas de mayor magnitud en un ensamblaje más complejo de señales cuasiperiódicas, más abarcante. Esto equivale a establecer jerarquías de

geoformas en función del espacio desde la perspectiva evolutiva de una megageoforma como el AA y sus rasgos subordinados (sistemas de colinas y cañones/frentes de erosión; Figura 9), lo que en esencia pretendió realizar de manera cualitativa Botero (1963).

En la perspectiva de preservar la información contenida en las transformaciones realizadas, nuestro desarrollo metodológico permite volver al estado original los DEM mediante la suma de altas, medias y bajas frecuencias, y a lo largo de las diferentes rutas de DR, lo que lleva de nuevo a la geoforma original, es decir, sin pérdida de información y sin alteración de la escala espacial. Al descomponer los conjuntos de geoformas de esta manera, la técnica desarrollada por nosotros ofrece amplias posibilidades al geomorfólogo para reconocer formas que no son evidentes desde el trabajo cualitativo, facilitando identificar jerarquías dentro de conjuntos de geoformas complejas que, en el caso del AA de Botero (1963), y en muchos otros sistemas de montaña, son generalmente el resultado de una superposición de eventos en el espacio-tiempo, en contextos de perturbaciones variables de clima y tectónica (Arias, 1996; Montgomery *et al.*, 2001; Restrepo-Moreno, 2009; Restrepo-Moreno, *et al.*, 2009, 2019; Bustos *et al.*, 2013; Noriega-Londoño *et al.*, 2020). Esto es clave para hacer interpretaciones adecuadas en la reconstrucción de las historias del relieve como palimpsesto de formas y procesos, con implicaciones importantes en la morfotectónica, la fluvilogía y la edafología como elementos que quiso destacar en su trabajo Botero (1963) para este complejo escenario de geoformas que es el MA.

Un punto importante para tener en cuenta es la resolución espacial a la cual trabajamos. El DEM utilizado en este estudio preliminar tiene una resolución relativamente baja (90×90 m) escogida así para conservar equivalencias de escalas geoespaciales con el trabajo regional de Botero (1963), por lo que la identificación de estructuras mórficas de escala menor solo sería posible en el caso de contrastes topográficos muy pronunciados (gradientes). En este mismo sentido, los conceptos interdependientes de resolución y tamaño hacen que si la resolución del DEM es más alta, nuestro paquete tecnológico para análisis por transformada *wavelet* permita identificar más componentes de onda, aunque al considerar geoformas de escala muy pequeña se hace evidente el problema de “borde” (González, 2004). Por ello es importante probar este tipo de análisis en trabajos futuros con DEMs de mejor resolución espacial (SRTM-30 m o ALOS-PALSAR-12,5 m).

