

SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO BIFÁSICO AGUA-PETRÓLEO EN UN MEDIO POROSO

Johana Lizeth Pinilla Velandia¹

RESUMEN

Se presenta el modelamiento y simulación del flujo bifásico agua-aceite en un medio poroso homogéneo. Modelamientos de este tipo son necesarios para ayudar a comprender ciertas técnicas como la recuperación secundaria de hidrocarburos. Los dos fluidos considerados son inmiscibles e incompresibles. Se utiliza la ley de Darcy generalizada para el modelamiento del flujo de los fluidos. La resolución numérica se basa en una formulación IMPES del modelo original. La ecuación de la presión se resuelve de manera implícita y la ecuación de la saturación de manera explícita. La discretización espacial es hecha utilizando el método de volúmenes finitos. Las simulaciones numéricas se llevan a cabo en un medio poroso en tres dimensiones, considerando siempre un pozo de inyección y un pozo de producción. Los resultados permiten poner en evidencia los efectos de la presión de inyección, la presión capilar y la difusión.

Palabras Clave: Ley de Darcy, flujo bifásico, volúmenes finitos, IMPES, medio poroso, recuperación de petróleo, simulación numérica

NUMERICAL SIMULATION OF OIL-WATER TWO- PHASE FLOW IN POROUS MEDIA

ABSTRACT

This work is motivated by the need to better understand the comprehension of two-phase flow water-oil, in the secondary recovery of oil. Two-phase immiscible and incompressible fluids are considered. The generalized Darcy's is used for modeling fluid flow. For the numerical resolution the separation of the calculation of the pressure and saturation is required. An IMPES formulation of the original model is performed. The pressure equation is solved implicitly and the saturation equation explicitly. The spatial discretization is made by the finite volume method. Numerical simulations are carried out in a three-dimensional porous medium by taking into account injection and production wells. Numerical results highlight the effects of injection pressure, capillary pressure and diffusion.

Keywords: Darcy law, two-phase flow, finite volume, IMPES, porous media, oil recovery, numerical simulation

1. INTRODUCCIÓN

La comprensión de los mecanismos del flujo bifásico de fluidos en medios porosos es de gran interés en la industria petrolera. Por ejemplo, las técnicas de recuperación secundaria y terciaria implican el desplazamiento del hidrocarburo por otro fluido, como agua en el primer caso o un polímero en el segundo caso. El estudio del flujo de fluidos en medios porosos puede realizarse a tres escalas diferentes [1]: escala del

poro, escala de Darcy y gran escala. A la escala del poro, la longitud característica es del orden del diámetro de los poros ($1\mu\text{m}$ a $100\mu\text{m}$); a esta escala, la velocidad del flujo es muy pequeña y la aproximación de Stokes es generalmente válida para modelar el flujo de los fluidos [2]. A la escala de Darcy, el medio poroso es tratado como un medio continuo cuya dimensión característica es del orden de algunos centímetros y el modelo de Darcy es ampliamente utilizado para describir el flujo a esta escala. En el modelamiento a gran escala o escala

1. Escuela de Ingeniería de Petróleos, Universidad Industrial de Santander, UIS, Carrera 27 calle 9, Bucaramanga, Colombia.

de cuenca, la longitud característica es del tamaño de las heterogeneidades y el modelamiento se realiza mediante ecuaciones obtenidas a partir de técnicas de cambio de escala, tales como el método de promedio volumétrico [3].

En este trabajo nos hemos interesado en el modelamiento y simulación, a la escala de Darcy, del desplazamiento del petróleo, provocado por la inyección de agua que permite recuperar el hidrocarburo en un pozo de producción. La presentación del artículo está estructurada de la siguiente manera. La sección 2 está dedicada a la presentación de las ecuaciones que intervienen en el modelamiento físico. Luego, en la sección 3 se describe el modelamiento matemático haciendo énfasis en el método IMPES (IMplicito en Presión, Explicito en Saturación). En la sección 4 se presenta de manera detallada la resolución numérica del sistema de ecuaciones y finalmente, en la sección 5 se muestran los resultados de simulaciones numéricas en un medio poroso en tres dimensiones.

2. MODELAMIENTO FÍSICO

En el contexto de la mecánica de fluidos, un medio poroso puede ser definido como un material en el que existen cavidades interconectadas por canales, en los cuales fluyen los fluidos; estas cavidades son llamadas poros [4]. Consideremos un medio poroso homogéneo e incompresible, donde se encuentran presentes dos fases: una fase *agua* denotada w y otra fase *aceite*, denotada o . Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ este medio poroso y Γ , la frontera de Ω . Las dos fases consideradas son no miscibles. Denotemos por $X = (x, y, z) \in \Omega$, la variable espacio y $t \in \mathbb{R}^+$, la variable tiempo. Las ecuaciones que gobiernan el flujo de estos fluidos se describen a continuación [5], [6], [7].

2.1 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento se traduce por la ley de Darcy generalizada [8], [9], [10].

$$\mathbf{V}_\alpha(X, t) = -\frac{\mathbf{K}_\alpha}{\mu_\alpha} (\nabla P_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}). \quad (1)$$

Donde $\alpha = w, o$, \mathbf{V}_α es la velocidad de filtración de la fase α , \mathbf{K}_α es el tensor de permeabilidad efectiva de la fase α , μ_α es la viscosidad de la fase α , P_α es la

presión de la fase α , ρ_α es la densidad de la fase α y es constante ya que los fluidos son incompresibles y \mathbf{g} es el vector aceleración de la gravedad. Además se tiene que la permeabilidades efectiva y relativa se relacionan de la siguiente manera:

$$\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{K} k_{r\alpha}, \quad \alpha = w, o,$$

donde \mathbf{K} es el tensor de permeabilidad intrínseca del medio poroso y $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(S_w)$ es la permeabilidad relativa de la fase α y depende de la saturación del agua.

