

# LOS PROCEDIMIENTOS GEOESTADISTICOS EN EL ANALISIS Y ESTIMACION DE YACIMIENTOS

EDMUNDO TULCANAZA NAVARRO

## RESUMEN

En este artículo se enuncian las principales definiciones y conceptos básicos de la Geoestadística que, con un cuerpo coherente de procedimientos, permite superar las insuficiencias de los métodos de estimación minera tradicionales.

Se hace una breve presentación de la vinculación que existe entre la estructura espacial de un depósito minero y los problemas relacionados con la estimación de reservas y la optimización de los reconocimientos. Se hace referencia igualmente a los errores de carácter geométrico (como los errores de superficie, tonelaje y cantidad de metal) que se originan en la estimación de un yacimiento.

## INTRODUCCION

La mayor parte de los problemas de estimación minera se vinculan ya sea a **estimaciones globales** (en las cuales no interesa localizar de una manera precisa los sectores más ricos o más pobres de un yacimiento) o a **estimaciones locales** (en los cuales los objetivos de precisión y localización de sectores o bloques con leyes superiores a una ley determinada son los principales).

Para realizar estas estimaciones se utilizan por lo general métodos convencionales tales como el promedio estadístico, el método de polígonos, del inverso de la distancia al cuadrado, histogramas, etc., cada uno de los cuales emplea un pro-

cedimiento de cálculo alimentado exclusivamente por las magnitudes de los valores provenientes del reconocimiento y muestreo (leyes en metal, espesores de una veta, etc.).

Especifiquemos uno de los métodos convencionales más utilizados: el promedio estadístico de la información disponible. Sea un bloque como el de la figura 1 cuya ley  $Z$  es desconocida. Supongamos muestrear éste bloque por  $n_1$  muestras ubicadas en las galerías ( $G_1$ ) y ( $G_2$ ), y por ( $n_2$ ) muestras ubicadas en las chimeneas ( $C_1$ ) y ( $C_2$ ). El estimador  $Z^*$  de la ley  $Z$ , puede expresarse en este caso, como

$$Z^* = \frac{\text{Suma leyes en } (G_1 \text{ y } G_2) + \text{Suma leyes en } (C_1 \text{ y } C_2)}{2 n_1 + 2 n_2}$$

Siendo  $N = 2 n_1 + 2 n_2$

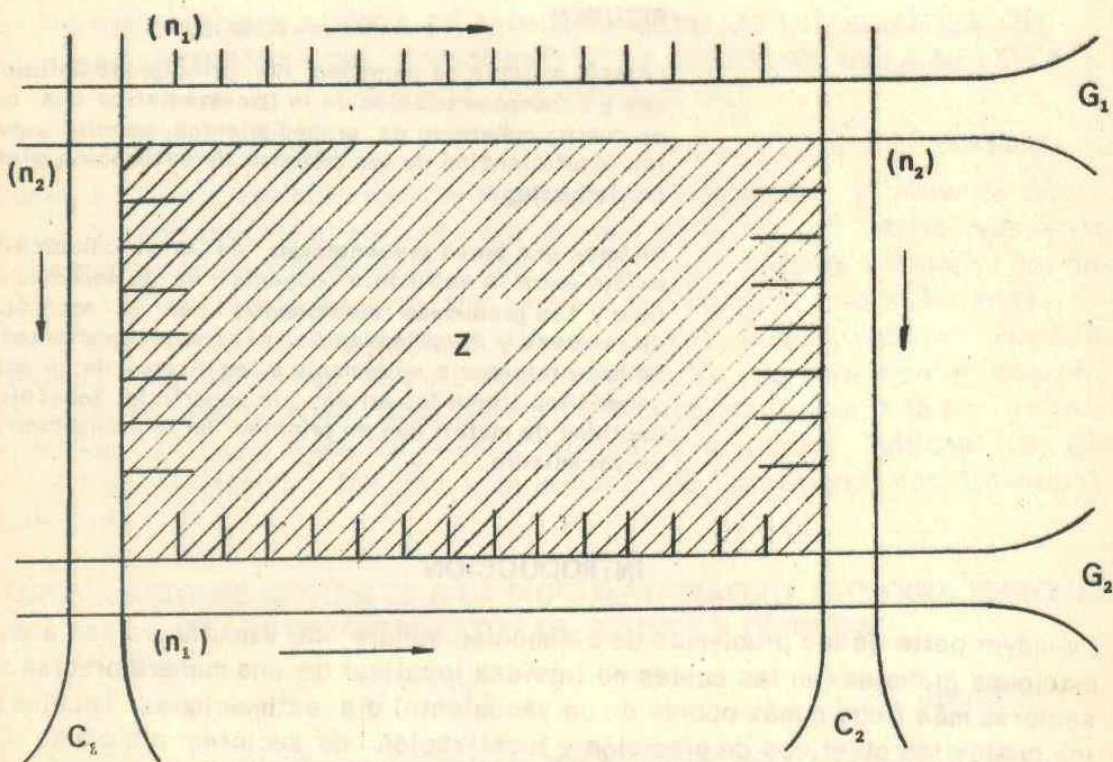


FIGURA 1

$$Z^* = \frac{\text{Suma leyes en } (G_1 \text{ y } G_2)}{N} + \frac{\text{Suma leyes en } (C_1 \text{ y } C_2)}{N}$$

Como la ley media de las galerías  $\overline{L G}$  es =  $\frac{\text{suma leyes en } (G_1 \text{ y } G_2)}{2 n_1}$

e igualmente

La ley media de las chimeneas  $\overline{L C}$  es =  $\frac{\text{suma leyes en } (C_1 \text{ y } C_2)}{2 n_2}$

podemos finalmente establecer  $Z^* = \frac{2 n_1}{N} \overline{L G} + \frac{2 n_2}{N} \overline{L C}$

En el caso de considerar galerías y chimeneas de 120 mt. y 60 metros respectivamente muestreadas cada metro se obtiene

$$Z^* = 0.67 \overline{L G} + 0.33 \overline{L C}$$

La aplicación de este criterio convencional nos proporciona entonces un estimador

$$Z^* = \lambda_G \overline{L G} + \lambda_C \overline{L C}$$

en función de  $\overline{L G}$  y  $\overline{L C}$  que utilizará los ponderadores calculados mientras se trate de un bloque de 120 x 60 m. muestreado cada metro. Como se ve en éste caso, en las operaciones convencionales tienen mayor importancia las labores que disponen de un mayor número de muestras y así, bajo éste criterio, siempre se tendrá:

$$\text{criterio convencional} \left\{ \begin{array}{l} \lambda_G (\text{galerías}) > \lambda_C (\text{chimeneas}) \\ Z^* = \lambda_G \overline{L G} + \lambda_C \overline{L C} \\ \lambda_G + \lambda_C = 1 \end{array} \right.$$