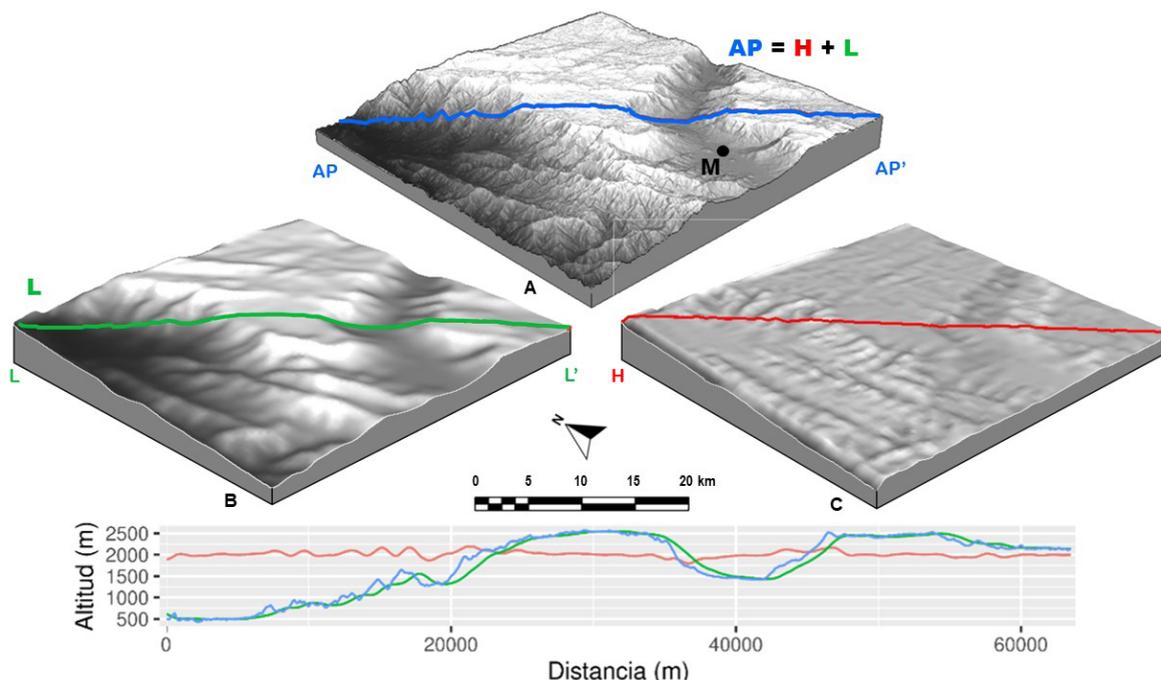


Figura 9. Geomorfos en el DEM real de una porción del AA y perfiles topográficos. **A.** Segmento areal seleccionado de $\sim 46 \times 46$ km para el Altiplano Antioqueño y su perfil topográfico AP-AP' (línea azul) sobre el DEM, la ciudad de Medellín (M) se marca como punto de referencia, este DEM corresponde tanto al punto de partida (DEM original) como de llegada (recomposición), dado que en nuestra aproximación no se produce pérdida de información geoespacial. **B.** Descomposición del DEM real al componente de baja frecuencia (L) y su respectiva línea de perfil L-L' (verde). **C.** Componente de alta frecuencia (H) y línea de perfil H-H' (roja). En el perfil inferior se representan comparativamente los tres componentes: original (AP-AP'), baja (L-L') y alta (H-H') frecuencias.

Conclusiones

Las geomorfos del MO de Botero (1963) representadas en un DEM constituyen un conjunto de señales complejas. Debido a la no estacionariedad de estas señales, el paquete tecnológico GRASS-R para la transformada *wavelet Haar* desarrollado en este trabajo resultó ser una estrategia de ADT adecuada para descomponer-recomponer los DEM en dominios de espacio-frecuencia multiescala (disección del relieve desde altas hasta bajas frecuencias) que corresponden a patrones complejos del relieve.

La transformada *wavelet Haar* aplicada tanto sobre un DEM artificial de prueba como sobre un DEM real en una porción piloto del MO permitió descomposiciones y recomposiciones como suma ponderada de elementos con localización explícita de espacio-frecuencia en cuatro niveles jerárquicos de prueba (J_1 - J_4) y en elementos espaciales de diferentes frecuencias y amplitudes. Las descomposiciones por árboles (paquetes *wavelets*) son el abordaje ideal, pues permitieron efectuar descomposiciones completas del espectro de frecuencias (altas, medias y bajas) del

DEM, lo cual aprovechamos en esta investigación a través de la construcción de paquetes tecnológicos en R que aseguran la conservación de la resolución de las imágenes resultantes y la recomposición a partir de los varios componentes de frecuencia, sin pérdida de información geoespacial ni de frecuencias relevantes, para preservar información de los fenómenos escala, forma y posición de las frecuencias en la señal, *i. e.*, manteniendo los atributos de las geomorfos.

La prueba metodológica en el relieve sintético “caja de huevos” fue útil en la determinación simplificada de las mejores rutas “de árbol” por niveles (J_1, J_2, J_3, \dots) para encontrar categorías jerárquicas cuantitativas de las geomorfos sintéticas antes de pasar al DEM real donde existen más rangos de frecuencias y de mayor complejidad. Quedan abiertas posibilidades de utilizar este mismo procedimiento para otras rutas de descomposición que se ajusten mejor a otros problemas geoespaciales en otras escalas. Así mismo, esta experiencia piloto permite plantear la posibilidad de construir la plataforma completamente bajo el entorno GRASS y superar la limitación del R en cuanto a capacidad de memoria para modelos que abarquen

áreas geográficas más extensas o para el manejo de bordes para áreas de tamaño no diádico.