2.2 ECUACIÓN DE CONSERVACIÓN DE LA MASA

Teniendo en cuenta que el medio poroso es incompresible y el flujo de los fluidos es también incompresible, la ecuación de conservación de la masa para cada fase se escribe:

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}_\alpha) + \frac{q_\alpha}{\rho_\alpha}. \quad (2)$$

Donde ϕ es constante y corresponde a la porosidad del medio poroso, S_α es la saturación de la fase α y q_α es un término relacionado con el flujo del fluido inyectado.

2.3 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

La saturación de un fluido se define como la fracción del volumen de los poros de la roca ocupados por el fluido [7]. Asumiendo que el medio está completamente saturado, tenemos

$$S_w + S_o = 1, \quad (3)$$

donde S_w y S_o son la saturación de agua y aceite, respectivamente.

2.4 ECUACIÓN DE LA PRESIÓN CAPILAR

$$P_c(S_w) = P_w - P_o. \quad (4)$$

Donde $P_c(S_w)$ es la presión capilar, P_w la presión del agua y P_o es la presión del aceite. Empíricamente, se tiene que P_c es una función de la saturación S_w .

2.5 MODELO FÍSICO FINAL

Resumiendo, se tiene que el sistema de ecuaciones que gobierna el flujo bifásico incompresible en un medio poroso e incompresible es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{V}_w(X, t) = -\frac{\mathbf{K}_w}{\mu_w} (\nabla P_w - \rho_w \mathbf{g}) \\ \mathbf{V}_o(X, t) = -\frac{\mathbf{K}_o}{\mu_o} (\nabla P_o - \rho_o \mathbf{g}) \\ \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}_w) + \frac{q_w}{\rho_w} \\ \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}_o) + \frac{q_o}{\rho_o} \\ S_w + S_o = 1 \\ P_c(S_w) = P_w - P_o \end{array} \right. \quad (5)$$

El sistema (5) es un sistema de diez ecuaciones y diez incógnitas. Las incógnitas son: las componentes de las velocidades para cada fase $V_w = (u_w, v_w, w_w)$, $V_o = (u_o, v_o, w_o)$, las saturaciones S_w y S_o y las presiones P_w y P_o .

3. MODELAMIENTO MATEMÁTICO

Notemos que el sistema (5) es un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, dependientes del tiempo. Para tratar este problema y separar el cálculo de la presión del cálculo de la saturación, utilizamos el método IMPES [11] [12], ampliamente utilizado por su facilidad de implementación y bajo costo computacional respecto a otros métodos, como el de solución simultánea [13]. Una revisión de los métodos existentes puede encontrarse en [14].

3.1 EL MÉTODO IMPES

La idea principal del método IMPES es separar el cálculo de la presión y el de la saturación. La aproximación en tiempo de la ecuación de la presión y de la saturación se realiza mediante un esquema implícito y explícito, respectivamente. Discusiones detalladas acerca de este método pueden encontrarse en [12] y una revisión de mejoramientos al algoritmo original puede encontrarse en [15] y [8]. A continuación se detalla la formulación IMPES del sistema (5). Empecemos por introducir las siguientes notaciones:

Modalidad de fase α :

$$M_\alpha = \mathbf{K} \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}$$

Modalidad total:

$$M = M_w + M_o$$

Fracción de flujo de la fase α :

$$f_\alpha = \frac{M_\alpha}{M}$$

Velocidad Total:

$$\mathbf{V}_T = \mathbf{V}_w + \mathbf{V}_o$$

Ahora se escribe (2) para cada fase:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{V}_w) + \tilde{q}_w \\ \phi \frac{\partial S_o}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{V}_o) + \tilde{q}_o \end{aligned}$$

Donde $\tilde{q}_w = q_w / \rho_w$ y $\tilde{q}_o = q_o / \rho_o$. Se hace la suma de estas dos últimas ecuaciones y luego, reemplazando (3) en la ecuación obtenida, se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_T = \tilde{q}_w + \tilde{q}_o \quad (6)$$

Para expresar la velocidad total V_T en función de P_o y S_w , se escribe (1) para cada fase:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_w(X, t) &= -\frac{\mathbf{K}_w}{\mu_w} (\nabla P_w - \rho_w \mathbf{g}) \\ \mathbf{V}_o(X, t) &= -\frac{\mathbf{K}_o}{\mu_o} (\nabla P_o - \rho_o \mathbf{g}) \end{aligned}$$

Ahora se hace la suma de estas dos últimas ecuaciones y utilizando (4), se obtiene la ecuación de velocidad total:

$$\mathbf{V}_T = -M (\nabla P_o + f_w \nabla P_c - (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \mathbf{g}) \quad (7)$$

Entonces las velocidades para cada fase se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{V}_w = f_w \mathbf{V}_T - M f_o f_w (\nabla P_c - (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \quad (8)$$

$$\mathbf{V}_o = f_o \mathbf{V}_T + M f_o f_w (\nabla P_c - (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \quad (9)$$

Se reemplaza (7) en (6) y se obtiene la ecuación de la presión:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (M \nabla P_o) &= \tilde{q}_w + \tilde{q}_o \\ + \nabla \cdot (M f_w \nabla P_c - M (f_w \rho_w + f_o \rho_o) \mathbf{g}) & \quad (10) \end{aligned}$$

Escribiendo (2) para $\alpha = w$ y reemplazando \mathbf{V}_w por (8), se obtiene la ecuación de la saturación:

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \nabla \cdot (f_w \mathbf{V}_T) \\ + \nabla \cdot (M f_o f_w (\rho_w - \rho_o) \mathbf{g}) \\ - \nabla \cdot (M f_o f_w \frac{dP_c}{dS_w} \nabla S_w) = \tilde{q}_w \end{aligned} \quad (11)$$