Sin embargo analizaremos los siguientes casos: (ver figura 2)

En el caso (a) figura 2 es indudable que las chimeneas son mucho más representativas que las galerías respecto del mineral al interior del bloque. En este caso se debería cumplir

$$\lambda_G + \lambda_C = 1 \text{ pero } \lambda_C \text{ chimeneas} > \lambda_G \text{ galerías}$$

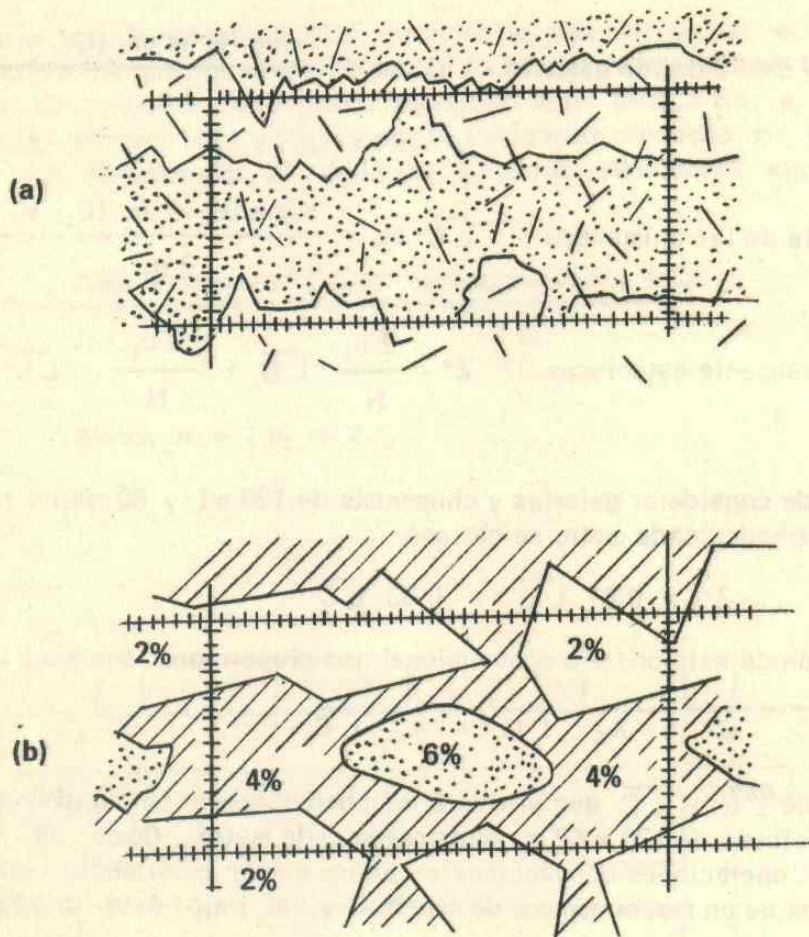


FIGURA 2

En el caso (b) figura 2 resulta evidente que la estructura espacial (aureolas que indican un enriquecimiento progresivo) orienta a multiplicar el promedio de chimeneas por un ponderador  $\lambda_C > 1$ , de tal modo que  $\lambda_G < 0$ , y otra vez  $\lambda_C \text{ chimeneas} > \lambda_G \text{ galerías}$ . Vemos en ambos casos una contradicción con el estimador convencional establecido en base al promedio estadístico. ¿Cuál es la razón por la cual los estimadores convencionales no satisfacen cualquier estimación? La razón está en que **todos** los estimadores convencionales consideran a la variable estudiada, en este caso ley en metal, como una **variable aleatoria sin correlación espacial**, es decir, como una variable cuyos valores en el espacio son entre sí independientes (algo así como los valores obtenidos al tirar un dado cierto número de veces). Estos métodos ignoran una característica importante de las variables que se desplazan en el espacio (**variables regionalizadas**) como es su carácter estructural, **su estructura espacial**. (Figura 3).

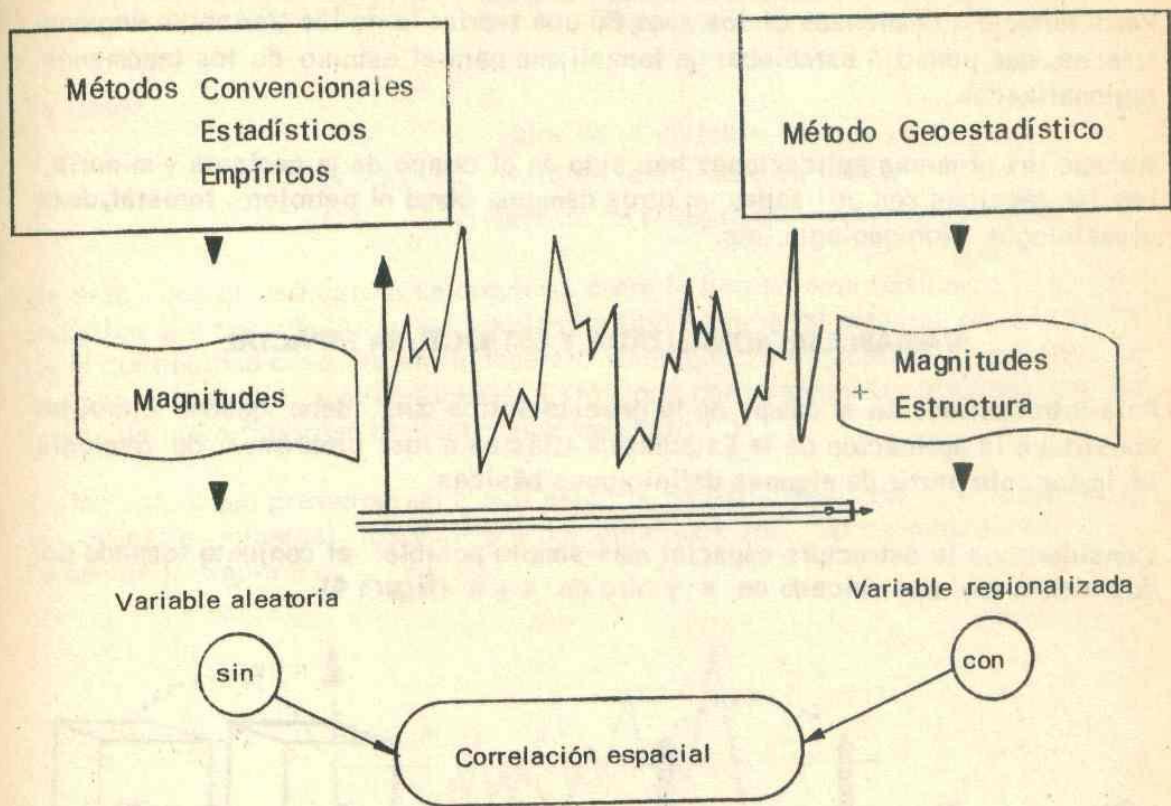


FIGURA 3a.