Con la metodología desarrollada se pudo desagregar preliminarmente el relieve del MO (*sensu* Botero, 1963) en diferentes escalas, *i. e.*, diferentes niveles jerárquicos de los dominios espacio-frecuencia. En la baja frecuencia, con longitudes de onda de ~3000 m y amplitudes ~400 m se inscriben las geoformas mayores que Botero (1963) refiere como estructuras mórficas de orden principal, *e. g.*, altiplanos (Norte y Sur, Belmira), grandes cañones (ríos Cauca y Medellín-Porce), rampas denudativas y frentes de erosión (Magdalena, Cauca, Riógrande). En el caso de las geoformas menores de alta frecuencia y baja amplitud se tienen las ondulaciones propias de los sistemas colinados con longitudes de onda de menos de ~500 m y amplitudes menores a ~50 m asociadas a una incisión fluvial menor dentro de la jerarquía espacial de geoformas del MO en las que también se pueden inscribir *inselbergs* de diversos tipos.

Nuestro trabajo constituye un primer paso para la aplicación de las transformadas *wavelet* como un aspecto del ADT que facilita el abordaje del relieve como señal, con posibilidades de aplicación en otros contextos litotectónicos, morfotectónicos, y morfoclimáticos más allá del MA. Esto permitirá a la comunidad geocientífica en Colombia profundizar el estado del conocimiento de la evolución de geoformas-relieve como resultado de las relaciones entre topografía y clima-tectónica-litología-estructuras, que fue en esencia lo que Botero potenció con su importante trabajo *Contribución al conocimiento de la geología de la zona central de Antioquia*, y con su convicción de que la geomorfología era más un asunto de geólogos(as) que de geógrafos(as) (sin que este comentario represente una percepción peyorativa de la geografía), convicción que desde la década del 60 impactó el abordaje de las geociencias en la Facultad de Minas-UNAL y en el país, justamente gracias al trabajo del doctor Botero. Resulta maravilloso imaginar la mirada curiosa y profundamente inquisitiva del doctor Botero al ver representado a la manera de un DEM el paisaje de altiplanos y cañones, de *inselbergs* y colinas, que tan cercano fue a su vida profesional y personal.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer a la UNAL por facilitar el espacio del Laboratorio de Sistemas Complejos de la Facultad de Ciencias donde se desarrollaron

los trabajos conducentes a la realización de esta investigación. Agradecemos igualmente el trabajo de los pares evaluadores pues con sus observaciones, correcciones y sugerencias contribuyeron a mejorar significativamente la calidad de este manuscrito. Agradecemos también a la arquitecta Luna R-P por su apoyo con el trabajo gráfico en este manuscrito.

Referencias

- Addison, P.S. (2016). *The illustrated wavelet transform handbook: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance*. CRC press.
- Adediran, A.O.; Parcharidis, I.; Poscolieri, M.; Pavlopoulos, K. (2004). Computer-assisted discrimination of morphological units on north-central Crete (Greece) by applying multivariate statistics to local relief gradients. *Geomorphology*, 58(1-4), 357-370. <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2003.07.024>
- Agudelo-Duque, S. (2007). Herramientas para el análisis geomorfométrico del relieve, utilizando transformadas *wavelet*. MSc Tesis, Universidad Nacional de Colombia.
- Arias, L.A. (1995). El relieve de la zona central de Antioquia: un palimpsesto de eventos tectónicos y climáticos. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 10, 9-24.
- Arias, L.A. (1996). Altiplanos y cañones en Antioquia: una mirada genética. *Revista Facultad de Ingeniería Universidad de Antioquia*, 8(2), 84-96.
- Arias, L.A.; González, L.H. (2003). La diversidad del relieve y los suelos en el altiplano de Santa Rosa de Osos (Antioquia): Sus significados ambientales. *Boletín de Ciencias de la Tierra*, 15, 51-72.
- Arias-López, L.A.; Gonzáles-Santamaría, L.H. (2007). Morfología del Altiplano de Santa Rosa de Osos (ASRO). *Boletín de Geología*, 29(1), 95-102.
- Bjørke, J.T.; Nilsen, S. (2003). Wavelets applied to simplification of digital terrain models. *International Journal of Geographical Information Science*, 17(7), 601-621. <https://doi.org/10.1080/1365881031000135500>