Finalmente, las ecuaciones (7), (10) y (11) forman un sistema de ecuaciones equivalentes al sistema (5) llamado *formulación IMPES*. Ignorando los efectos de la gravedad, dicha formulación se escribe:

$$\begin{cases} \mathbf{V} = -M(\nabla P + f_w \nabla P_c) \\ -\nabla \cdot (M \nabla P) = \nabla \cdot (M f_w \nabla P_c) \\ \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (f_w \mathbf{V}) - \nabla \cdot (M f_o f_w \frac{dP_c}{dS} \nabla S) = 0 \end{cases} \quad (12)$$

Esta nueva formulación permite escribir un sistema de cinco ecuaciones y cinco incógnitas. Las variables desconocidas son: las tres componentes de la velocidad total $\mathbf{V}_T = (u, v, w)$, la saturación del agua S_w y la presión del aceite P_o . A partir de ahora, llamaremos ecuación de la velocidad, de la presión y de la saturación a la primera, segunda y tercera ecuación del sistema (12), respectivamente.

3.2 CONDICIONES LÍMITES

Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^3 . Sea Γ la frontera de Ω , de normal exterior \mathbf{n} y $[0, T]$ el intervalo de tiempo de estudio del fenómeno físico. La frontera Γ está particionada así:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_e \cup \Gamma_s \cup \Gamma_i \cup \Gamma_p \\ \Gamma_j \cap \Gamma_k &= \emptyset, \quad j \neq k \end{aligned}$$

Denotamos por Γ_e la parte de la Γ donde se inyecta el agua, Γ_s la parte de Γ donde se recupera el aceite, Γ_i la parte impermeable de Γ y Γ_p la parte de Γ donde se utilizan condiciones límites de periodicidad. Según la naturaleza de las fronteras consideradas, asociamos las siguientes condiciones límites:

- En el borde de inyección Γ_e podríamos utilizar condiciones límites de velocidad

$\mathbf{V}_T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} = -q_d$, donde $q_d > 0$ y corresponde al *caudal de inyección*. O bien utilizar condiciones límites sobre la presión, $P_o = P_e$, donde P_e es la presión que se impone en el borde Γ_e .

- En el borde impermeable Γ_i :

$$\begin{cases} \mathbf{V}_T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_w \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_o \cdot \mathbf{n} = 0 \\ (M f_o f_w \frac{dP_c}{dS_w} \nabla S_w) \cdot \mathbf{n} = 0. \end{cases}$$

- En el borde de salida Γ_s , consideramos que no hay flujo de presión capilar. Al igual que en borde de inyección, las condiciones límites de salida pueden ser sobre la velocidad o sobre la presión. Para la velocidad, $\mathbf{V}_T \cdot \mathbf{n} = q_s, q_s > 0$ y corresponde al *flujo total de los fluidos recuperados*. O bien para la presión $P_o - \rho_o |g| y = P_s < P_e$.

3.3 CONDICIONES INICIALES

Al instante $t=0$ la saturación del agua es conocida. Entonces, se tiene:

$$S_w(X, 0) = S_w^0(X) \text{ en } \Omega$$

4. SOLUCIÓN NUMÉRICA

La estrategia de aproximación utilizada se basa en los trabajos presentados en [16] y [17].

4.1 ALGORITMO

Sea $[0, T], T > 0$, el intervalo de tiempo del fenómeno a estudiar. Sea $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ una partición de este intervalo, para N un entero positivo. Al instante $t = 0$, $S_w^0(X)$ es conocida en todo el dominio Ω . Entonces, tenemos para $n = 0, 1, \dots, N$:

1. Se resuelve implícitamente la ecuación de la presión del sistema (12) para encontrar la presión P_o^n .
2. Se calcula \mathbf{V}_T^n con la ecuación de la velocidad del sistema (12).
3. Con S_w^n, P_o^n y \mathbf{V}_T^n conocidos, se calcula S_w^{n+1} a partir de la ecuación de la saturación del sistema (12).

4.2 DISCRETIZACIÓN

4.2.1 NOTACIONES Y MALLADO

La discretización espacial es hecha mediante el método de volúmenes finitos. El dominio Ω es el paralelepípedo $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z]$, con L_x , L_y y L_z constantes positivas (ver Figura 1). Se utiliza un malla cartesiano rectangular, compuesto de mallas paralelepípedicas. Sean N_x , N_y y N_z , el número de nodos en la dirección x , y , z respectivamente. El paso del malla espacial en cada una de estas direcciones está definido por:

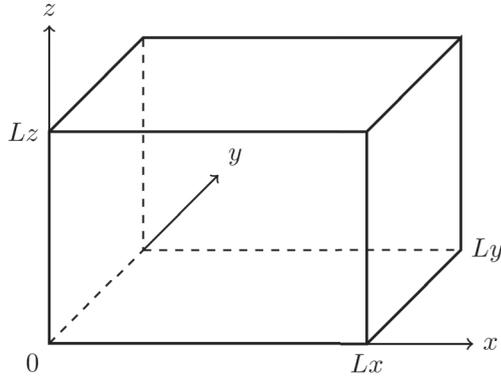


Figura 1. Dominio Ω

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x} \quad \Delta y = \frac{L_y}{N_y} \quad \Delta z = \frac{L_z}{N_z}$$

Los puntos (x_i, y_j, z_k) son los centros de los nodos $Q_{i,j,k}$ definidos por (ver Figura 2):

$$x_i = x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta x,$$

$$y_j = y_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta y,$$

$$z_k = z_{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\Delta z,$$

para $i = 1, \dots, N_x$, $j = 1, \dots, N_y$ y $k = 1, \dots, N_z$.