De ahí entonces que la influencia o peso de las labores no depende tan solo del número de muestras sino principalmente de una realidad que no se puede ignorar: la estructura espacial del fenómeno que se estudia (figura 3 b).

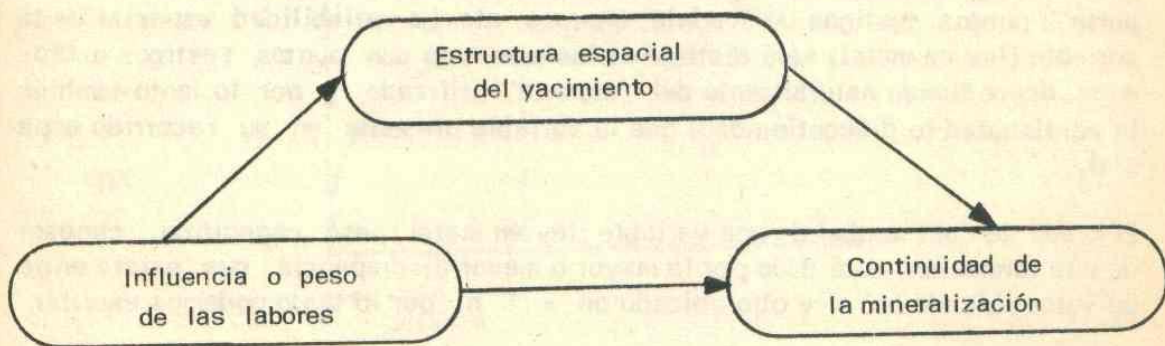


FIGURA 3b.

Con el propósito de establecer una metodología que superara la insuficiencia de los métodos convencionales, el profesor G. Matheron de la Escuela de Minas de París formuló a comienzos de los años 60 una teoría: la de las Variables Regionalizadas, que permitió establecer un formalismo para el estudio de los fenómenos regionalizados.

Aunque las primeras aplicaciones han sido en el campo de la geología y minería, hoy las técnicas son utilizadas en otros campos, como el petrolero, forestal, de la climatología, hidrogeología, etc.

### VARIABLE REGIONALIZADA Y ESTRUCTURA ESPACIAL

Para introducirnos en el campo de la geoestadística que, debe quedar claro, no constituye la aplicación de la Estadística Clásica a los problemas de geología, es importante partir de algunas definiciones básicas:

Consideremos la estructura espacial más simple posible: el conjunto formado por dos elementos, uno ubicado en  $x$  y otro en  $x + h$  (figura 4).

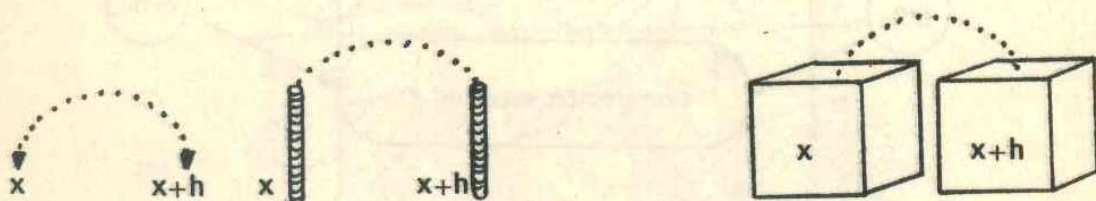


FIGURA 4

En primer lugar debemos notar que cada variable tiene un tamaño definido, un "soporte": puntos, testigos de sondaje, bloques, etc. La variabilidad espacial de la variable (ley en metal) será distinta si las muestras son puntos, testigos o bloques, dependiendo naturalmente del "soporte" utilizado y por lo tanto también la **continuidad** (o discontinuidad) que la variable presenta en su recorrido espacial.

El grado de continuidad de una variable (ley en metal, peso específico, espesor de una formación) está dado por la mayor o menor discrepancia que existe entre un valor ubicado en  $x$  y otro ubicado en  $x + h$ , por lo tanto podemos escribir

Continuidad  $\rightarrow$  función de  $|I(x) - I(x+h)|$  y más concretamente la geoestadística ha establecido una función denominada **Variograma**:

$$2 \gamma(h) = \frac{\sum |I(x) - I(x+h)|^2}{NP}$$

en donde

- $I(x)$  = valor de la variable en  $x$
- $I(x+h)$  = valor de la variable en  $x+h$
- $NP$  = número de parejas de valores considerados

De este modo el variograma se comporta como la herramienta básica de la geostatística que constituyendo una función de tipo estructural permite rendir cuenta de la continuidad presente en la mineralización que se estudia. En la práctica se usa generalmente el **semivariograma**,  $\gamma(h)$ , que constituye más precisamente un índice de la variabilidad presente en el depósito.

En los casos que presentan un cierto carácter de estacionaridad (la mayoría de los depósitos mineros), los variogramas obtenidos son aproximadamente como lo señala la figura 5a.

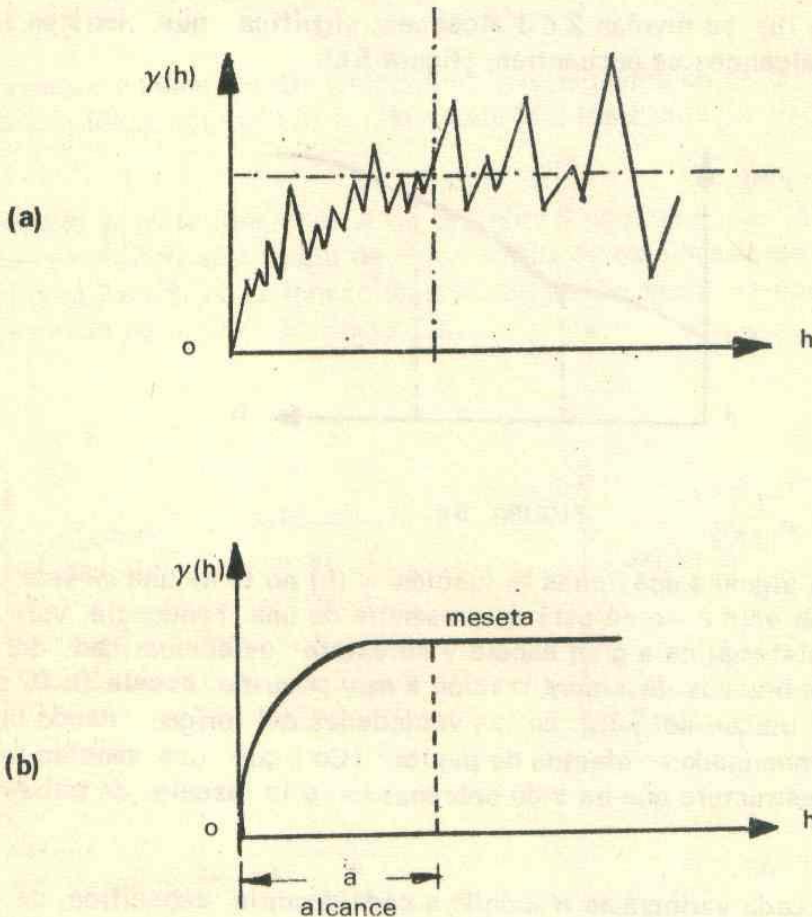
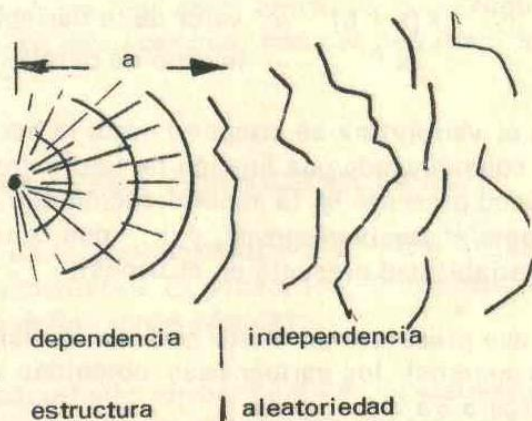


