

# ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS HIDROGEOLÓGICOS (S,T) A PARTIR DE ENSAYOS DE BOMBEO EN RÉGIMEN VARIABLE RESOLVIENDO UN SISTEMA NO-LINEAL DE ECUACIONES (SNE)

Kui Liu<sup>1</sup>; Yesid Goyes<sup>2</sup>; Chen Chen<sup>1</sup>; Sergio Gélvez<sup>2</sup>

**Forma de citar:** Liu, K., Goyes, Y., Chen, C., y Gélvez, S. 2014. Estimación de los parámetros hidrogeológicos (S,T) a partir de ensayos de bombeo en régimen variable resolviendo un sistema no-lineal de ecuaciones (SNE). Boletín de Geología, 36 (2): 71-77.

## RESUMEN

El ensayo por Bombeo es uno de los más útiles medios para determinar las propiedades hidráulicas de acuíferos y capas confinantes. Se pueden obtener resultados fidedignos que, en general, son representativos de una superficie mayor que los obtenidos por medio de observaciones puntuales (Kruseman and de Ridder, 1990). Theis (1935) produjo un gran progreso al ser el primero que desarrolló una fórmula para régimen variable en la que toma parte el factor tiempo y coeficiente de almacenamiento. En la solución de Theis ( $i$ ) al problema de régimen variable se introduce la función de pozo  $W(u)$ , llamada Integral exponencial E1 (Chiccoli *et al.*, 1990). Los métodos clásicos usan aproximaciones para la función de pozo, donde se deben cumplir condiciones (restricciones) en las variables físicas para minimizar errores (Theis, 1935; Chow, 1952; Cooper and Jacob, 1946). Este trabajo propone un método para estimar la transmisividad (T) y coeficiente de almacenamiento (S) para condiciones de flujo en régimen variable sobre acuíferos confinados, evitando todas las restricciones y asumiendo la función de pozo en su forma completa (Integral exponencial E1). El método propuesto permite un fácil manejo de grandes volúmenes de datos para cualquier intervalo de muestreo y genera una estimación más robusta y precisa que conduce a una caracterización en un área específica con intereses hidrogeológicos.

**Palabras Clave:** Theis, Ensayo de bombeo, hidrogeología, función de pozo, coeficiente de almacenamiento.

## ESTIMATION OF HYDROGEOLOGICAL PARAMETERS (S,T) FROM PUMPING TESTS FOR UNSTEADY-STATE SOLVING A NONLINEAR SYSTEM EQUATIONS (SNE)

## ABSTRACT

The Pumping test is one of the most useful means for determining the hydraulic properties of aquifer and confining beds. Results can be obtained that, in general, are representative of an area larger than those obtained by means of point observations (Kruseman and de Ridder, 1990). Theis (1935) was the first to develop a formula for unsteady-state flow that introduces the time factor and the storativity. The unsteady-state equation, which was derived from analogy between the flow of groundwater and the conduction of heat introduced the exponential integral (Chiccoli *et al.*, 1990) (which is written symbolically  $W(u)$ ). Classical methods use approximations to 'well function', where you must fulfill conditions (constraints) on the physical variables for minimal error (Theis, 1935; Chow, 1952; Cooper and Jacob, 1946). This work proposes a method to estimate the transmissivity (T) and the storativity (S) for unsteady-state flow. Our proposed method generates more robust and accurate estimation leading to a more reliable characterization of the hydrogeological specified area.

**Keywords:** Theis, Pumping Test, storativity, hydrogeological, well function.

<sup>1</sup> University of Texas

<sup>2</sup> Universidad Industrial de Santander, goyes.yesid@gmail.com

## INTRODUCCIÓN

Un ensayo por bombeo (test de acuífero) se realiza para evaluar un acuífero, estimulándolo por medio de bombeo constante, y observando su respuesta (abatimiento o descenso de nivel) en un pozo (o pozos) de observación (Stallman, 1971; Reed, 1980). Para el estudio del flujo subterráneo existen dos tipos de ecuaciones, las que describen el flujo del agua en régimen permanente (equilibrio) y las que lo hacen en régimen variable (no-equilibrio). Desde el momento en que se comienza el bombeo hasta que se alcanza el régimen permanente, se produce flujo en condiciones de régimen variable o no-equilibrio. En consecuencia, un acuífero infinito, horizontal, completamente confinado y de espesor constante (FIGURA 1) que se bombea a un caudal constante, siempre estará en condiciones de régimen variable (Kruseman and de Ridder, 1990). Las ecuaciones de flujo en régimen variable tienen la solución propuesta por Theis (1935), (basado en la literatura de transferencia de calor)

donde se introduce una función nombrada función de pozo ('WellFunction'), de acuerdo con Chiccoli *et al.* (1990), es una integral exponencial E1 (integral indefinida sin solución analítica).