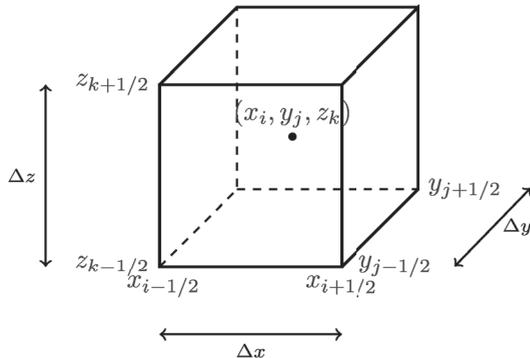


Figura 2. Nodo (i, j, k) del malla del dominio

El borde $Q_{i,j,k}$ denotado $\partial Q_{i,j,k}$ está dado por:

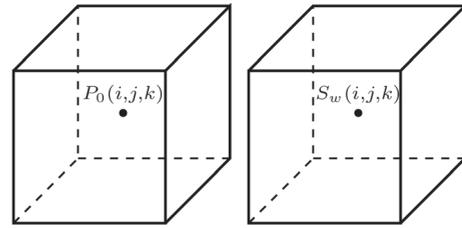
$$\begin{aligned} \partial Q_{i,j,k} = & \Gamma_{i+\frac{1}{2},j,k} \cup \Gamma_{i-\frac{1}{2},j,k} \cup \Gamma_{i,j+\frac{1}{2},k} \\ & \cup \Gamma_{i,j,j-\frac{1}{2},k} \cup \Gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \cup \Gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donde $\Gamma_{i+\frac{1}{2},j,k}$ es la cara entre las celdas $Q_{i,j,k}$ y $Q_{i+1,j,k}$, $\Gamma_{i,j+\frac{1}{2},k}$ es la cara entre las celdas $Q_{i,j,k}$ y $Q_{i,j+1,k}$ y $\Gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}}$ es la cara entre las celdas $Q_{i,j,k}$ y $Q_{i,j,k+1}$.

4.2.2 LOCALIZACIÓN DE LAS VARIABLES DESCONOCIDAS

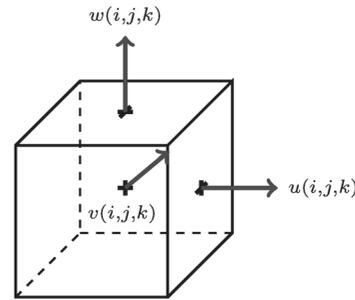
La presión del aceite, P_o , y la saturación del agua, S_w , se localizan en el centro de las mallas. Las componentes de la velocidad total $V_T = (u, v, w)$ se toman en el centro de las caras de las mallas (ver figura 3).

Para simplificar las notaciones, eliminaremos los subíndices de la presión, la saturación y la velocidad total de las siguiente manera $P_o = P$, $S_w = S_{et}$ $V_T = V$.



(a) Presión

(b) Saturación



(c) Velocidad

Figura 3. Localización de las variables desconocidas

4.3 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA PRESIÓN

Sea $a(S) = M f_w \frac{dP_c}{dS}$. Integrando la ecuación de la presión del sistema (12) sobre $Q_{i,j,k}$ tenemos:

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_{i,j,k}} \nabla \cdot (M \nabla P) \, dx \, dy \, dz \\
& \qquad = \int_{Q_{i,j,k}} \nabla \cdot (a \nabla S) \, dx \, dy \, dz.
\end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de la divergencia obtenemos

$$\begin{aligned}
& - \int_{\partial Q_{i,j,k}} M \nabla P \cdot \mathbf{n}_{\partial Q_{i,j,k}} \, dS \\
& \qquad = \int_{\partial Q_{i,j,k}} a \nabla S \cdot \mathbf{n}_{\partial Q_{i,j,k}} \, dS, \quad (13)
\end{aligned}$$

Donde $\mathbf{n}_{\partial Q_{i,j,k}}$ es la normal exterior a la superficie $\partial Q_{i,j,k}$. Desarrollando para el lado izquierdo de la ecuación (13) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Gamma_{i+\frac{1}{2},j,k}} M \frac{\partial P}{\partial x} \, dy \, dz + \int_{\Gamma_{i-\frac{1}{2},j,k}} M \frac{\partial P}{\partial x} \, dy \, dz \\
& - \int_{\Gamma_{i,j+\frac{1}{2},k}} M \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dz + \int_{\Gamma_{i,j-\frac{1}{2},k}} M \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dz \\
& - \int_{\Gamma_{i,j,k+\frac{1}{2}}} M \frac{\partial P}{\partial z} \, dx \, dy + \int_{\Gamma_{i,j,k-\frac{1}{2}}} M \frac{\partial P}{\partial z} \, dx \, dy
\end{aligned}$$

De manera similar, se desarrolla el lado derecho de (13). Las derivadas en cada dirección son discretizadas por diferencias finitas centradas, esto nos permite calcular P en el centro de las mallas. Se obtiene así el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}
& - \Delta y \Delta z \left(M_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x} \right) \\
& + \Delta y \Delta z \left(M_{i-\frac{1}{2},j,k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right) \\
& - \Delta x \Delta z \left(M_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\Delta y} \right) \\
& + \Delta x \Delta z \left(M_{i,j-\frac{1}{2},k} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right) \\
& - \Delta x \Delta y \left(M_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\Delta z} \right) \\
& + \Delta x \Delta y \left(M_{i,j,k-\frac{1}{2}} \frac{P_{i,j,k} - P_{i,j,k-1}}{\Delta z} \right)
\end{aligned}$$

Las movibilidades, M , se aproximan mediante una media armónica en la interfaz entre las mallas [17]:

$$M_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{2 M_{i+1,j,k} M_{i,j,k}}{M_{i+1,j,k} + M_{i,j,k}}$$

$$M_{i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{2 M_{i,j+1,k} M_{i,j,k}}{M_{i,j+1,k} + M_{i,j,k}}$$

$$M_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{2 M_{i,j,k+1} M_{i,j,k}}{M_{i,j,k+1} + M_{i,j,k}}$$

La resolución del sistema de ecuaciones obtenido es llevada a cabo mediante método iterativo de gradiente conjugado [18].