FIGURA 5

La función  $\gamma(h)$  aumenta a medida que  $h$  aumenta hasta alcanzar un valor máximo, denominado **meseta**; la distancia a la cual se produce la meseta se llama **alcance** y nos proporciona una medida promedio de la zona de influencia de la mineralización en estudio, (figura 5 b).



Si en la función  $\gamma(h)$  se revelan 2 ó 3 alcances, significa que existen tantas estructuras como alcances se encuentran, (figura 5 c).

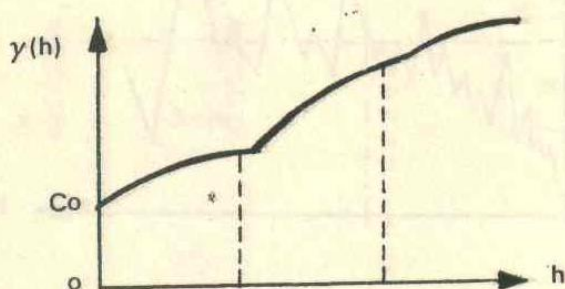


FIGURA 5 c.

Por el contrario, en algunas ocasiones la función  $\gamma(h)$  no tiene una meseta, crece indefinidamente: en este caso se está en presencia de una tendencia, vale decir de una variación sistemática a gran escala y no existe estacionaridad del fenómeno. Los cambios bruscos de mineralización a muy pequeña escala ( $h \rightarrow 0$ ) se reflejan por un salto brusco de  $\gamma(h)$  en las vecindades del origen, dando lugar a los fenómenos denominados "efectos de pepita" ( $C_0$ ) que nos señalan la existencia de una subestructura que ha sido **sobrepasada** a la escala de trabajo (figura 5 c).

Por supuesto que cada variograma responde a cada dominio específico de variación, a cada "campo geométrico" de estudio: La definición de los diferentes "campos" de una variable permite diferenciar claramente su estructura espacial y por lo tanto los rasgos más sobresalientes de la mineralización en cada uno de ellos.



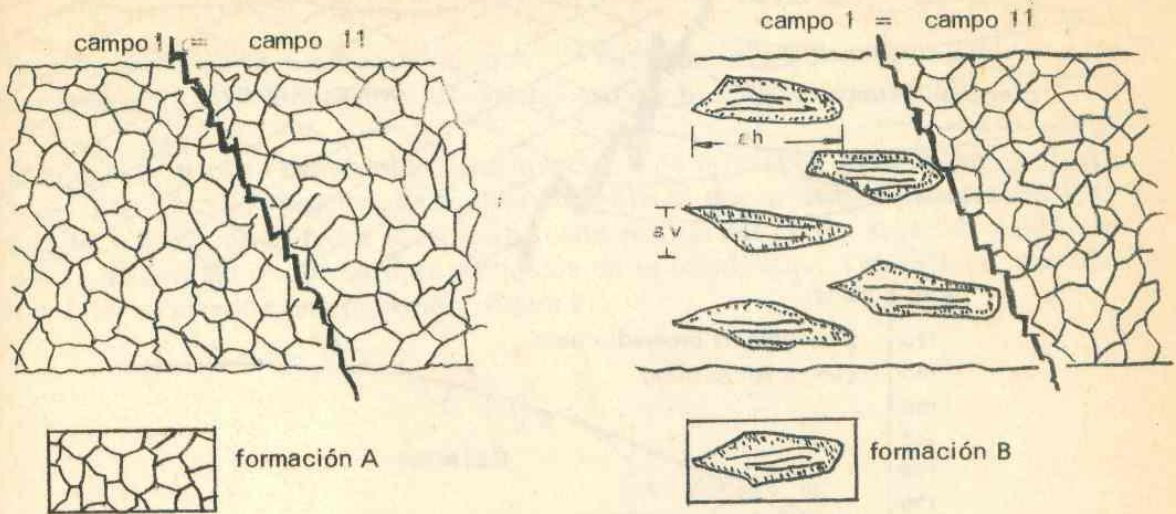


FIGURA 6

Naturalmente pueden existir direcciones privilegiadas en el depósito que hay necesidad de identificar con el fin de establecer los casos de Isotropía o Anisotropía.

Por ejemplo si en la formación A de la figura 6 se determinan los variogramas horizontal y vertical, el aspecto de estos serían aproximadamente como se muestra en la figura 7A. Si en la formación B se hiciera lo mismo se obtendría seguramente un aspecto como el de la figura 7B.

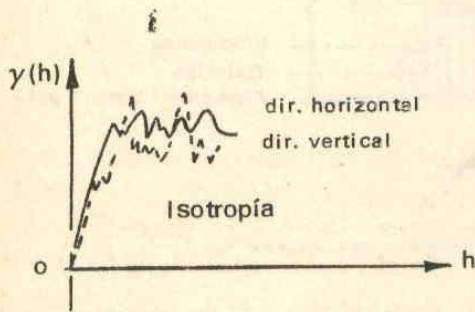


FIGURA 7A

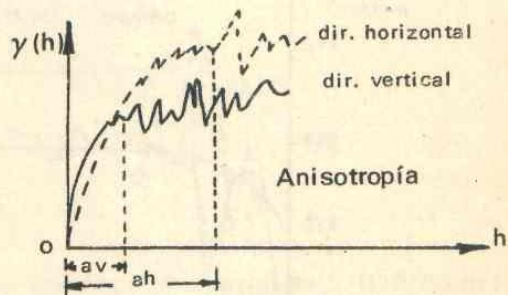


FIGURA 7B

Por ejemplo, en el caso de una veta del mineral de plata de Uchucchacua se obtuvieron los siguientes variogramas, que sirvieron para una definición de los campos de estudio: figura 8.