Al aplicar la solución de Theis (1935) a datos de campo y realizar una estimación de parámetros (transmisividad y coeficiente de almacenamiento) siempre se tiene el problema de integrar la función de pozo. Es por esto que se contemplan aproximaciones las que han permitido desarrollar formas más simples de analizar datos de campo (Theis, 1935; Chow, 1952; Cooper and Jacob, 1946). Este trabajo busca implementar un nuevo método para la estimación de parámetros (T y S) para ensayos de bombeo en régimen variable sobre acuíferos confinados usando un algoritmo (Levenberg-Marquard) que estima valores en un sistema de ecuaciones no lineales, el cual no tiene restricciones de ningún tipo sobre los datos medidos en campo, se pueden analizar grandes volúmenes y en intervalos deseados.

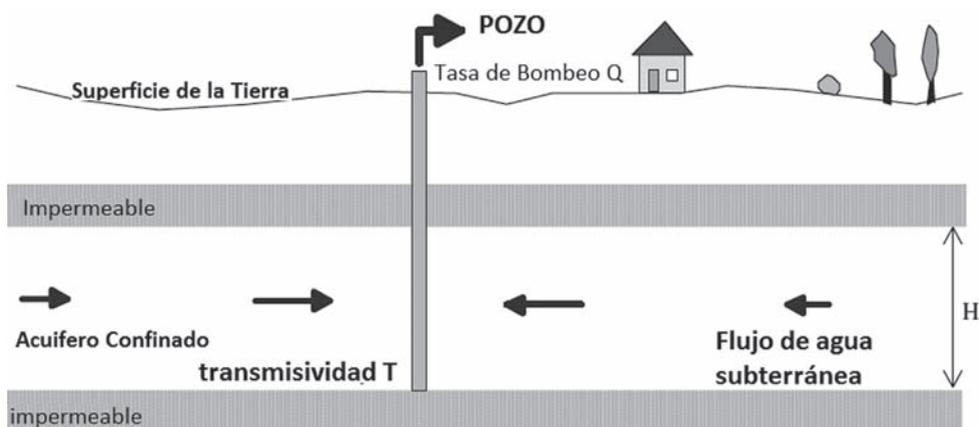


FIGURA 1. Esquema de un acuífero confinado bombeado. Modificado de Holzbecher (2007).

## FLUJO EN RÉGIMEN VARIABLE

La ecuación diferencial que gobierna el flujo en régimen variable en acuíferos confinados (en su forma polar) es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

Donde  $r$  es la distancia del pozo de bombeo hasta el pozo de observación,  $h$  es el nivel piezométrico,  $t$  es el tiempo de bombeo,  $S$  y  $T$  son el coeficiente de almacenamiento y la transmisividad respectivamente.

El pozo de bombeo es reemplazado en el análisis por un 'sumidero' matemático de longitud constante y diámetro

infinitesimal. La condición inicial es:

$$h(r, 0) = h_0 \text{ Para } t \geq 0 \quad (2)$$

Y las condiciones de frontera son:

$$h \rightarrow 0, r \rightarrow \infty \text{ Para } t \geq 0 \quad (3a)$$

$$r \frac{\partial h}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi T} \text{ Para } r \rightarrow 0 \quad (3b)$$

Donde  $Q$  es el caudal de bombeo.

