

# El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, un enfoque de aprendizaje por problemas

Alexander Bravo Molina<sup>1</sup>

Javier Eugenio Arenas Díaz<sup>2</sup>

Eliécer Pineda Ballesteros<sup>3</sup>

**Resumen:** Este artículo presenta una experiencia sobre el efecto que tiene el software GeoGebra, como complemento del aprendizaje por problemas, en la enseñanza de la geometría. Se usó el enfoque metodológico de la investigación-acción, con grupo control y grupo experimental.

La metodología se enmarcó en la investigación-acción, aplicándose tanto al grupo control como al grupo experimental; la estrategia pedagógica se desarrolló en cinco talleres, cuya base fue el aprendizaje por problemas y el uso de GeoGebra como mecanismo informático en los que se abordaron las habilidades geométricas básicas y superiores para resolver problemas y ejercicios relacionados con círculos, cuadrados, triángulos y rectángulos.

Para la recolección de datos se usaron instrumentos pre y postest, y para su análisis se usó el software Excel. Se concluye que la inclusión del aprendizaje por problemas, mediado por GeoGebra, mejoró el aprendizaje de la geometría, pues los resultados en la formación de las habilidades geométricas básicas y superiores, en el grupo control, estuvieron por debajo del grupo experimental.

**Palabras clave:** aprendizaje asistido por ordenador, aprendizaje por problemas, geometría, habilidades geométricas, competencias matemáticas.

---

<sup>1</sup>Licenciado en Lengua Castellana y Comunicación, Magíster en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación. Profesor Instituto Técnico Isaias Ardila Díaz. Mogotes, Colombia. Correo electrónico: alex840113@hotmail.com

<sup>2</sup>Magíster en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación. Coordinador Docente Instituto Técnico Isaias Ardila Díaz. Mogotes, Colombia. Correo electrónico: javierarenas1@hotmail.com

<sup>3</sup>Ingeniero de Sistemas y Economista. Magíster en Informática. Profesor Universidad de Santander -UDES-CVUDES. Bucaramanga, Colombia. Correo electrónico: eliecer.pineda@cvudes.edu.co

**Forma de citar:** Bravo Molina, A., Arenas Díaz, J.E., Pineda Ballesteros, E. (2019). El aprendizaje de la geometría con GeoGebra, un enfoque de aprendizaje por problemas. *Revista Docencia Universitaria*, 20(2), 55-67

**Recepción:** julio 22 de 2019 – **Aceptación:** noviembre 25 de 2019

# Learning geometry with GeoGebra, a problem-based learning approach

Alexander Bravo Molina<sup>1</sup>  
Javier Eugenio Arenas Díaz<sup>2</sup>  
Eliécer Pineda Ballesteros<sup>3</sup>

**Abstract:** This paper presents an experience on the effect that GeoGebra software has, as a complement to learning by problems, to learn geometry. The methodological approach of action research was used, with control group and experimental group.

The methodology was based on action research and was applied to both the control group and the experimental group. The pedagogical strategy was developed in 5 workshops, based on problem-based learning and the use of GeoGebra as a computer assistant in which basic and advanced geometric skills to solve problems and exercises related to circles, squares, triangles and rectangles were addressed.

Pre- and post-test instruments were used to collect the data, Excel software were used for their analysis. We concluded that the inclusion of problem learning, mediated by GeoGebra, improved learning because the results in the formation of basic and superior geometric skills in the control group were below the experimental group.

**Keywords:** didactic use of computer, problem learning, geometry, geometric skills, mathematical competencies.

---

<sup>1</sup>Licenciado en Lengua Castellana y Comunicación, Magíster en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación. Profesor Instituto Técnico Isaías Ardila Díaz. Mogotes, Colombia. Correo electrónico: alex840113@hotmail.com

<sup>2</sup>Magíster en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación. Coordinador Docente Instituto Técnico Isaías Ardila Díaz. Mogotes, Colombia. Correo electrónico: javierarenas1@hotmail.com

<sup>3</sup>Ingeniero de Sistemas y Economista. Magíster en Informática. Profesor Universidad de Santander -UDES-CVUDES. Bucaramanga, Colombia. Correo electrónico: eliecer.pineda@cvudes.edu.co

## Introducción

La visión clásica del proceso enseñanza-aprendizaje de la matemática, según Godino, Batanero y Font (2003), se define como un intercambio entre el profesor y el alumno. Bajo esta concepción el profesor emisor tiene el rol protagónico, mientras que el alumno asume un rol pasivo dentro de una relación estrictamente controlada por el docente.