- Botero, G. (1940). Geología sobre el Ordoviciano de Antioquia. *VIII Pan American Scientific Congress*, Washington.
- Botero, G. (1941). Croquis Geológico de Antioquia. *Minería*, 19(111-112), 9080-9081.
- Botero, G. (1942). Contribución al conocimiento de la petrografía del Batolito Antioqueño. *Minería*, 20, 9318-9324.
- Botero, G. (1963). Contribución al conocimiento de la geología de la zona central de Antioquia. *Anales Facultad de Minas*, 57, 7-101.
- Botero, G.; Gutiérrez, J.; Álvarez, R. (1968). Fracturación en el Batolito Antioqueño y su influencia en el diseño de obras subterráneas. *Simpósio sobre Ingeniería Geológica*, Bogotá.
- Botero, G.; González, H. (1983). Algunas localidades fosilíferas cretáceas de la Cordillera Central, Colombia. *Geología Norandina*, 7, 15-27.
- Bradshaw, G.; Spies, T. (1992). Characterizing canopy gap structure in forests using wavelet analysis. *Journal of Ecology*, 80(2), 205-215.
- Bruun, B.T.; Nilsen, S. (2003). Wavelet representation of large digital terrain models. *Computers & Geosciences*, 29(6), 695-703. [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(03\)00015-3](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(03)00015-3)
- Burbank, D.W.; Anderson, R.S. (2013). *Tectonic geomorphology*. Wiley.
- Bustos, X.; Bermúdez, M.A. Toro, G.M.; Bernet, M.; Rojas, O.; Marín, M. (2013). Caracterización de superficies de erosión mediante geomorfología cuantitativa, Altiplano Antioqueño, Cordillera Central de Colombia. *Terra*, 29(46), 43-67.
- Davis, J. D.; Chojnacki, J. D. (2017). Two-dimensional discrete Fourier transform analysis of karst and coral reef morphologies. *Transactions in GIS*, 21(3), 521-545. <https://doi.org/10.1111/tgis.12277>
- de Micheaux, P.L.; Drouilhet, R.; Liquet, B. (2013). *The R software, Fundamentals of Programming and Statistical Analysis*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9020-3>
- Debret, M.; Sebag, D.; Crosta, X.; Massei, N.; Petit, J.R.; Chapron, E.; Bout-Roumazelles, V. (2009). Evidence from wavelet analysis for a mid-Holocene transition in global climate forcing. *Quaternary Science Reviews*, 28(25-26), 2675-2688. <https://doi.org/10.1016/j.quascirev.2009.06.005>
- Dogliani, A.; Simeone, V. (2014). Geomorphometric analysis based on discrete wavelet transform. *Environmental Earth Sciences*. 71, 3095-3108. <https://doi.org/10.1007/s12665-013-2686-3>
- Dong, P.; Xia, J.; Zhong, R.; Zhao, Z.; Tan, S. (2021). A new method for automated measurement of sand dune migration based on multi-temporal LiDAR-Derived digital elevation models. *Remote Sensing*, 13(16), 3084. <https://doi.org/10.3390/rs13163084>
- Duque-Trujillo, J.; Bustamante, C.; Solari, L.; Gómez-Mafla, Á.; Toro-Villegas, G.; Hoyos, S. (2019). Reviewing the Antioquia batholith and satellite bodies: a record of Late Cretaceous to Eocene syn- to post-collisional arc magmatism in the Central Cordillera of Colombia. *Andean Geology*, 46(1), 82-101. <https://doi.org/10.5027/andgeov46n1-3120>
- Falorni, G.; Teles, V.; Vivoni, E.R.; Bras, R.L.; Amaratunga, K.S. (2005). Analysis and characterization of the vertical accuracy of digital elevation models from the Shuttle Radar Topography Mission. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 110(F2). <https://doi.org/10.1029/2003JF000113>
- Feininger, T.; Botero, G. (1982). The Antioquian Batholith, Colombia, Bogotá. *Publicación Geológica Especial Ingeominas*, 1-50.
- Finlayson, D.P.; Montgomery, D. (2003). Modeling large-scale fluvial erosion in geographic information systems. *Geomorphology*, 53(1-2), 147-164. [https://doi.org/10.1016/S0169-555X\(02\)00351-3](https://doi.org/10.1016/S0169-555X(02)00351-3)
- Florinsky, I. (2011). *Digital Terrain Analysis in Soil Science and Geology*. Academic Press.
- Foresman, T.W. (1998). *The history of geographic information systems: perspectives from the pioneers*. Prentice Hall.