Theis (1935) propone una solución deducida por analogía entre el flujo del agua en el suelo y la conducción del calor, se puede expresar de la siguiente manera:

$$s(t) = \frac{Q}{4\pi T} W(u(t)) \text{ Con } u(t) = \frac{Sr^2}{4Tt} \quad (4)$$

En la formula aparece la función  $W$ , con un argumento usualmente abreviado como  $u$ .  $W(u)$  es denominada la función de pozo. En la literatura matemática es llamada integral exponencial y es referida como  $E_1(u)$  y se define como:

$$W(u(t)) = E_1(u(t)) = \int_{u(t)}^{\infty} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta \quad (5a)$$

Debido a la dificultad planteada por la función de pozo teniendo en cuenta los límites de integración, se plantea un cambio de la expresión integral convencional a la propuesta por Abramowitz and Stegun (1965) según la siguiente expresión:

$$W(u(t)) = E_1(u(t)) = \int_{u(t)}^{\infty} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} d\zeta = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\zeta * u(t)}}{\zeta} d\zeta \quad (5b)$$

La ecuación (5b) se cumple para todos los valores de  $u \geq 0$ , esta condición es fácilmente superada según se muestra el valor de  $u(t)$  en la ecuación (4), éste valor será siempre positivo y mayor a uno en todos los casos.

## AJUSTE AUTOMÁTICO

A partir de las ecuaciones formuladas que rigen el flujo subterráneo y el cambio de la tabla de agua inicial durante las pruebas de bombeos se pueden realizar simulaciones numéricas que permiten estudiar el comportamiento a través de la variación de los diferentes parámetros (transmisividad, coeficiente de almacenamiento, altura inicial, permeabilidad, espesor del acuífero, entre otras). El ajuste automático consiste en el proceso inverso, y es mediante el cual a partir de la observación y medición se pretende ajustar la ecuación teórica para diferentes valores de parámetros calculados que cumplan la condición de mínimo error entre una curva y las observaciones, entonces el ajuste automático de parámetros hidrogeológicos se convierte en un simple problema inverso.

La formulación más simple para cumplir el objetivo de ajuste automático consiste en minimizar la norma de los residuos, en este trabajo se minimiza usando derivadas.

$$\|res\| = \sqrt{\sum (d(t) - d_i)^2} \quad (6a)$$

La operación radical no cambia los valores para los cuales se minimiza la norma de los residuos, entonces la raíz puede ser omitida. En la hidrogeología son muy importante los parámetros de transmisividad y coeficiente de almacenamiento, entonces si nuestra función objetivo se escribe en base a esos parámetros podríamos expresarla se la siguiente manera,

$$e(T, s) = \sum (d(t, T, s) - d_i)^2 \quad (6b)$$

Para minimizar la ecuación (6b) existen muchos métodos en la literatura matemática, los tres más importante son el Gauss-Newton, Gradiente Descendente y Levenberg-Marquardt, este trabajo usa las ventajas y optimización del tercer método para realizar el ajuste automático.

Para una revisión más detallada del ajuste automático se recomienda revisar lo descrito en Holzbecher (2007).

## METODOLOGÍA

Para un único pozo de bombeo y pozo de observación, se realiza un monitoreo del descenso de los niveles piezométricos después de iniciado el bombeo constante a través del tiempo. De tal manera que se tienen un número indefinido de valores tomados en parejas ordenadas tales que para un valor de tiempo  $t$  existe un valor medido del descenso  $s$  (Vandenberg, 1977).

No existe una función tal que relacione explícitamente a  $s$  en términos de  $t$ , o sea, una función tal que  $s=s(t)$ . Según la ecuación (4), la forma correcta es usar la variable  $u$  de tal manera que para un valor de  $t$  existe un valor de  $u$  de la forma  $u=u(t)$ .

Usando la notación de índices para los valores medidos en campo se cumple lo siguiente:

$$s(u(t_i)) = \frac{Q}{4\pi T} W(u(t_i)) \text{ Con } u(t_i) = \frac{Sr^2}{4Tt_i} \quad (7a)$$

Haciendo  $u(t_i) = u_i$  y reemplazando en (7a)

$$s(u_i) = \frac{Q}{4\pi T} W(u_i) \text{ Con } u_i = \frac{Sr^2}{4Tt_i} \quad (7b)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (7b) para todos los datos medidos se debe cumplir obligatoriamente que:

$$s(u_i) - \frac{Q}{4\pi T} W(u_i) = 0 \quad (7c)$$

De forma matricial,

$$\begin{aligned} s(u_1) - \frac{Q}{4\pi T} W(u_1) &= 0 \\ s(u_2) - \frac{Q}{4\pi T} W(u_2) &= 0 \\ &\dots \\ s(u_{n-1}) - \frac{Q}{4\pi T} W(u_{n-1}) &= 0 \\ s(u_n) - \frac{Q}{4\pi T} W(u_n) &= 0 \end{aligned}$$

Para cada medida en el tiempo, se debe encontrar un  $u$  tal que se cumpla el sistema de ecuaciones dado por (7c).