4.4 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD TOTAL

Una vez conocida la presión, se calcula cada una de las componentes de la velocidad en el centro de las caras de las mallas:

$$\begin{aligned}
u_{i+\frac{1}{2},j,k} & = -M_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{P_{i+1,j,k} - P_{i,j,k}}{\Delta x} \\
& \quad - a_{i+\frac{1}{2},j,k} \frac{S_{i+1,j,k} - S_{i,j,k}}{\Delta x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{i,j+\frac{1}{2},k} & = -M_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{P_{i,j+1,k} - P_{i,j,k}}{\Delta y} \\
& \quad - a_{i,j+\frac{1}{2},k} \frac{S_{i,j+1,k} - S_{i,j,k}}{\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{i,j,k+\frac{1}{2}} & = -M_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{P_{i,j,k+1} - P_{i,j,k}}{\Delta z} \\
& \quad - a_{i,j,k+\frac{1}{2}} \frac{S_{i,j,k+1} - S_{i,j,k}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

4.5 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA SATURACIÓN

Se desarrolla un algoritmo de dos pasos. Primero se resuelve una ecuación de tipo hiperbólico no lineal y luego una ecuación de difusión.

Para S^n dado, buscamos $S^{n+\frac{1}{2}}$, solución de:

$$\phi \frac{S^{n+\frac{1}{2}} - S^n}{\Delta t} + \nabla \cdot (f_w(S^n) \mathbf{V}) = 0 \quad (14)$$

Conociendo la solución de (14), buscamos S^{n+1} , solución de:

$$\phi \frac{S^{n+1} - S^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} - \nabla \cdot \left(d(S^{n+\frac{1}{2}}) \nabla S^{n+1} \right) = 0 \quad (15)$$

Para resolver la ecuación (14), procedemos de la siguiente manera. Primero, integramos la ecuación en cada uno de los nodos $Q_{i,j,k}$:

$$\int_{Q_{i,j,k}} \left(\phi \frac{S^{n+\frac{1}{2}} - S^n}{\Delta t} \right) dx dy dz + \int_{Q_{i,j,k}} \nabla \cdot (f_w(S) \mathbf{V}) dx dy dz = 0$$

Utilizando la aproximación de segundo orden:

$$S(i, j, k) \approx \frac{1}{|Q_{i,j,k}|} \int_{Q_{i,j,k}} S(t, x, y, z) dx dy dz, \quad (16)$$

donde $|Q_{i,j,k}| = \Delta x \Delta y \Delta z$, se obtiene la siguiente aproximación para el primer término de la integral:

$$\int_{Q_{i,j,k}} \left(\phi \frac{S^{n+\frac{1}{2}} - S^n}{\Delta t} \right) dx dy dz \approx \phi \frac{S_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} - S_{i,j,k}^n}{\Delta t_n} |Q_{i,j,k}|$$

En cuanto al segundo término $\int_{Q_{i,j,k}} \nabla \cdot (f_w(S) \mathbf{V}) dx dy dz$ se utiliza un esquema numérico de Murman [19], [17]. Este esquema de primer orden se adapta bien a la resolución de ecuaciones hiperbólicas no lineales como la ecuación (14).

Ahora vamos a concentrarnos en la segunda etapa del método de pasos fraccionarios, es decir, en la ecuación de difusión (15). Integrando la ecuación (15) sobre $Q_{i,j,k}$:

$$\int_{Q_{i,j,k}} \phi \frac{S^{n+1} - S^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} dx dy dz - \int_{Q_{i,j,k}} \nabla \cdot \left(d(S^{n+\frac{1}{2}}) \nabla S^{n+1} \right) dx dy dz = 0$$

Utilizando la fórmula de la divergencia y aproximando las derivadas obtenidas mediante diferencias finitas centradas, se obtiene el siguiente esquema:

$$\begin{aligned} & \phi \left(S_{i,j,k}^{n+1} - S_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(d(S_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{S_{i+1,j,k}^{n+1} - S_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(d(S_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{S_{i,j,k}^{n+1} - S_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(d(S_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{S_{i,j+1,k}^{n+1} - S_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta y} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(d(S_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{S_{i,j,k}^{n+1} - S_{i,j-1,k}^{n+1}}{\Delta y} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(d(S_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{S_{i,j,k+1}^{n+1} - S_{i,j,k}^{n+1}}{\Delta z} \right) \\ & + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left(d(S_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \frac{S_{i,j,k}^{n+1} - S_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

El esquema (17) implica la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Para la resolución de este sistema se utiliza el método de gradiente conjugado.

Con el fin de verificar el orden de aproximación del esquema numérico descrito para el cálculo de la saturación, se calcula el error de aproximación $E(S)$ para diferentes mallados. Se utiliza la norma L^1 del error:

$$E(S) = \sum_{i,j,k} |S(i, j, k) - S_h(i, j, k)|, \quad (18)$$

donde S_h es la solución numérica calculada y S la solución analítica dada por:

$$S(x, y, z) = \sin\left(\frac{2\pi y}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) x(L_x - x) + 1 - \frac{x}{L_x}.$$

El cuadro 2 resume los errores obtenidos para cuatro mallados diferentes. Estas simulaciones permiten constatar que el método utilizado aproxima la solución al orden 1.