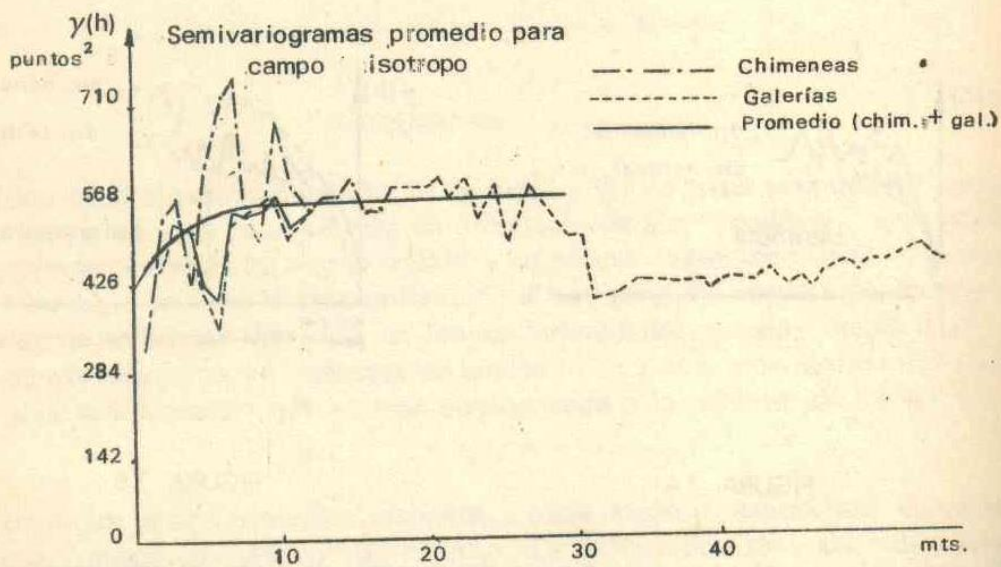
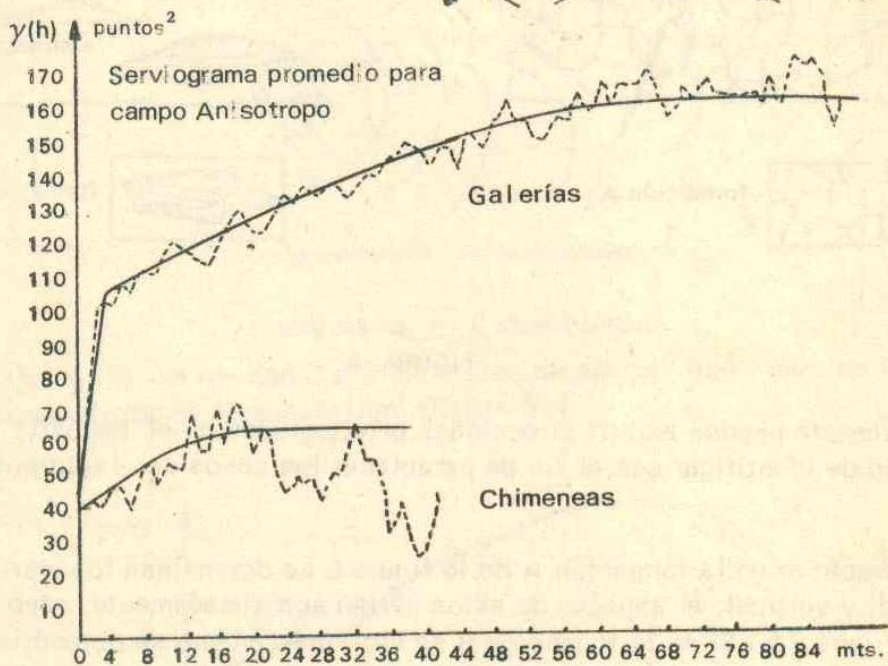
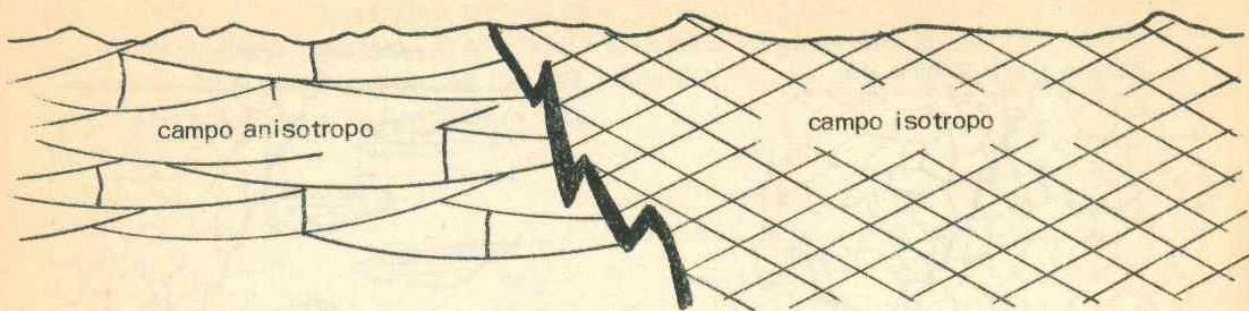


FIGURA 8

## ERRORES DE ESTIMACION Y FLUCTUACION DE VARIABLES

En todo problema de estimación se trata de encontrar el **valor estimado** de un **valor verdadero**: La diferencia entre los dos constituye el error de estimación.

En algunos métodos convencionales (inverso de la distancia al cuadrado, polígonos...) no se puede determinar el error cometido ni por lo tanto la precisión de la estimación. En los métodos estadísticos una medida del error cometido está dada por la **dispersión** de los valores recogidos en la información (muestreo) respecto del valor estimado como promedio, figura 9.