- Gallant, J.C.; Hutchinson, M. F. (1997). Scale dependence in terrain analysis. *Mathematics and Computers in Simulation*, 43(3-6), 313-321. [https://doi.org/10.1016/S0378-4754\(97\)00015-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4754(97)00015-3)
- Galli, A.; Heydt, G.; Ribeiro, P.F. (1996). Exploring the power of wavelet analysis. *IEEE Computer Applications in Power*, 9(4), 37-41. <https://doi.org/10.1109/67.539845>
- Gao, R.X.; Yan, R. (2011). From fourier transform to wavelet transform: A historical perspective. *Wavelets: theory and applications for manufacturing* (pp. 17-32). Springer.
- García, C.; Hermelin, M. (2004). Cálculo preliminar de la tasa de meteorización del Batolito Antioqueño, Cordillera Central, Colombia. *Revista Brasileira de Geomorfología*, 5(1), 43-53. <https://doi.org/10.20502/rbg.v5i1.31>
- Gerstner, T.; Helfrich, H.P.; Kunoth, A. (2003). Wavelet analysis of geoscientific data. En: H. Neugebauer, C. Simmer (eds.). *Dynamics of Multiscale Earth Systems*. (pp. 69-88). Springer. https://doi.org/10.1007/3-540-45256-7_4
- Gómez-Tapias, J.; Montes-Ramírez, N.E.; Nivia-Guevara, A.; Diederix, H. (2015). Mapa Geológico de Colombia, Escala 1: 1.000. 000. Servicio Geológico Colombiano.
- González, F. (2004). Caracterización textural de modelos de elevación digital del terreno con base en transformadas de paquetes wavelets de walsh y transformadas intermedias. MSc Tesis, Universidad Nacional, Medellín.
- Graps, A. (1995). An introduction to wavelets. *IEEE Computational Science and Engineering*, 2(2), 50-61. <https://doi.org/10.1109/99.388960>
- Guenther, E.J. (2017). Using spectral analysis techniques to identify characteristic scales in digital elevation models. PhD Thesis, Texas A&M University.
- Guo, C.; Ai, W.; Hu, S.; Du, X.; Chen, N. (2022). Sea surface wind direction retrieval based on convolution neural network and wavelet analysis. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, 15, 3868-3876. <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2022.3173001>
- Hani, A.F.M.; Sathyamoorthy, D.; Asirvadam, V.S. (2011). A method for computation of surface roughness of digital elevation model terrains via multiscale analysis. *Computers & Geosciences*, 37(2), 177-192. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2010.05.021>
- Hay, G.J.; Blaschke, T.; Marceau, D.J.; Bouchard, A. (2003). A comparison of three image-object methods for the multiscale analysis of landscape structure. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 57(5-6), 327-345. [https://doi.org/10.1016/S0924-2716\(02\)00162-4](https://doi.org/10.1016/S0924-2716(02)00162-4)
- Heath, G.R.; Kots, E.; Robertson, J.L.; Lansky, S.; Khelashvili, G.; Weinstein, H.; Scheuring, S. (2021). Localization atomic force microscopy. *Nature*, 594(7863), 385-390. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-03551-x>
- Hermelin, M. (1965). Estudio preliminar sobre la descomposición de algunas rocas del Batolito Antioqueño. Teiss de Pregrado, Universidad Nacional de Colombia.
- Hermelin, M. (1982). El origen del Valle de Aburrá: evolución de las ideas. *Boletín de Ciencias de la Tierra*, 7-8, 47-65.
- Hermelin, M. (1992). Los suelos del oriente antioqueño. Un recurso no renovable. *Bulletin de l'Institut Français d'études andines*, 21(1), 25-36.
- Hermelin, M. (2015). *Landscapes and landforms of Colombia*. Springer.
- Hess-Nielsen, N.; Wickerhauser, M.V. (1996). Wavelets and time-frequency analysis. *Proceedings of the IEEE*, 84(4), 523-540. <https://doi.org/10.1109/5.488698>
- Hutchinson, M.; Gallant, J. (2000). Digital elevation models and representation of terrain shape. En: J. Wilson, J. Gallant (eds). *Terrain Analysis: Principles and Applications* (pp. 29-50). John Wiley and Sons.
- IGAC (2017). Mapa Departamento de Antioquia, Escala 1:500.000. Instituto Geográfico Agustín Codazzi.