Cuadro 1. Precisión del método numérico empleado para la resolución de la ecuación de la saturación.

| Mallado | $E(S)$ | Orden |
|-----------------------------|-----------------------|-------|
| $20 \times 20 \times 20$ | 1.94×10^{-2} | |
| $40 \times 40 \times 40$ | 1.00×10^{-2} | 1.94 |
| $80 \times 80 \times 80$ | 5.07×10^{-3} | 1.97 |
| $160 \times 160 \times 160$ | 2.54×10^{-3} | 1.99 |

5. SIMULACIONES NUMÉRICAS

5.1 SIMULACIÓN EN UN MEDIO POROSO TRIDIMENSIONAL

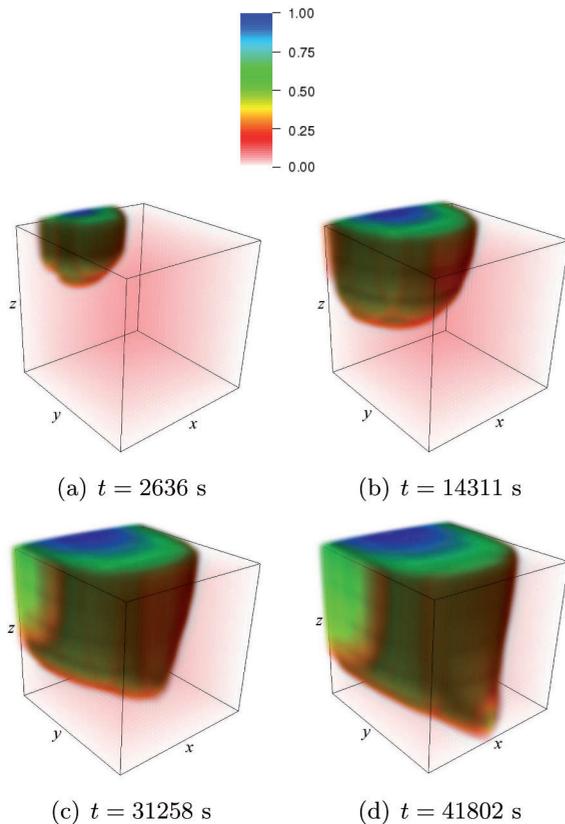


Figura 4. Evolución de la saturación del agua. Mallado: $50 \times 50 \times 50$.

La primera simulación numérica es llevada a cabo en el paralelepípedo $\Omega = [0.1 \text{ m}] \times [0.1 \text{ m}] \times [0.1 \text{ m}]$ y las condiciones límites están definidas así:

$$\begin{aligned} \Gamma_e &: \{0\} \times \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right] \times \left[\frac{4}{5}, 1\right] \\ \Gamma_s &: \{1\} \times \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{5}\right] \\ \Gamma_i &: \Gamma_{sup} \cup \Gamma_{inf} \\ \Gamma_p &: \Gamma_{ant} \cup \Gamma_{pos} \end{aligned}$$

Donde $\Gamma_{sup} = [0, 1] \times [0, 1] \times \{1\}$, $\Gamma_{inf} = [0, 1] \times [0, 1] \times \{0\}$, $\Gamma_{ant} = [0, 1] \times \{1\} \times [0, 1]$ y $\Gamma_{pos} = [0, 1] \times \{0\} \times [0, 1]$.

Los parámetros físicos son los siguientes:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= S_w^2, \quad k_{ro} = (1 - S_w)^2, \\ K &= 10^{-13} \text{ m}^2, \quad \phi = 0.5, \\ \mu_w &= 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \mu_o = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \\ P_e &= 2,026 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad P_s = 1,013 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

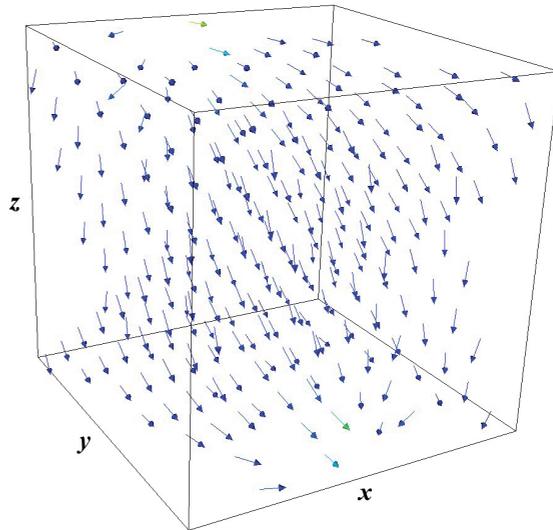


Figura 5. Campo de velocidad.

Y las condiciones iniciales son: $S(X, 0) = 0$ $P(X, 0) = 1.013 \cdot 10^6 \text{ Pa}$. Las figuras (4), (5) y (6), muestran respectivamente los resultados de la evolución de la presión. En la figura (4) vemos como el agua va llenando poco a poco el medio poroso desde el sitio de inyección y va desplazando el aceite hacia el sitio que podríamos llamar un pozo de producción. La figura (5) nos permite verificar que la dirección del flujo de los fluidos va desde el pozo de inyección hasta el de producción y la figura (6) nos deja ver que la presión dentro del medio poroso, evoluciona en el tiempo.

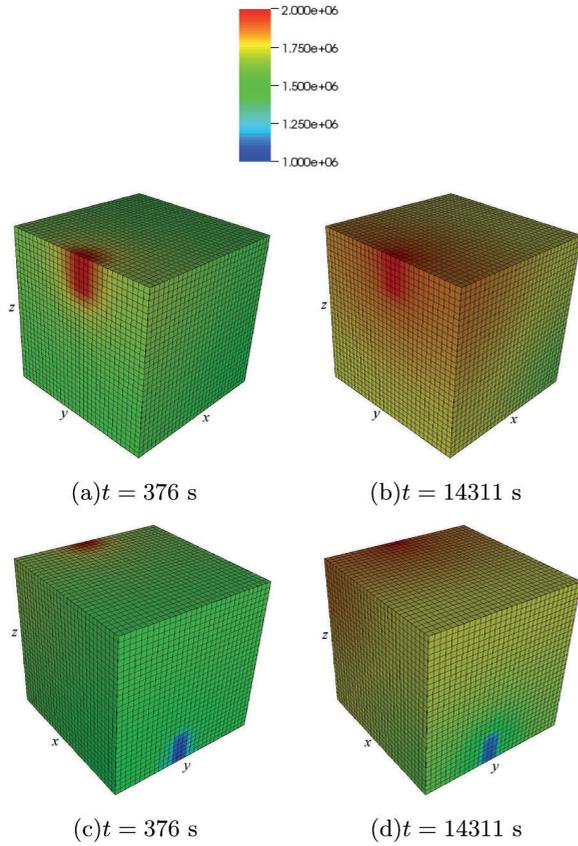


Figura 6. Presión a diferentes instantes de tiempo (en Pascales). (a) y (b) vista desde la cara de inyección. (c) y (d) vista desde la cara de recuperación.