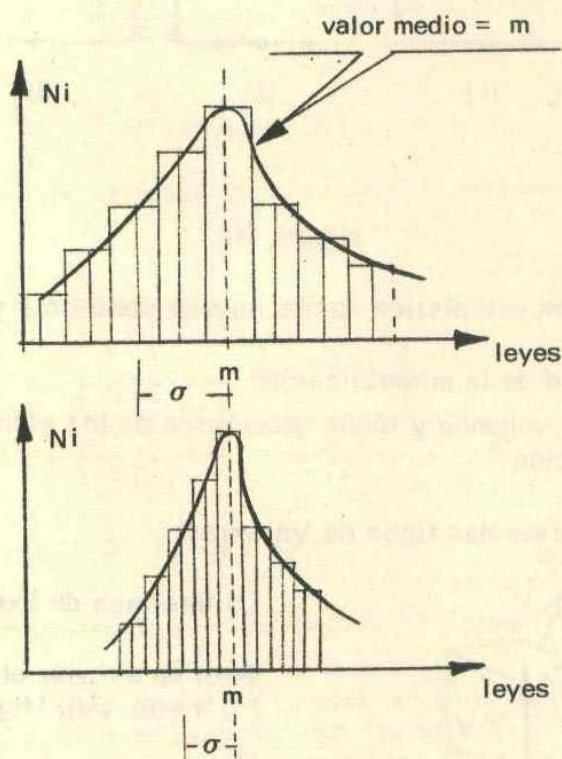


FIGURA 9

La dispersión de los valores está dada a su vez, por la **varianza**, que tiene por expresión.

$$\sigma^2 = \frac{\sum |l(x) - m|^2}{N}$$

en donde

$l(x)$  = valores obtenidos en el muestreo

$m$  = ley promedio calculada

$N$  = número total de muestras

Vemos en la expresión anterior que la varianza estadística es función del número de muestras.

Pero es de toda evidencia que en el error cometido no sólo influye el número de muestras sino también, el volumen de los elementos y sobre todo la ubicación de éstos. En el caso de la figura 10 las configuraciones 1 y 2 nos brindará mucho más confianza que la configuración 3.

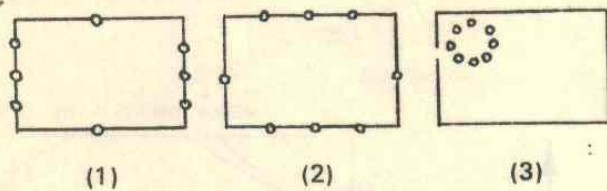


FIGURA 10

En esta materia, la geoestadística aporta nuevos conceptos ya que introduce:

- la continuidad de la mineralización
- la ubicación, volumen y forma geométrica de los elementos que influyen en la estimación.

La Geoestadística define dos tipos de Varianzas:

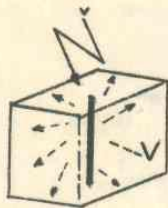


FIGURA 11

**La Varianza de Extensión o Estimación:**

Error de asignar el valor de un volumen (v) a otro (V), (figura 11).

$$\sigma^2, \text{ estimac} = 2 \bar{y} (vV) - \bar{y} (vv) - \bar{y} (VV)$$

En base al estudio de Varianzas de Estimación se permite el

ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS DE RECONOCIMIENTO Y ESTIMACION {

- continuidad de la mineralización
- geometría del estimador y estimante
- distancias entre estimador y estimante

a precisión fija, optimizar la malla de reconocimiento

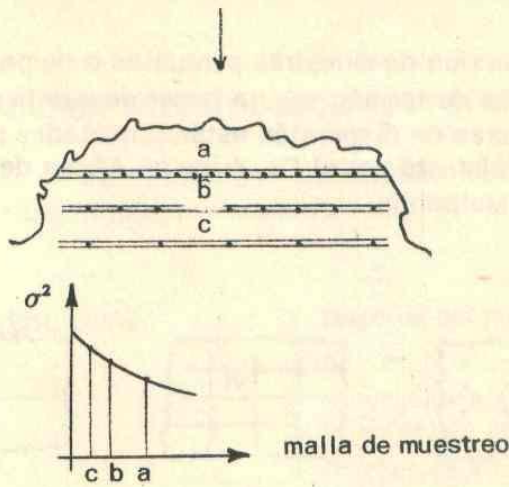


FIGURA 12-1

a malla fija, optimizar la precisión de la estimación

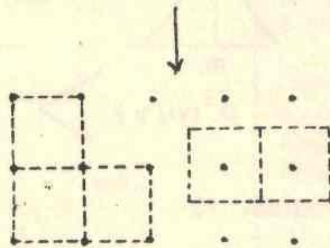


FIGURA 12-2

a presupuesto fijo, optimizar la malla y precisión

determinación de las distancias  $h$  (entre galerías) y  $b$  (entre muestras) con varianza de estimación mínima, a presupuesto fijo.

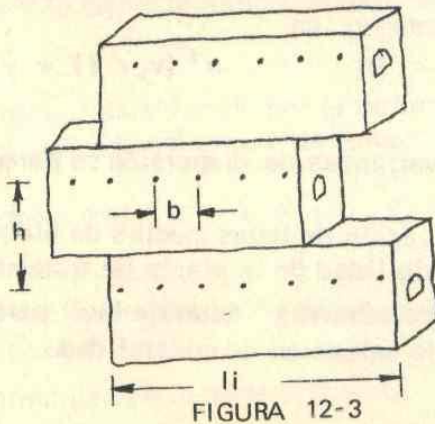


FIGURA 12-3

La **Varianza de Dispersión** que mide las fluctuaciones de leyes puntuales o leyes medias  $v_i$  en un volumen  $Y$ .

Es natural que la dispersión de muestras puntuales o de pequeño soporte sea mayor de la de los bloques de tamaño  $v_i$ , a pesar de que la media del recurso sea la misma. Estas varianzas de dispersión están vinculadas por la relación de Krigé, encontrada experimentalmente por el Dr. Krigé en Africa del Sur y formalizada posteriormente por G. Matheron.

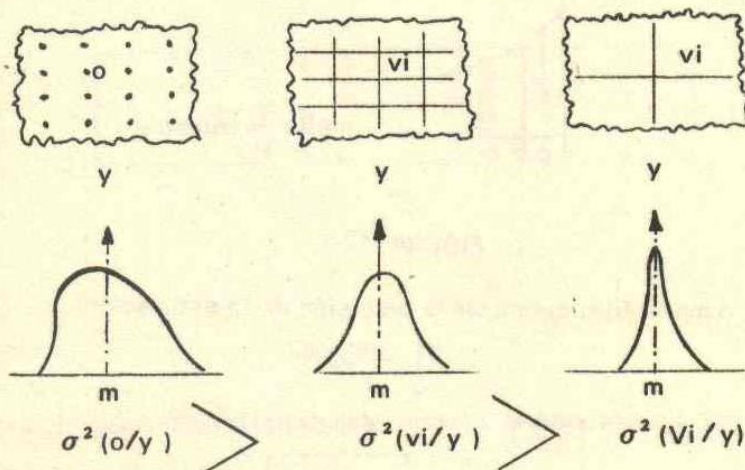


FIGURA 13

$$D^2(o/Y) = D^2(o/v_i) + D^2(v_i/Y)$$

"La varianza de dispersión de las muestras en el yacimiento es igual a la varianza de dispersión de las muestras en el bloque + la varianza de dispersión de los bloques en el yacimiento."

El formalismo geoestadístico aporta también las nuevas relaciones.