En este contexto, donde el rol protagónico lo asume el profesor, no se considera al alumno como un agente activo en el proceso de construcción del conocimiento, por lo que es preciso implementar una estrategia pedagógica acorde con las necesidades educativas de los estudiantes. En este ámbito, el aprendizaje por problemas (PBL, por sus siglas en inglés) y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) surgen como elementos alternativos del proceso de enseñanza-aprendizaje, que pueden llevar a los sistemas educativos a transformar su concepción acerca del proceso enseñanza-aprendizaje dentro del aula.

En los albores del siglo XXI, según afirman Aymerich y Macario (2006), la matemática acoge varios valores formativos: desarrollar el pensamiento del alumno, potenciar su razonamiento y su capacidad de acción simbólica, lograr que cada alumno participe en la construcción de su conocimiento matemático y favorecer la gratificación

por los esfuerzos intelectuales y la satisfacción con el trabajo bien hecho. Por su parte, Lastra (2005) afirma que es innegable la importancia que tiene la geometría en los currículos oficiales fundamentalmente porque su enseñanza puede promover la experimentación directa con las formas de los objetos cotidianos, pero de seguir en los modelos centrados en el profesor, esto no es factible.

## Las competencias y los problemas matemáticos

Específicamente en el ámbito de la educación matemática, las competencias que debe desarrollar el estudiante han ido asociadas a la noción de conocimiento. Para Díaz (2002) conocer y saber implica el uso competente de los objetos constituyentes del conocimiento, la capacidad de relacionar entre sí dichos objetos, es decir, comprender, y de aplicarlos a la solución de problemas. En esta misma lógica, se señala por Sanhueza, Friz, Samuel y Villegas (2011) que en la medida en que los estudiantes desarrollan capacidades, mediante el dominio de estructuras cognitivas y el uso experto de distintas estrategias, estos van incrementando paulatinamente sus competencias en matemáticas.

Para Lupiáñez y Rico (2008) la competencia matemática permite describir los modos en los que los escolares actúan cuando hacen matemáticas y cuando se enfrentan a problemas, mientras que en Watanabe

y McGaw (2004), la competencia matemática se define como la capacidad de los estudiantes para reconocer, comprender y participar en las matemáticas, y opinar con fundamento sobre el papel que desempeñan las matemáticas en la vida diaria. La articulación entre visualización y discurso geométrico, que según Raymond (2016) es allí donde se sitúan los retos educativos de la geometría y los retos científicos, puesto que conciernen a las maneras matemáticas de probar.

Lo dicho previamente indica que para el abordaje de los problemas geométricos se debe asumir posibilidades de aprendizaje que promueven un desarrollo más completo que el que se deriva del sistema tradicional de enseñanza. Por tanto, se requiere de una propuesta pedagógica que se ocupe de un aprendizaje más cercano a los estándares y competencias señaladas por las autoridades educativas de Colombia, que durante los últimos años han promovido la transición desde un modelo centrado en el docente, hacia uno centrado en el alumno (CONPES, 2014).

### **Uso de tecnologías de la información en matemáticas**

En palabras de Grisales, Arredondo y Mamián (2011) las TIC han cambiado el mundo de las matemáticas y el de las ciencias, ya que no solo han afectado las preocupaciones propias del campo de estas y las formas como se perciben, sino también, el modo en que las

ciencias y las matemáticas se hacen, se enseñan, se construyen, se profundizan, se aprenden y se transmiten como legado cultural de la humanidad; por tanto, en este contexto, el uso de software para aprender matemáticas debe ser un elemento importante en el ámbito educativo.

Siguiendo la lógica de lo previamente expresado, las salas de informática y los laboratorios tecnológicos proveen la posibilidad de cumplir con diversas finalidades exigidas por la comunidad educativa. Para los maestros, atendiendo a lo expresado por Grisales, Arredondo y Mamián (2011), estos son espacios de estudio, búsqueda, indagación, socialización, sistematización y experimentación de situaciones, tendientes a mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; y para los estudiantes se constituyen en un espacio de búsqueda, indagación y experimentación de las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías y les permite potenciar su propio aprendizaje.