El método propuesto consiste en tomar los parámetros hidrogeológicos como parte de las variables que deben ser encontradas para que el sistema de ecuaciones no lineales se cumpla.

Se hace un ajuste a la función  $W(u(t))$  tal que no dependa del tiempo sino, los parámetros hidrogeológicos ( $S, T$ ).

$$u_i(S, T) = \frac{Sr^2}{4Tt_i} = \frac{1}{\tau} \frac{r^2}{4t_i} \quad (8a)$$

O sea, para cada instante de tiempo  $t_i$  se deben existir los parámetros  $S, T$  tales que resuelvan el sistema de ecuaciones.

$$s_i - \frac{Q}{4\pi T} W(u_i, \tau) \approx 0 \quad (8b)$$

Entonces para resolver la ecuación (8b), se debe resolver un sistema con 2 incógnitas y enésimas ecuaciones las cuales dependen del número de datos que se tomen en campo. Con esto se eliminan todas las restricciones de los métodos clásicos para el análisis de ensayos de bombeo en régimen variable.

La forma matemática más simple de resolver este tipo de sistema de ecuaciones no lineales (en el caso del flujo en régimen variable debido a la función de pozo) es aplicar el algoritmo Levenberg–Marquardt (Marquardt, 1963; Levenberg, 1944; More, 1977).

$$\xi_i(\tau) = \sum_i \left( s_i - \frac{Q}{4\pi T} \cdot W(u_i, \tau) \right)^2 \quad (9)$$

Donde la función  $\xi_i(\tau)$  debe ser minimizada.

## ALGORITMO LEVENBERG–MARQUARDT

El algoritmo de Levenberg–Marquardt (LMA por sus siglas en inglés) usado para resolver problemas que implican sistemas de ecuaciones no lineales. Estos problemas de minimización surgen especialmente en el ajuste de curvas.

El LMA interpola entre el algoritmo y Gauss-Newton (GNA) y el método de Gradiente Descendente, por esto que el LMA es más robusto que el GNA, lo cual significa que en muchos casos encuentra una solución así se inicie en un punto muy lejano del mínimo final.

El método de Levenberg-Marquardt usa una búsqueda direccional que sea solución al sistema de ecuaciones:

$$(J(x_k)^T J(x_k) + \lambda_k I) d_k = -J(x_k)^T F(x_k) \quad (10a)$$

O también, opcionalmente las ecuaciones:

$$(J(x_k)^T J(x_k) + \lambda_k \text{diag}((J(x_k)^T J(x_k)))) d_k = -J(x_k)^T F(x_k) \quad (10b)$$

Donde el escalar  $\lambda_k$  controla la dirección y magnitud de  $d_k$ ; cuando  $\lambda_k$  es cero,  $d_k$  es idéntica a la usada en el método Gauss-Newton. Para una revisión matemática más completa del método se recomienda la descripción realizada en Marquardt (1963)

## APLICACIÓN A DATOS DE CAMPO

Utilizando los datos del ensayo por bombeo “*Oude Korendijk*” (Wit, 1963), se usa la nueva propuesta para la estimación de parámetros  $S$  y  $T$  para régimen variable en un pozo penetrando totalmente en un acuífero confinado. En la TABLA 1 se muestran los datos de los descensos en los piezómetros situados a 30, 90 y 215m del pozo de bombeo.

Se deben satisfacer las siguientes condiciones para cualquier método usado (incluyendo el propuesto):

- El flujo del agua hacia el pozo es en régimen variable, es decir, ni las diferencias del descenso del nivel de agua en los piezómetros son despreciables con el tiempo, ni el gradiente es constante con el tiempo.
- La extracción de agua del almacenamiento produce inmediatamente descenso en la carga hidráulica.
- El diámetro del pozo de bombeo es muy pequeño, es decir, se puede despreciar el almacenamiento en el pozo.