5.2 COMPARACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA PRESIÓN CAPILAR

Con el fin de observar los efectos de la presión capilar, realizamos ahora dos tipos de simulaciones. En la primera simulación, suponemos que el flujo de los fluidos es efectuado en ausencia de efectos capilares y en la segunda, tenemos en cuenta dichos efectos. Los parámetros de las simulaciones son:

$$\begin{aligned} \Omega &= [0, 1 \text{ m}] \times [0, 1 \text{ m}] \times [0, 1 \text{ m}] \\ \Gamma_e &: \{0\} \times \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \times \left[\frac{4}{5}, 1\right] \\ \Gamma_s &: \{1\} \times \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \times \left[0, \frac{1}{5}\right] \\ \Gamma_i &: \Gamma_{sup} \cup \Gamma_{inf} \\ \Gamma_p &: \Gamma_{ant} \cup \Gamma_{pos} \end{aligned}$$

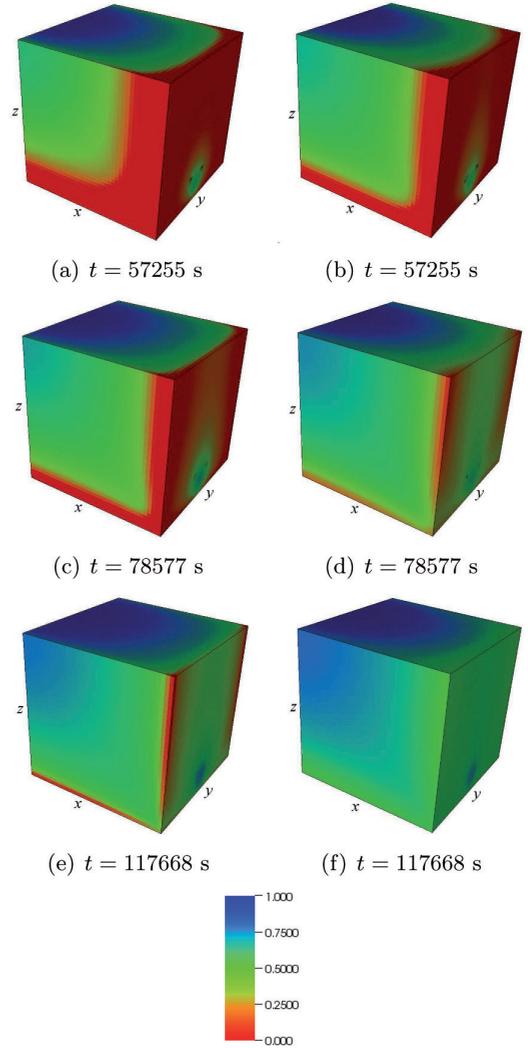


Figura 7. Comparación de los resultados del frente de saturación entre un modelo sin y con presión capilar. A la izquierda, los resultados para el modelo sin P_c y a la derecha, los resultados para el modelo con P_c . Mallado: 50 x 50 x 50.

Donde Γ_{sup} , Γ_{inf} , Γ_{ant} y Γ_{pos} fueron definidos en la sección anterior.

Los parámetros físicos son los siguientes:

$$\begin{aligned} k_{rw} &= S_w^2, \quad k_{ro} = (1 - S_w)^2, \\ K &= 10^{-13} \text{ m}^2, \quad \phi = 0.5, \\ \mu_w &= 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \mu_o = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \end{aligned}$$

$$P_e = 2,026 \cdot 10^6 Pa, P_s = 1,013 \cdot 10^6 Pa.$$

Las condiciones iniciales son: $S(X,0) = 0$, $P(X,0) = 1.013 \cdot 10^6 Pa$. Y la presión capilar, que es función de la saturación, está dada por $P_c(S) = 15000(S - 1)$.

La figura (7) muestra el frente de saturación para estas dos simulaciones. Puede observarse que la presión capilar tiende a extender el frente de saturación.

5.3 COMPARACIÓN DE LOS EFECTOS DE LA PRESIÓN DE INYECCIÓN

Para comparar los efectos de la presión, realizamos dos simulaciones variando P_e :

Presión débil: $P_e = 2.026 \cdot 10^6 Pa$

Presión fuerte: $P_e = 3.039 \cdot 10^6 Pa$

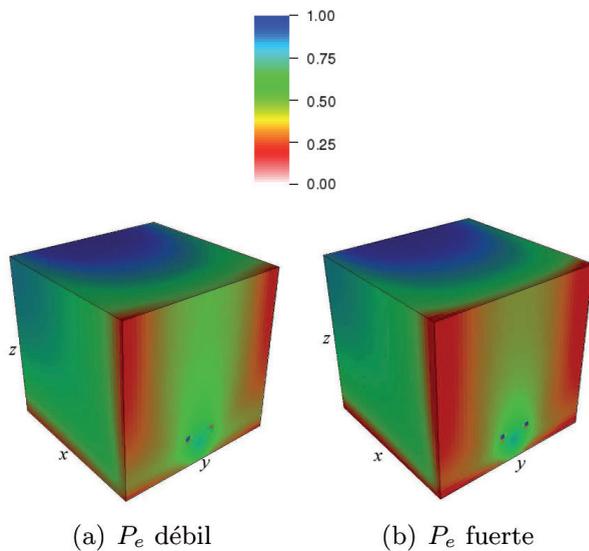


Figura 8. Comparación del frente de saturación de agua para dos presiones de entrada diferentes, al instante $t = 74837 s$. A la izquierda, $P_e = 2.026 \cdot 10^6 Pa$ y a la derecha, $P_e = 3.039 \cdot 10^6 Pa$. Mallado: $50 \times 50 \times 50$.