- Ihaka, R.; Gentleman, R. (1996). R: a language for data analysis and graphics. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3), 299-314. <https://doi.org/10.1080/10618600.1996.10474713>
- Jasiewicz, J.; Stepinski, T.F. (2013). Geomorphons-a pattern recognition approach to classification and mapping of landforms. *Geomorphology*, 182, 147-156. <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2012.11.005>
- Jensen, J.R. (2009). *Remote sensing of the environment: An earth resource perspective*. Pearson Education India.
- Jordan, G.; Schott, B. (2005). Application of wavelet analysis to the study of spatial pattern of morphotectonic lineaments in digital terrain models. A case study. *Remote Sensing of Environment*, 94(1), 31-38. <https://doi.org/10.1016/j.rse.2004.08.013>
- Kalbermatten, M.; van de Ville, D.; Turberg, P.; Tuia, D.; Joost, S. (2012). Multiscale analysis of geomorphological and geological features in high resolution digital elevation models using the wavelet transform. *Geomorphology*, 138(1), 352-363. <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2011.09.023>
- Kaplan, I. (2001). The Daubechies D4 wavelet Transform. http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/daubechies/index.html
- Khatami, A.; Khosravi, A.; Nguyen, T.; Lim, C.P.; Nahavandi, S. (2017). Medical image analysis using wavelet transform and deep belief networks. *Expert Systems with Applications*, 86, 190-198. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.05.073>
- Klees, R.; Haagsmans, R. (2000). *Wavelets in the Geosciences*. Springer.
- Kostek, B.; Zwan, P. (2001). Wavelet-based automatic recognition of musical instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(5), 2754-2754. <https://doi.org/10.1121/1.4777599>
- Marsh, M.; Walsh, R.; Bromage, B. (2002). A wavelet analysis of quasi-periodic variability across a solar coronal hole region. *Astronomy & Astrophysics*, 393(2), 649-659. <https://doi.org/10.1051/0004-6361:20021057>
- Mojsilovic, A.; Popovic, M.V.; Rackov, D.M. (2000). On the selection of an optimal wavelet basis for texture characterization. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(12), 2043-2050. <https://doi.org/10.1109/83.887972>
- Montes, C.; Hatcher, R.D.; Restrepo-Pace, P.A. (2005). Tectonic reconstruction of the northern Andean blocks: Oblique convergence and rotations derived from the kinematics of the Piedras-Girardot area, Colombia. *Tectonophysics*, 399(1-4), 221-250. <https://doi.org/10.1016/j.tecto.2004.12.024>
- Montgomery, D.R.; Balco, G.; Willett, S.D. (2001). Climate, tectonics, and the morphology of the Andes. *Geology*, 29(7), 579-582. [https://doi.org/10.1130/0091-7613\(2001\)029<0579:CTATMO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1130/0091-7613(2001)029<0579:CTATMO>2.0.CO;2)
- Muñoz, P.; Gorin, G.; Parra, N.; Velásquez, C.; Lemus, D.; Monsalve, C.; Jojoa, M. (2017). Holocene climatic variations in the Western Cordillera of Colombia: A multiproxy high-resolution record unravels the dual influence of ENSO and ITCZ. *Quaternary Science Reviews*, 155, 159-178. <https://doi.org/10.1016/j.quascirev.2016.11.021>
- Neteler, M.; Bowman, M.H.; Landa, M.; Metz, M. (2012). GRASS GIS: A multi-purpose open source GIS. *Environmental Modelling & Software*, 31, 124-130. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2011.11.014>
- Noriega-Londoño, S.; Restrepo-Moreno, S.A.; Vinasco, C.; Bermúdez, M.; Min, K. (2020). Thermochronologic and geomorphometric constraints on the Cenozoic landscape evolution of the Northern Andes: Northwestern Central Cordillera, Colombia. *Geomorphology*, 351, 106890. <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2019.106890>
- Noriega-Londoño, S.; Arboleda-Giraldo, M.; Restrepo-Moreno, S.A.; Marín-Cerón, M.I. (2021). Cronoestratigrafía del Valle de Aburrá, Colombia: Una revisión. *Ingeniería, Investigación y Desarrollo*, 21(2), 1-12. <https://doi.org/10.19053/1900771X.v21.n2.2021.14267>