No obstante, hay preguntas que son críticas, sobre el entendido de que el uso de TIC en educación promueve la comunicación, la interacción entre estudiantes, entre estudiantes y profesor, elementos necesarios para construir significado; por ejemplo:

¿Cómo afecta el uso de las TIC al aprendizaje? ¿Qué experimentan los estudiantes cuando trabajan con TIC que les permite construir significado del objeto o relación que está en juego?

Parte de esas preguntas se resuelven con base a la revisión de resultados de investigaciones, acerca de por qué el uso de TIC es importante para el aprendizaje.

### Metodología

Dada la importancia que tiene la geometría para el desarrollo del pensamiento (Fernández, 2018), se propuso implementar el aprendizaje por problemas (PBL). Este permite construir el conocimiento sobre la base de problemas de la vida real (Font, 2004), y operacionalizado con el software GeoGebra puede favorecer el desarrollo de la comprensión de la geometría por parte de los estudiantes.

### Tipo de investigación

Se optó por una investigación de tipo mixta en el marco de una metodología de investigación-acción, en la medida en que de forma simultánea se trataban conocimientos y cambios sociales en el curso de geometría, procurando la sincronía entre teoría y la práctica. Ver figura 1.

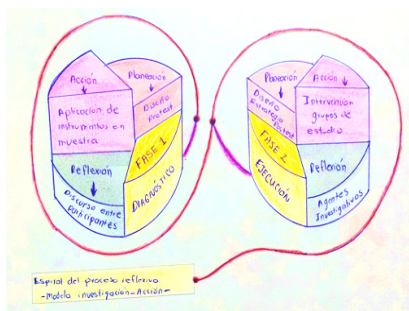


Figura 1. Modelo espiral investigación acción. Fuente: elaboración propia.

### Variables e hipótesis

Se define como variable independiente el aprendizaje basado en problemas asistido por GeoGebra. Para evaluar el nivel de aceptación, frente a la estrategia, se aplicó una encuesta de satisfacción al grupo experimental. El instrumento seleccionado centró su esfuerzo en cuantificar el nivel de satisfacción en cuatro indicadores a saber: los contenidos, la metodología, el uso de la infraestructura y el nivel de desempeño alcanzado por cada estudiante.

Como variable dependiente se estableció la apropiación de conceptos geométricos; para obtener la información, se diseñó un pretest y un postest, a partir de la operacionalización de la variable dependiente, que tenía la finalidad de evaluar el impacto de la estrategia pedagógica. Para ello, se centró la obtención de información en dos dimensiones: las habilidades geométricas básicas y las superiores.

Tabla 1. Resumen de variables

Dimensión	Indicador	Instrumento
Habilidades geométricas básicas	Identifica conceptos básicos: Radio, diámetro, vértice, arista, caras, perímetro, área, volumen, medición y clasificación ángulos.	Pretest y Postest
Habilidades geométricas superiores	Identifica la información y variables asociadas a un problema. Transfiere la información a una representación gráfica. Justifica la forma y el método usado para llegar a la conclusión obtenida con el proceso interpretativo. Usa y desarrolla modelos virtuales geométricos para realizar cálculos matemáticos.	Pretest y Postest

Fuente: Los autores

Se planteó la siguiente hipótesis: el aprendizaje por problemas, mediado con GeoGebra, promueve la apropiación de conceptos geométricos en los alumnos de octavo grado.

Con respecto al uso de GeoGebra, en Rubio, Prieto y Ortiz (2016) se afirma que es posible construir simuladores que tengan consistencia con el fenómeno físico representado. Por su parte, Bulla, López, Jiménez y Morera (2018) afirman que el uso de GeoGebra permite establecer relaciones entre los sistemas de representación gráfico y algebraico, para generar una mejor comprensión de los conceptos matemáticos; mientras que Fernández, Gamboa, Rodríguez y Díaz (2016) señalan que GeoGebra permite transformar el proceso didáctico de la Geometría, entre otros usos posibles.

### Población

Para la ejecución de la estrategia se seleccionaron dos grupos del grado octavo. Octavo tres (8-3) con 28 alumnos, grupo control y octavo uno (8-1) con 31 estudiantes, el grupo experimental. Al grupo experimental se sometió a la aplicación de la estrategia PBL con GeoGebra, en tanto que con el grupo control se trabajó solo con la estrategia PBL sin GeoGebra. En este caso el investigador era a la vez el profesor de los dos cursos en cuestión.