Dispersión de muestras puntuales:  $\sigma^2(o/Y) = \bar{\gamma}(Y^2)$

Dispersión de muestras  $v_i$  en

un volumen  $V$  ( $N v_i = V$ )

$$\sigma^2(v_i/Y) = \bar{\gamma}(Y^2) - \bar{\gamma}(v_i^2)$$

Mediante un estudio de las varianzas de dispersión se permite

- determinar la fluctuación de leyes medias de bloques de tamaño de dado (condiciona la flexibilidad de la planta de tratamiento, por ejemplo).
- construir la curva de reservas "tonelaje-ley" para bloques de diferentes tamaños, a nivel de selección de mineral dado.

- juzgar la rentabilidad del yacimiento y decidir sobre el tipo de selección a operar.

### LA ESTIMACION LOCAL DE RECURSOS "in situ"

Si retomamos el problema de establecer una estimación local de los recursos "in situ", podemos resumir las siguientes consideraciones:

#### ESTIMADOR CONVENCIONAL

$$Z^* = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$

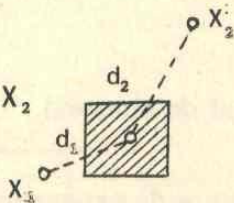
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

- Depende del número de muestras  $n_1$  y  $n_2$
- No considera ubicación de muestras (disposición de muestreo)
- No considera forma ni volumen del bloque.

#### ESTIMADOR EMPIRICO

$$Z^* = \frac{(1/d_1)^2 X_1 + (1/d_2)^2 X_2}{(1/d_1)^2 + (1/d_2)^2}$$

$$Z^* = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$$



- No considera forma ni volumen del bloque.
- Considera ubicación de muestras pero postula "a priori" que la influencia de cada muestra es proporcional al cuadrado del inverso de la distancia, al centro del bloque (?).
- No proporciona la precisión de la estimación.

La Geoestadística proporciona también un procedimiento de estimación local denominado **Krigeage**. Krige fue el primero en interesarse en las correlaciones espaciales existentes en los depósitos mineros. Sus estimaciones que estuvieron basadas en los yacimientos de oro de Sud Africa, condujeron a una serie de resultados que el formalismo de la Geoestadística, elaborado por G. Matheron, los reencuentró posteriormente.

El procedimiento de Krigeage establecido por el profesor Matheron puede resumirse, para el caso de la figura 14, del siguiente modo:

- Busca un estimador lineal  $Z^* = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4$  en el cual  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1$
- Condiciona el sistema de estimación de modo que la Varianza sea mínima (Varianza de Krigeage).
- Introduce la continuidad de la mineralización.

En este caso el sistema para determinar  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  y  $\lambda_4$  se escribe:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \bar{y}_{11} + \lambda_2 \bar{y}_{12} + \lambda_3 \bar{y}_{13} + \lambda_4 \bar{y}_{14} &= \bar{y}_{1z} - \mu \\ \lambda_1 \bar{y}_{21} + \lambda_2 \bar{y}_{22} + \lambda_3 \bar{y}_{23} + \lambda_4 \bar{y}_{24} &= \bar{y}_{2z} - \mu \\ \lambda_1 \bar{y}_{31} + \lambda_2 \bar{y}_{32} + \lambda_3 \bar{y}_{33} + \lambda_4 \bar{y}_{34} &= \bar{y}_{3z} - \mu \\ \lambda_1 \bar{y}_{41} + \lambda_2 \bar{y}_{42} + \lambda_3 \bar{y}_{43} + \lambda_4 \bar{y}_{44} &= \bar{y}_{4z} - \mu \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 1 \end{aligned}$$

$$\sigma_K^2 = \bar{y}_{1z} + \bar{y}_{2z} + \bar{y}_{3z} + \bar{y}_{4z} = \bar{y}_{zz} + \mu$$

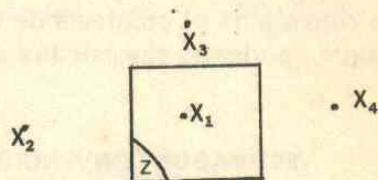


FIGURA 14

y en el cual  $\bar{y}$  (MN) constituye el valor medio de la función  $y$  cuando un punto (x) se mueve en el elemento M y otro (x+h) lo hace en el elemento N.

A nivel puntual se demuestra que el Kriging es un interpolador lineal exacto.

El Kriging permite:

- la estimación local de recursos (a nivel de bloques).
- la cartografía automática
- comparar alternativas de reconocimiento y de estimación.
- detectar las zonas cuya estimación es menos confiable.
- categorizar reservas de acuerdo a la precisión obtenida.
- evaluar bloques "a distancia", considerando la continuidad de la mineralización. (figura 15).

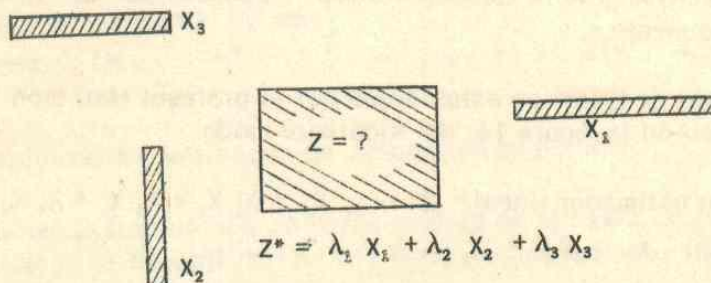


FIGURA 15



## ESTIMACIONES GLOBALES DE CARACTER GEOMETRICO

La importancia de la malla ( $a_1, a_2, a_3$ ) utilizada en el reconocimiento de un depósito no sólo repercute en la ley de los bloques calificados como explotables sino también en los errores probables producidos al estimar la superficie, el tonelaje, la cantidad de metal.

De ahí la importancia de fijar la malla de explotación para el cálculo de reservas.

Como efectivamente se ve en la figura 16 existe un "efecto de bordura" que se traduce en el desconocimiento de las fronteras precisas del depósito y que dá margen a un probable error cometido al estimar la superficie del yacimiento; la determinación de ese probable margen de error se representa en Geoestadística por una **varianza relativa de superficie**  $\sigma^2 s/s^2$  que es función de los contornos proyectados de la superficie estimada,  $D$ ; del número de sondajes positivos,  $n$ ; y de los lados de la malla, en este caso  $a_1$  y  $a_2$ .

$$\frac{\sigma^2 s}{s^2} = f(D, n, a_1, a_2)$$

La determinación de  $\sigma^2 s/s^2$  nos permitirá, al tiempo de proporcionar un estimador de la superficie mineralizada, determinar el margen en que puede variar el error cometido.