**TABLA 1.** Datos del ensayo de bombeo “OUDE KORENDIJK”

t(min)	s(m)	t/r <sup>2</sup> (min/m <sup>2</sup> )	t(min)	s(m)	t/r <sup>2</sup> (min/m <sup>2</sup> )
0,10	0,04	1,11 x 10 <sup>-4</sup>	18	0,680	2,00 x 10 <sup>-2</sup>
0,25	0,08	2,78	27	0,742	3,00
0,50	0,13	5,55	33	0,753	3,66
0,70	0,18	7,77 x 10 <sup>-4</sup>	41	0,779	4,55
1,00	0,23	1,11 x 10 <sup>-3</sup>	48	0,793	5,34
1,40	0,28	1,56	59	0,819	6,56
1,90	0,33	2,11	80	0,855	8,89 x 10 <sup>-2</sup>
2,33	0,36	2,59	95	0,873	1,06 x 10 <sup>-1</sup>
2,80	0,39	3,12	139	0,915	1,54
3,36	0,42	3,73	181	0,935	2,01
4,00	0,45	4,44	245	0,966	2,72
5,35	0,50	5,94	300	0,990	3,33
6,80	0,54	7,55	360	1,007	4,00
8,30	0,57	9,22	480	1,050	5,55
8,70	0,58	9,67 x 10 <sup>-3</sup>	600	1,053	6,66
10,00	0,60	1,11 x 10 <sup>-2</sup>	728	1,072	8,08
13,10	0,64	1,46	830	1,088	9,22 x 10 <sup>-1</sup>

En Kruseman and de Ridder (1990) se usa un caudal constante estimado de  $Q = 788\text{m}^3/\text{día}$ .

Los cálculos son realizados en MATLAB®. La solución se nombra como ‘Solución SNE’. Para los métodos tradicionales se hace una comparación teniendo en cuenta que los parámetros estimados deben cumplir siempre la ecuación (8b).

En la TABLA 2. Se muestra el punto de comparación a partir de los parámetros hidrogeológicos  $S$  y  $T$  con su respectivo coeficiente de correlación. Este mismo resultado se muestra como el ajuste a la curva de Theis (1935) de forma más exacta y robusta.

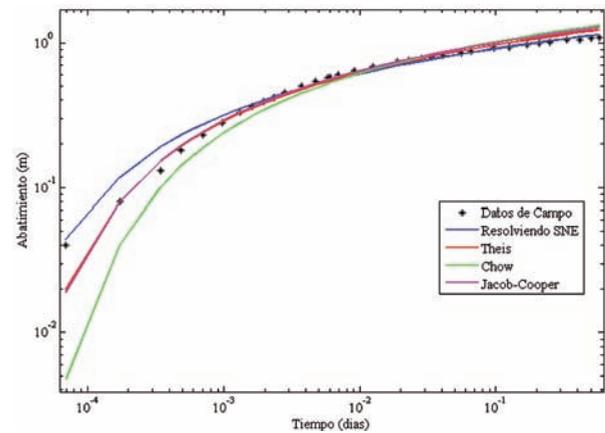
**TABLA 2.** Comparación de resultados para  $r=30$ .

Método	Transmisividad (T) m <sup>2</sup> /día	Coefficiente de almacenamiento (S)	Coefficiente de determinación
Theis (1935)	418	1,7 x 10 <sup>-4</sup>	0,9693
Chow (1956)	360	2,0 x 10 <sup>-4</sup>	0,9039
Cooper and Jacob (1946)	401	1,7 x 10 <sup>-4</sup>	0,9429
Solución SNE	480,4572	1,12522 x 10 <sup>-4</sup>	0,9895

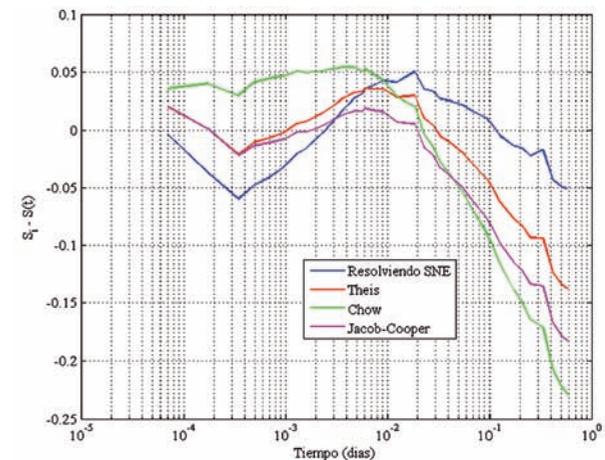
## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La aplicación del algoritmo Levenberg-Marquardt para la solución del sistema de ecuaciones no lineales permite estimar parámetros hidrogeológicos ( $S$  y  $T$ )