### Concepción del ambiente de formación

El ambiente de aprendizaje para la

implementación del proyecto partió del marco de la pedagogía del PBL y el uso del software GeoGebra. El PBL es un enfoque de aprendizaje activo, centrado en el estudiante, en donde un grupo de estudiantes aprende resolviendo problemas reales, constituyéndose en el aspecto didáctico, para lograr el desarrollo de las habilidades geométricas básicas y superiores (ver tabla 1) en la comprensión de la geometría.

El diseño de la estrategia de intervención constó de cuatro momentos: presentación del problema, establecimiento de las necesidades de aprendizaje, aprendizaje de la información y resolución del problema. En el aspecto tecnológico se incluyó el uso de GeoGebra, el cual permitió la materialización de dos de los cuatro momentos del PBL. Ver tabla 2.

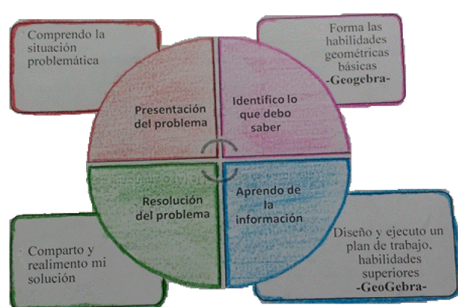
**Tabla 2.**  
*Secuencia didáctica y tecnológica en ambiente de aprendizaje*

Momento	Procesos	Objetivo Aprendizaje
Presentación del problema	Presentación problema. Lluvia de ideas. Contraste conocido desconocido.	Habilidades geométricas básicas
Necesidades de aprendizaje	Qué sé. Qué necesito saber. Formulación de hipótesis resolutivas.	
Aprendizaje de la información	Aplicación de conceptos. Modelación. Verificación respuestas ecuaciones. Verificación de cálculos.	Habilidades geométricas superiores
Resolución y evaluación de aprendizaje	Socialización. Coevaluación. Autoevaluación.	

Fuente: Los autores

## Propuesta pedagógica

La propuesta pedagógica, materializada en el ambiente de aprendizaje, se integra de cuatro elementos teóricos, en la cual se reacomodaron estos momentos, según lo establece Morales y Landa (2004), ello se puede evidenciar en la figura 2.



*Figura 2.*  
Momentos PBL mediado por GeoGebra.  
Fuente: elaboración propia.

La presentación del problema incluye el análisis de la situación en la que aparece el problema. En la identificación de las necesidades de aprendizaje, los alumnos deben ser capaces de crear una lista de los conocimientos que tienen y los que requieren para el desarrollo del problema. En aprendizaje de la información, los alumnos, asistidos por el docente realizan una asignación de tareas y en la resolución del problema, los estudiantes seguían tres momentos: socialización de resultados, autoevaluación y coevaluación del proceso.

## Procedimiento

De acuerdo con la estructura de la investigación acción, el proyecto se desarrolló en dos fases que están integradas por diferentes etapas y procesos. La fase 1 tuvo como fin realizar el estudio de la situación inicial para realizar comparaciones entre el pretest y el postest. Para ello en la planeación se estableció la estructura del pretest y para tal fin la variable se subdividió en las dimensiones habilidades geométricas básicas (ejercicios) y superiores (problemas). Igualmente, en esta etapa se decidió usar una escala de valoración de 10 a 50 para cada pregunta y por alumno. A partir de estos valores, se calculó el promedio por indicador y dimensión a nivel individual, grupal y comparativo entre grupos.

La aplicación de este instrumento fue realizada en los dos grupos, experimental y control. Esta se aplicó al 100 % de los alumnos dentro de su aula de clase y de forma individual, el mismo día.

En la última etapa se siguieron dos momentos. En el primero se realizó una valoración del instrumento aplicado siguiendo el proceso de valoración descrito en la etapa de planeación. En el segundo momento se llevó a cabo la aplicación de la estrategia pedagógica, para luego proceder a diseñar y ejecutar instrumentos, además de la encuesta de satisfacción para el grupo control y el experimental.

Los talleres se desarrollaron en el aula de cada salón. Al grupo experimental se

les asignó un equipo de cómputo por alumno, para el trabajo en el aula. Ver figura 3.



*Figura 3*  
Estudiantes del grupo experimental.  
Fuente: elaboración propia.