- Noriega-Londoño, S.; Restrepo-Moreno, S.A.; Marín-Cerón, M.I.; Carcaillet, J.; Bernet, M.; Angel, I. (2024). Erosion rates and morphogenesis of the El Peñol de Guatapé inselberg, northern Andes (Colombia), inferred from geomorphic analyses and cosmogenic ^{10}Be measurements. *Journal of South American Earth Sciences*, 134, 104726. <https://doi.org/10.1016/j.jsames.2023.104726>
- O'Regan, G.; O'Regan. (2008). *A brief history of computing*. Springer.
- Page, W.D.; James, M.E. (1981). The antiquity of the erosion surfaces and late Cenozoic deposits near Medellín, Colombia: Implications to tectonics and erosion rates. *Revista CIAF*, 6(1-3), 421-454.
- Paucar, C.; Saenz, E. (1995). Estudio de la evolución térmica del Batolito Antioqueño por huellas de fisión. Tesis de Pregrado, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- Pérez-Consuegra, N.; Ott, R.F.; Hoke, G.D.; Galve, J.P.; Pérez-Peña, V.; Mora, A. (2021). Neogene variations in slab geometry drive topographic change and drainage reorganization in the Northern Andes of Colombia. *Global and Planetary Change*, 206, 103641. <https://doi.org/10.1016/j.gloplacha.2021.103641>
- Pike, R.J.; Rozema, W. (1975). Spectral analysis of landforms. *Annals of the Association of American Geographers*, 65(4), 499-516.
- Polikar, R. (2001). *The Wavelet Tutorial—Fundamental Concepts & An Overview of the Wavelet Theory*. IIT Delhi.
- Polikar, R.; Keinert, F.; Greer, M.H. (2001). Wavelet analysis of event related potentials for early diagnosis of Alzheimer's disease. In: A.A. Petrosian, F.G. Meyer (eds.). *Wavelets in Signal and Image Analysis: From Theory to Practice* (pp. 453-478). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9715-9_15
- Rabus, B.; Eineder, M.; Roth, A.; Bamler, R. (2003). The Shuttle Radar Topography Mission—A new class of digital elevation models acquired by spaceborne radar. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 57(4), 241-262.
- Rendón-Rivera, A.d.J.; Caballero-Acosta, J.H.; Arias-López, A.; González-Patía, A.; Arenas-Rivillas, J.A.; Gallego, J.J. (2011). Estudio geológico-geomorfológico en el oriente cercano a Medellín, como apoyo a la búsqueda de actividad tectónica reciente. *Boletín de Ciencias de la Tierra*, 29, 39-54.
- Restrepo-Moreno, S.A. (2009). Long-term morphotectonic evolution and denudation chronology of the Antioqueño Plateau, Cordillera Central, Colombia. Tesis PhD, University of Florida.
- Restrepo-Moreno, S.A.; Foster, D.A.; Stockli, D.F.; Parra-Sánchez, L.N. (2009). Long-term erosion and exhumation of the “Altiplano Antioqueño”, Northern Andes (Colombia) from apatite (U-Th)/He thermochronology. *Earth and Planetary Science Letters*, 278(1-2), 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.epsl.2008.09.037>
- Restrepo-Moreno, S.A.; Foster, D.A.; Bernet, M.; Min, K.; Noriega, S. (2019). Morphotectonic and orogenic development of the Northern Andes of Colombia: A low-temperature thermochronology perspective. En: F. Cediél, R.P. Shaw (Eds.). *Geology and Tectonics of Northwestern South America*: (pp. 749-832). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76132-9_11
- Restrepo, J.J.; Toussaint, J.F. (1982). Metamorfismos superpuestos en la Cordillera Central de Colombia. *V Congreso Latinoamericano de Geología*, Buenos Aires, Argentina.
- Rowe, A.C.; Abbott, P.C. (1995). Daubechies wavelets and mathematica. *Computers in Physics*, 9(6), 635-648. <https://doi.org/10.1063/1.168556>
- Saenz, E.A. (2003). Fission track thermochronology and denudational response to tectonics in the north of The Colombian Central Cordillera. Thesis MSc., Shimane University Japan.
- Salazar, S.; González, L.H.; Arias, L.A. (2008). Litoestratigrafía y pedoestratigrafía de los depósitos recientes en el Altiplano de Santa Rosa de Osos (ASRO). *Boletín de Ciencias de la Tierra*, 23, 21-32.