matemáticamente más exactos y de una forma más robusta. Esto se muestra en la FIGURA 2 donde la curva de ajuste se calcula usando todos los valores, o sea, minimizando la distancia del valor medido a la curva que describe la ecuación (4) teórica para régimen variable. El método de solución SNE usa herramientas matemáticas para realizar el ajuste teniendo en cuenta la función de pozo de forma completa y esto permite el ingreso de grandes volúmenes de datos y en cualquier intervalo, no contempla restricciones de tipo físico. En la FIGURA 3 la tendencia del error no es lineal para ningún método, pero si se minimiza más para tiempos altos en la Solución SNE, lo cual se ve reflejado en la sumatoria de los cuadrados de los residuos mostrados en la FIGURA 4 con el valor más bajo para el SNE. El método con el error más alto en el ajuste automático es el de Chow (1952) debido a sus consideraciones de pendiente uniforme para los primeros registros de datos en las pruebas de bombeos, o sea para los tiempos más pequeños.



**FIGURA 2.** Ajuste y comparación de la solución SNE con el método de Theis (1935).



**FIGURA 3.** Error calculado entre la solución SNE y el método de Theis (1935).

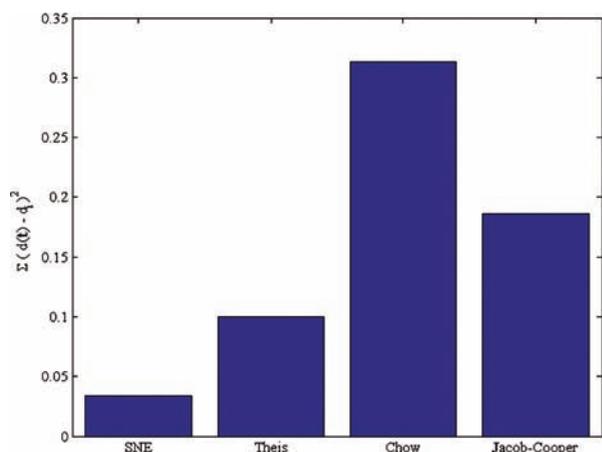


FIGURA 4. Sumatoria de los cuadrados de los residuos para todos los métodos analizados.

## SSNE: CODIGO EJECUTABLE PARA WINDOWS

Para la ejecución y verificación con diferentes datos se realiza un programa para Windows en la plataforma 64 bits, donde se permite ingresar una tabla de datos de manera manual, copiando desde Excel e importando desde un archivo .xls o .txt. Este programa ejecutable es de código libre creado con la herramienta GUIDE de Matlab 2012. En la FIGURA 5 se muestra la interface del programa ejecutable con los datos ingresados y resultados de manera gráfica y parámetros hidrogeológicos determinados. El programa se ha denominado SSNE.