De igual forma se procedió con la aplicación del postest.

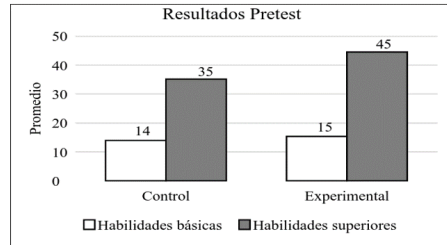
### Análisis de resultados y discusión

De acuerdo con los instrumentos aplicados, el procesamiento de datos se realizó fraccionando la información en dos partes.

Valorado el pretest, en lo relacionado con la dimensión 1 (habilidades geométricas básicas), y considerando una escala de valoración del resultado de prueba de 10 a 50 puntos, los resultados mostraron que el rango máximo de puntuación fue de 20, por lo que se infiere que en los dos grupos existió un vacío en la apropiación de conceptos geométricos, dado que el 100% de los alumnos se ubicó en el desempeño bajo.

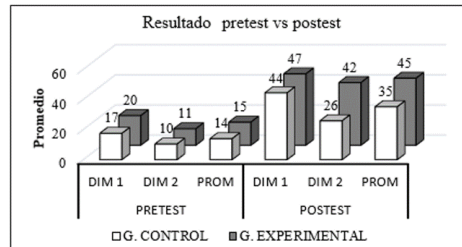
Con respecto de la dimensión 2 (habilidades geométricas superiores), la capacidad de los alumnos para aplicar los conceptos geométricos de las figuras

básicas en la resolución de problemas de la vida cotidiana, se evidenció una tendencia del 100 % de la muestra hacia un desempeño bajo. Ver figura 4.



*Figura 4*  
Datos Pretest, grupo control vs experimental  
Fuente: elaboración propia.

Lo relacionado en la figura 4, muestra una situación problema en cuanto a la formación de diversas competencias (analizar, interpretar, modelar y argumentar) en los estudiantes evaluados.



*Figura 5*  
Datos por grupo según pretest vs postest.  
Fuente: elaboración propia.

Ahora bien, al combinar los resultados de las dos dimensiones, se identificó un patrón de dependencia. Los alumnos que



tienen dificultad para aplicar principios geométricos básicos en la resolución de ejercicios no cuentan con los elementos necesarios para adelantar procesos de resolución de problemas. Al comparar los datos descriptivos del pretest y el postest, figura 5, se observa que a partir de la estrategia pedagógica propuesta y el compromiso realizado por el docente se alcanzó una mejora de los resultados en los grupos de estudio.

El grupo de control, al que se le siguió su proceso tradicional de enseñanza, mostró que, a partir del compromiso y seguimiento del docente, los alumnos mejoraron su desempeño frente al proceso de aplicación de principios geométricos básicos descritos en la dimensión 1. Pasó de estar el 100 % de los alumnos en desempeño bajo a tener el mismo porcentaje en el desempeño alto, lo que evidenció mejora en el proceso de adquisición de estas habilidades geométricas básicas como reconocimiento, análisis y ordenamiento. No obstante, los resultados de la dimensión 2, aunque aumentaron, no evidenciaron una mejora sustancial en el proceso del desarrollo de las habilidades geométricas superiores, como deducción y rigor.

Esto mostró que, aunque el alumno conozca las fórmulas para hacer cálculos geométricos, solamente es capaz de aplicarlas en ejercicios procedimentales, por lo que se dedujo que el alumno no posee las capacidades para identificar cuándo y cómo usar estas fórmulas en la resolución y modelación de problemas asociados a la vida diaria, intención

evaluada a través de la dimensión 2: habilidades geométricas superiores.

Por otro lado, se tiene los resultados del grupo experimental a quienes se les aplicó la estrategia pedagógica basada en el PBL y el uso de GeoGebra como mecanismo de desarrollo de las habilidades geométricas básicas y superiores. Así se tiene que en la primera dimensión los alumnos en un 100 % lograron apropiarse y usar en la resolución de ejercicios los conceptos geométricos básicos. Igualmente se observó que los alumnos que participaron de esta estrategia lograron un éxito del 100 % al aplicar los conceptos básicos en la resolución de problemas geométricos de su contexto. Por ello, se puede asumir que la estrategia promueve y genera mejores espacios de aprendizaje para la apropiación de las habilidades geométricas básicas y superiores.