- Saunders, S.C.; Chen, J.; Drummer, T.D.; Gustafson, E.J.; Broszofski, K.D. (2005). Identifying scales of pattern in ecological data: a comparison of lacunarity, spectral and wavelet analyses. *Ecological Complexity*, 2(1), 87-105. <https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2004.11.002>
- Shirzaei, M. (2012). A wavelet-based multitemporal DInSAR algorithm for monitoring ground surface motion. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 10(3), 456-460. <https://doi.org/10.1109/LGRS.2012.2208935>
- Si, B.C. (2008). Spatial scaling analyses of soil physical properties: A review of spectral and wavelet methods. *Vadose Zone Journal*, 7(2), 547-562. <https://doi.org/10.2136/vzj2007.0040>
- SRTM (2000). National Geospatial-Intelligence Agency (NGA) y la National Aeronautics and Space Administration (NASA), Endeavour.
- Stark, C.; Stewart, J.; Ebinger, C.J. (2003). Wavelet transform mapping of effective elastic thickness and plate loading: Validation using synthetic data and application to the study of southern African tectonics. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 108(B12). <https://doi.org/10.1029/2001JB000609>
- Stepinski, T.F.; Jasiewicz, J. (2011). Geomorphons- a new approach to classification of landforms. *Proceedings of Geomorphometry*, 211, 109-112.
- Summerfield, M.A. (2005). The changing landscape of geomorphology. *Earth Surface Processes and Landforms*, 30(6), 779-781. <https://doi.org/10.1002/esp.1250>
- Szypuła, B. (2019). Quality assessment of DEM derived from topographic maps for geomorphometric purposes. *Open Geosciences*, 11(1), 843-865. <https://doi.org/10.1515/geo-2019-0066>
- Telesca, L.; Lapenna, V.; Alexis, N. (2004). Multiresolution wavelet analysis of earthquakes. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(3), 741-748. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.021>
- Viles, H. (2016). Technology and geomorphology: Are improvements in data collection techniques transforming geomorphic science? *Geomorphology*, 270, 121-133. <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2016.07.011>
- Vinasco, C.J.; Cordani, U.G.; Gonzalez, H.; Weber, M.; Pelaez, C. (2006). Geochronological, isotopic, and geochemical data from Permo-Triassic granitic gneisses and granitoids of the Colombian Central Andes. *Journal of South American Earth Sciences*, 21(4), 355-371.
- Wang, C.; Yang, Q.; Jupp, D.L.B.; Pang, G. (2016). Modeling change of topographic spatial structures with DEM resolution using semi-variogram analysis and filter bank. *ISPRS International Journal of Geo-Information*, 5(7), 107. <https://doi.org/10.3390/ijgi5070107>
- Wilson, J.P.; Gallant, J.C. (2000). Digital terrain analysis. *Terrain analysis: Principles and applications*, 6(12), 1-27.
- Wood, J. (1996). The geomorphological characterisation of digital elevation models. Tesis PhD. University of Leicester, United Kingdom.
- Xiong, L.; Li, S.; Tang, G.; Strobl, J. (2022). Geomorphometry and terrain analysis: Data, methods, platforms and applications. *Earth-Science Reviews*, 233, 104191. <https://doi.org/10.1016/j.earscirev.2022.104191>
- Yu, J.; Karlsson, S. (2001). Local spectral analysis using wavelet packets. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 20, 497-528. <https://doi.org/10.1007/BF01201975>
- Zapata, S.; Zapata-Henao, M.; Cardona, A.; Jaramillo, C.; Silvestro, D.; Oboh-Ikuenobe, F. (2021). Long-term topographic growth and decay constrained by 3D thermo-kinematic modeling: Tectonic evolution of the Antioquia Altiplano, Northern Andes. *Global and Planetary Change*, 203, 103553. <https://doi.org/10.1016/j.gloplacha.2021.103553>
- Zatelli, P.; Antonello, A. (2002). New GRASS modules for multiresolution analysis with wavelets. *Open Source GIS-GRASS Users Conference*. Italia.

Fecha de recibido: 02 de agosto de 2023

Fecha de aceptado: 25 de septiembre de 2024