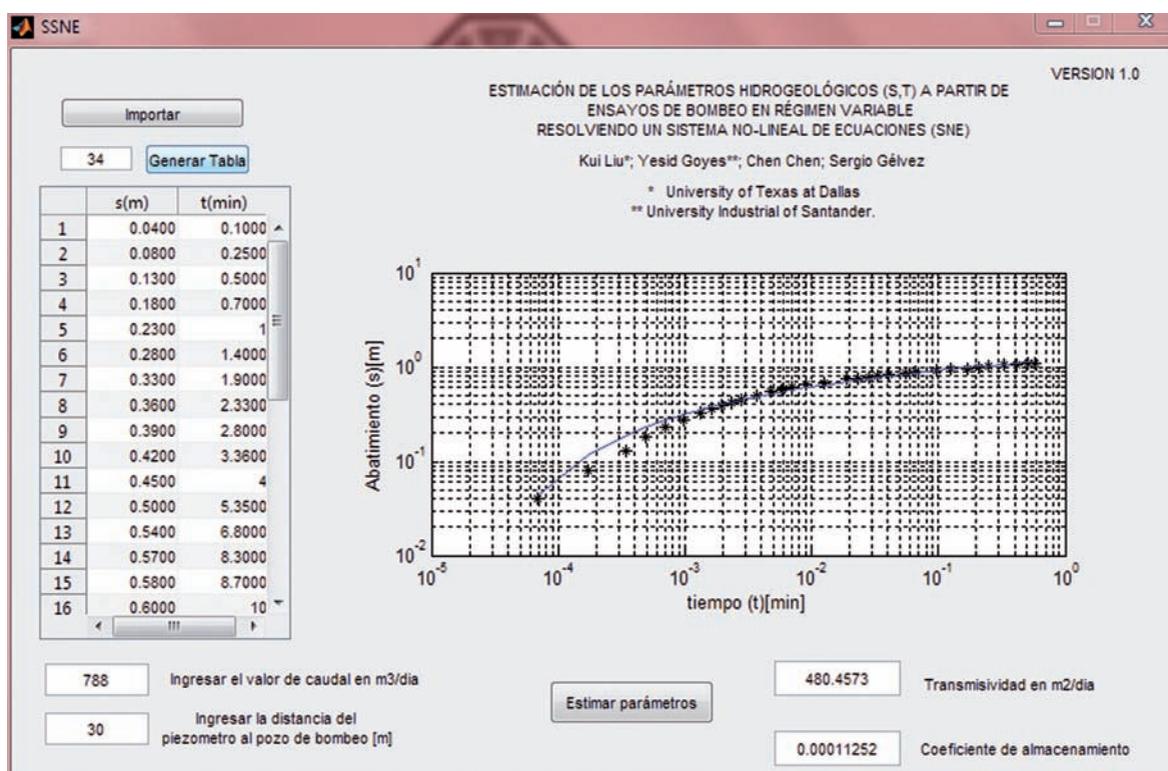


FIGURA 5. Interface gráfica del programa ejecutable SSNE para la aplicación del método SNE.

## REFERENCIAS

Abramovitz, M., and Stegun I. 1965. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Abramowitz and Stegun. New York: Dover. ISBN 0-486-61272-4., Chapter 5.

Chiccoli, C., Lorenzutta, S., and Maino, G. 1990. Recent results for generalized exponential integrals. Computer Math. Applic. 19 (5): 21—29.

Chow, V.T. 1952. On the determination of transmissivity and storage coefficients from pumping test data. Am.Geophys.Union Trans.33:397-404.

Cooper, H.H., and Jacob, C.E. 1946. A generalized graphical method for evaluating formation constants and summarizing well field history. Am.Geophys.Union Trans. 27:526-534.

Holzbecher, L. 2007. Environmental modeling using Matlab. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 393p.

Kruseman, G.P., and de Ridder, N.A. 1990. Analysis and Evaluation of Pumping Test Data (Second ed.). Wageningen, The Netherlands: International Institute for Land Reclamation and Improvement. 222p.

Levenberg, K. 1944. A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares. Quarterly Applied Math, 2: 164-168.

Marquardt, D. 1963. An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. SIAM. Journal Applied Math, 11: 431-441.

More, J.J. 1977. The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory. Numerical Analysis, ed. G. A. Watson, Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag, pp. 105-116.

Reed, J.E. 1980. Type Curves for Selected Problems of Flow to Wells in Confined Aquifers. Book 3, Applications of Hydraulics. U.S. Geological Survey. Book 3, Chapter B3. pp. 1-106 (online: [http://pubs.usgs.gov/twri/twri3-b3/pdf/TWRI\\_3-B3.pdf](http://pubs.usgs.gov/twri/twri3-b3/pdf/TWRI_3-B3.pdf))

Stallman, R.W. 1971. Aquifer-Test Design, Observation, and Data Analysis. Applications of Hydraulics. U.S. Geological Survey. Book 3, Chapter B1. pp. 1-26 (online [http://pubs.usgs.gov/twri/twri3-b1/pdf/twri\\_3-B1\\_a.pdf](http://pubs.usgs.gov/twri/twri3-b1/pdf/twri_3-B1_a.pdf))

Theis, C.V. 1935. The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of discharge of a well using groundwater storage. Trans. Amer. Geophys. Union, 16: 519-524.

Vandenberg, A. 1977. Type curves for analysis of pump tests in leaky strip aquifers. J. Hydrol, 33: 15-26.

Wit, K.E. 1963. The hydraulic characteristics of the Oude Korendijk polder, calculated from pumping test data and laboratory measurements of core samples (in Dutch). Inst. Land and Water Manag. Res., Wageningen, Report No. 190, 24 pp.

---

Trabajo recibido: septiembre 2 de 2013

Trabajo aceptado: mayo 30 de 2014