La media general en el grupo control, fue de 33.3 puntos, mientras en el grupo experimental fue de 44.4 puntos. De acuerdo con la media se evidencia que numéricamente hay una leve diferencia entre los valores de los promedios

### **Prueba de hipótesis**

Se hizo la prueba de medianas de Wilcoxon, a los datos del pretest, del grupo experimental y del grupo control, dado que las dos muestras no se ajustaban a una distribución normal. La aproximación a la normal, teniendo en cuenta que  $n$  es igual a 28, fue de -2,039, por lo que a un nivel de confianza del 99 % no se rechaza la  $H_0$ , hecho que se

evidencia aún más en la tabla 3.

**Tabla 3.**  
*Comparación resultados del pretest.*

Medidas	Grupo de Control	Grupo experimental
Promedio	13,9	15,1
Des Std.	2,95	2,78
Var	8,73	7,73

Fuente: Autores

Posteriormente, con los datos del postest, se realizó la prueba de Chi Cuadrado para comprobar el supuesto de normalidad; dado que el supuesto de normalidad no se cumplió se procedió a realizar la prueba de Wilcoxon para muestras independientes. Como el valor de P de la prueba de Wilcoxon, aproximada mediante la Normal, fue de -4,65, por tanto, se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significancia del 5 %, concluyéndose que el aplicativo informático sí tiene efectos sobre los resultados obtenidos por los alumnos, tanto en las habilidades geométricas básicas como superiores.

**Tabla 4.**  
*Comparación resultados del postest.*

Medidas	Grupo de Control	Grupo experimental
Promedio	33,7	44,40
Des Std.	3,90	4,48
Var	15,24	20,08

Fuente: Autores

De hecho, los alumnos en el grupo experimental lograron aumentar su promedio en 10 puntos más que los alumnos del grupo de control, lo que llevó al grupo experimental a obtener un promedio final de 44.4 puntos sobre 50, ver tabla 4.

En la realización de la prueba de hipótesis de grupo experimental se compararon los datos del pretest y el postest. De forma inicial se realizó una comprobación de validación de datos para luego realizar un análisis estadístico de los datos obtenidos por los alumnos en las dos pruebas.

La media general en este grupo según los resultados del pretest fue de 15,1 puntos, mientras en el postest fue de 44.4 puntos. De acuerdo con la media se entendió que numéricamente hay una diferencia significativa entre los valores de los promedios.

Para la realización del estudio comparativo entre los resultados del pretest y postest del grupo experimental se consideró la hipótesis que sí existe diferencia significativa entre las medias de calificación antes y después de la estrategia pedagógica, con un nivel de significancia del 5%.

Aplicando la prueba de Chi Cuadrado se concluyó que los datos del pretest y postest del grupo experimental no se ajustaban a una distribución normal, dado que P-Valor en el postest es menor que nivel de significancia  $\alpha$ . De acuerdo con el resultado del supuesto de normalidad, se aplicó la prueba Wilcoxon para muestras relacionadas no paramétricas, para detectar si hubo o no cambios significativos. Dado que P-Valor de la prueba resultó menor que alfa, se acepta que existe una diferencia significativa antes y después de la aplicación de la estrategia pedagógica,

permitiendo concluir que el PBL mediado por GeoGebra si tiene efectos en el rendimiento de los alumnos tanto en las habilidades geométricas básicas como superiores.

Con respecto a la encuesta de satisfacción se encontró que el 3.6 % de los estudiantes estuvieron insatisfechos y el 25 % estuvieron poco satisfechos, mientras que el 35.7 % manifestaron estar satisfechos y el 53.6 % muy satisfechos. En resumen, el 89.3 % de los estudiantes valoraron la aplicación de la estrategia de manera satisfactoria.

### **Conclusiones**

El aprendizaje por problemas constituyó un escenario propicio para presentar a los estudiantes un problema real iniciando un proceso de investigación que los llevó a buscar posibles soluciones a la situación problema planteada, pues cuando un grupo de estudiantes se reúne, con la ayuda del profesor, para analizar y resolver un problema, que ha sido previamente diseñado para el logro de unos objetivos concretos de aprendizaje, permite proponer escenarios que contribuyen al desarrollo y apropiación de las habilidades geométricas básicas y superiores.