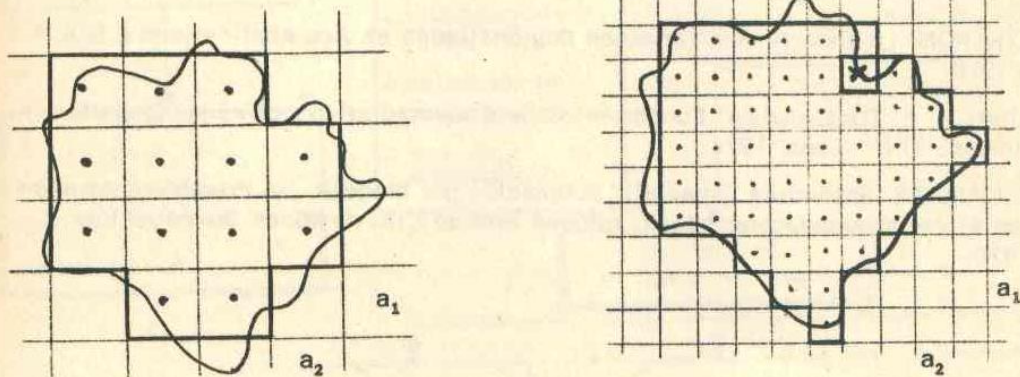


FIGURA 16

De igual modo para el caso tridimensional se puede obtener la **varianza relativa de tonelaje**  $\sigma^2 T/T^2$  y la **varianza relativa de la cantidad de metal**  $\sigma^2 Q/Q^2$ , errores ambos de carácter geométrico, en función de la longitud de los sondajes (número de sondajes), la malla de reconocimiento y las dimensiones principales del cuerpo.

### CONCLUSIONES

El formalismo geoestadístico ha penetrado nuevos campos de la tecnología minera moderna poniendo en operación la simulación condicional de yacimientos y

vinculándose estrechamente a problemas de economía minera como son la optimización y dimensionamiento de explotaciones, el planeamiento de la producción y actualmente en el diseño de canteras. Algunas de éstas relaciones se muestran en la figura 17.

De ahí que podríamos resumir las ventajas de los procedimientos geoestadísticos diciendo que:

- permiten la aplicación de los procedimientos estadísticos-matemáticos condicionándolos a las **características estructurales** del depósito estudiado.
- permiten racionalizar los métodos de estimación minera y evaluación de yacimientos en base a un **conjunto coherente de procedimientos** ligados por una base teórica común: La teoría de las Variables Regionalizadas.
- permite **reencontrar**, en los casos correspondientes, las otras técnicas convencionales de estimación.

(Ver figura 17 en la siguiente página).

#### REFERENCIAS

- (1) G. MATHERON: La Theorie des Variables Regionalisées et ses applications E.N.S.M. París, 1970.
- (2) D. GUIBAL y E. TULCANAZA: Fundamentos de Geoestadística Aplicada, Departamento Minería - UNI - Lima, 1974.
- (3) E. TULCANAZA: Estructura Espacial, Estimación por bloques y Precisión: Aplicación en el yacimiento Uchucchacua, Informe interno Cía. de Minas Buenaventura, Lima, 1975.

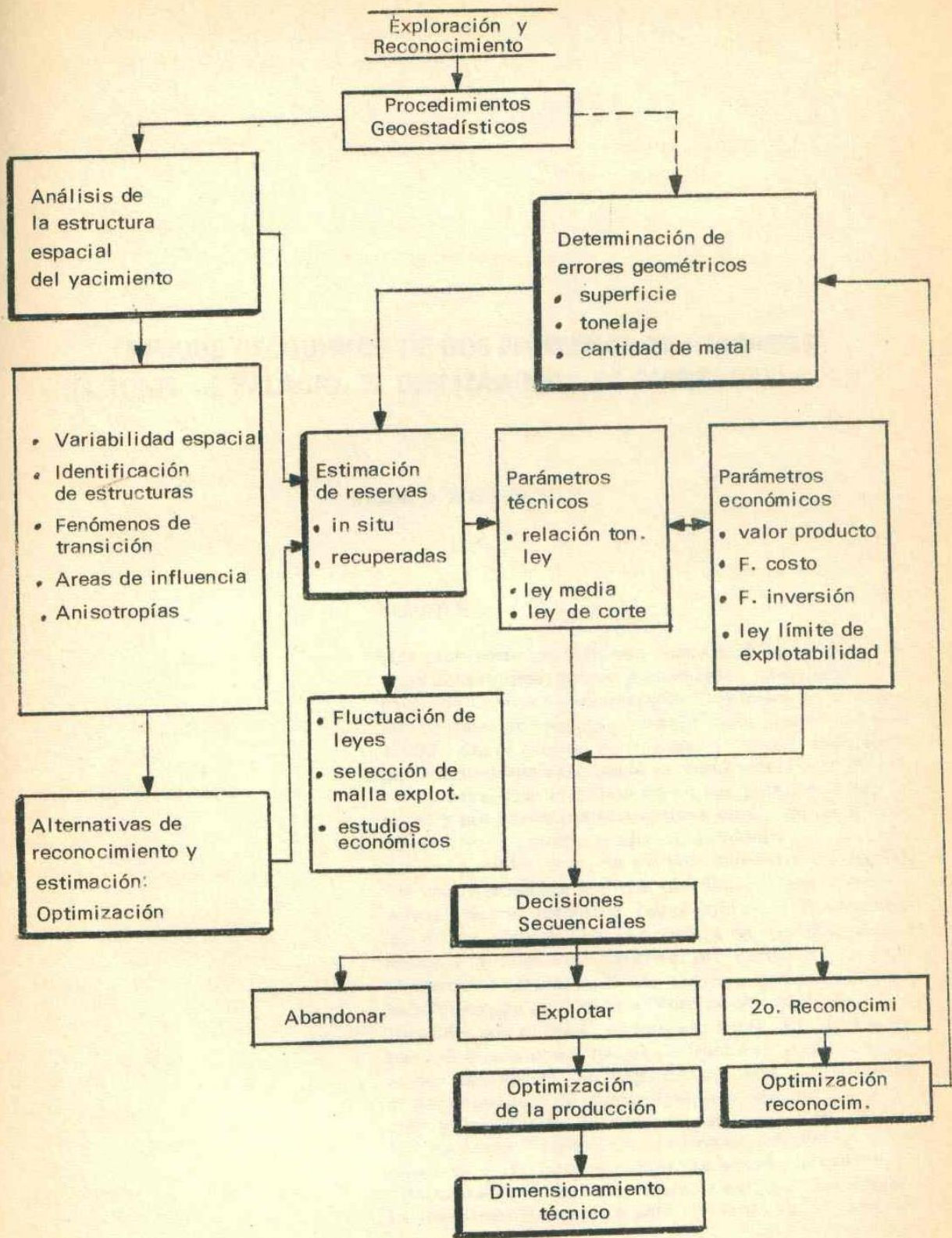


FIGURA 17