El proceso enseñanza-aprendizaje PBL es una estrategia que ayuda tanto a la apropiación de conceptos geométricos como al desarrollo de habilidades geométricas básicas y superiores, siendo las primeras enfocadas a la capacidad para resolver ejercicios, y las segundas,

a la formación de las competencias interpretativa, propositiva y argumentativa para resolver problemas, efecto observable en los promedios de calificación de cada grupo de trabajo luego del postest.

El uso del software GeoGebra, con fines educativos, favorece la apropiación de los conceptos geométricos, pues permite un acercamiento práctico de verificación de cálculos relacionados con las figuras geométricas básicas; efecto que se ratifica en los resultados de la encuesta de satisfacción, en donde el 89.3 % de los estudiantes valoraron estrategia mediada con GeoGebra como un método satisfactorio para el aprendizaje de la geometría.

### **Agradecimientos**

Los autores expresan sus agradecimientos a la Universidad de Santander.

## Referencias Bibliográficas

- Aymerich, J. V., y Macario, S. (2006). *Matemáticas Para el Siglo xxi*. Castellón de la Plana: Universitat Jaume I Servei De Comunicacio I Publicacions.
- Bulla, A., López, C., Jiménez, W., y Morera, J. F. (2018). Animaciones de funciones trascendentes y campos vectoriales en GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1294-1300). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/13623/>
- CONPES;. (2014). *Documento Conpes 3809*. Bogotá: Departamento Nacional de Planeación. Obtenido de <https://colaboracion.dnp.gov.co/CDT/Conpes/Econ%C3%B3micos/3809.pdf>
- Díaz, J. (2002). Competencia y comprensión matemática: ¿qué son y cómo se consiguen? Uno: *Revista de didáctica de las matemáticas*, 29(1), 9-19.
- Fernández, E. L. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería*, 6(1), 34-63. Obtenido de <https://revistas.udes.edu.co/aibi/article/download/475/pdf/>
- Fernández, H., Gamboa, M. E., Rodríguez, M., y Díaz, O. A. (2016). La geometría asistida por Geogebra. *Desempeño pedagógico y laboral*, 62-69. Obtenido de <https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/34/32>
- Font, A. (2004). Líneas maestras del aprendizaje por problemas. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 18(1), 79-95 . Obtenido de <https://pdfs.semanticscholar.org/9d79/935d74c9699d52fee7d9059a9b7ea3ba6625.pdf>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Granada.: Universidad de Granada. Obtenido de [https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1\\_Fundamentos.pdf](https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/1_Fundamentos.pdf)
- Grisales, A. F., Arredondo, J. F., y Mamián, E. A. (2011). Apropiación

- de conceptos trigonométricos por medio de la construcción de algunas funciones con Geogebra. 12 *Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 538-547). Quindío: Uniandes. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/2349/1/GrisalesApropiacionAsocolme2011.pdf>
- Lastra, S. (2005). *Propuesta Metodológica de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría*, aplicada en escuelas críticas. Santiago de Chile: Universidad de Chile. Obtenido de [http://repositorio.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra\\_s/sources/lastra\\_s.pdf](http://repositorio.uchile.cl/tesis/uchile/2005/lastra_s/sources/lastra_s.pdf)
- Lupiañez, J. L., y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 35-48. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/563/1/Lupiannez2008Analisis.pdf>
- Morales, P., y Landa, V. (2004). Aprendizaje Basado en Problemas. *Theoria*, 145-157. Obtenido de <http://148.202.167.116:8080/xmlui/bitstream/handle/123456789/574/Aprendizaje%20basado%20en%20problemas.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Raymond, D. (2016). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En R. Duval, y A. Sáenz, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas Énfasis* (págs. 13-60). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Obtenido de <http://funes.uniandes.edu.co/12176/>
- Sanhueza, S., Friz, M., Samuel, M., y Villegas, C. (2011). Competencias matemáticas empleadas por los estudiantes de educación primaria en la resolución de problemas geométricos. CIAEM (págs. 1-9). Recife: CIAEM. Obtenido de [https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii\\_ciaem/xiii\\_ciaem/paper/viewFile/2159/621](https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2159/621)
- Watanabe, R., y McGaw, B. (2004). Informe PISA 2003. *Aprender para el mundo del mañana*. OCDE. Madrid: Santillana Educación. Obtenido de <https://www.oecd.org/pisa/39732493.pdf>