En la figura (8) se muestra el frente de la saturación al mismo instante, en cada uno de los casos. Se observa que los efectos de las difusión capilar son más importantes cuando la presión de entrada es débil. En este caso, la difusión capilar es preponderante sobre los efectos del

término de transporte. Estos resultados coinciden con los resultados obtenidos en [16].

6. RECURSOS COMPUTACIONALES

Las simulaciones numéricas presentadas en este artículo se llevaron a cabo en un computador con las siguientes características: 2 Quad-core Intel Xeon E5420 de 2.4 GHz y 32 Gb de RAM. El cuadro 2 muestra los tiempos de cálculo para cuatro mallados diferentes:

Cuadro 2. Tiempos de cálculo

| Mallado | Tiempo (s) |
|--------------------------|------------|
| $30 \times 30 \times 30$ | 4217.4 |
| $40 \times 40 \times 40$ | 39555.6 |
| $50 \times 50 \times 50$ | 157767.1 |
| $60 \times 60 \times 60$ | 213427.4 |

7. CONCLUSIONES

Hemos presentado el modelamiento y simulación del flujo bifásico agua- aceite en ausencia de gravedad, en un medio poroso homogéneo en tres dimensiones. Se utiliza una formulación IMPES para la resolución numérica del modelo. El sistema a resolver se compone de una ecuación para la velocidad, una ecuación de tipo elíptico para la presión y una ecuación de tipo parabólico para la saturación. Los resultados obtenidos muestran que los efectos capilares ayudan a extender el frente de saturación de la fase inyectada y además, que estos efectos son más importantes cuando la presión de inyección es débil.

AGRADECIMIENTOS

El autor de este artículo agradece al Instituto Nacional de Informática y Automática de Bordeaux, INRIA- Sud Ouest, por el financiamiento de este trabajo; al Instituto de Matemáticas de Bordeaux, IMB, por los medios de cálculo ofrecidos; a Mazen Saad, profesor de la Escuela Central de Nantes, por iniciar el código de Fortran que permitió desarrollar este trabajo y a Charles Henri Bruneau, profesor de la Universidad de Bordeaux, por dirigir este trabajo de maestría.

REFERENCIAS

1. D. E. Tognisso, *Écoulements de fluides complexes en milieu poreux : utilisation de micelles géantes pour la Récupération Améliorée du Pétrole*. PhD thesis, Bordeaux 1, Nov. 2011.
2. J. L. P. Pinilla, *Modélisation et simulation à l'échelle du pore de la récupération assistée des hydrocarbures par injection de polymères*. PhD thesis, Bordeaux 1, Dec. 2012.
3. M. Quintard, H. Bertin, and S. Whitaker, "Two-phase flow in heterogeneous porous media: The method of large-scale averaging applied to laboratory experiments in a stratified system," *Society of Petroleum Engineers*, Oct. 1989.
4. T. Sochi, "Flow of non-newtonian fluids in porous media," *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, vol. 48, no. 23, p. 2437- 2767, 2010.
5. G. Chavent and J. Jaireg, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation: Single Phase, Multiphase and Multicomponent Flows through Porous Media*. Elsevier, Jan. 1986.
6. J. Jafré, "Formulation mixte d'écoulement diphasiques incompressibles dans un milieu poreux," 1980.
7. D. W. Peaceman, *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Elsevier, Apr. 2000.
8. Z. Chen, G. Huan, and Y. Ma, *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media*. SIAM, Apr. 2006.
9. S. Whitaker, "Flow in porous media i: A theoretical derivation of darcy's law," *Transp Porous Med*, vol. 1, pp. 3-25, Mar. 1986.
10. D. Lasseux, M. Quintard, and S. Whitaker, "Determination of permeability tensors for two-phase flow in homogeneous porous media: Theory," *Transp Porous Med*, vol. 24, pp. 107-137, Aug. 1996.
11. J. Sheldon and B. Zondek, "One-dimensional, incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium," *Society of Petroleum Engineers*, vol. 216, pp. 290-296, 1959.
12. H. Stone and A. Garder Jr., "Analysis of gascap or dissolved-gas drive reservoirs," *Society of Petroleum Engineers Journal*, vol. 1, June 196.
13. C. Chueh, M. Secanell, W. Bangerth, and N. Djilali, "Multi-level adaptive simulation of transient two-phase flow in heterogeneous porous media," *Computers & Fluids*, vol. 39, pp. 1585-1596, Oct. 2010.
14. J. Kou and Sun, Shuyu, "On iterative IMPES formulation for two-phase flow with capillarity in heterogeneous porous media," *International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B*, vol. 1, pp. 20 - 40, July 2010.
15. Z. Chen, G. Huan, and B. Li, "An improved IMPES method for two-phase flow in porous media," *Transport in Porous Media*, vol. 54, pp. 361- 376, Mar. 2004.
16. M. S. Saad, *Propriétés de quelques modèles d'écoulements en milieu poreux/par Mazen Samir Saad*. PhD thesis, Bordeaux 1, Jan. 1993.
17. F. Marpeau and M. Saad, "3D simulation of radionuclide transport in porous media," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 64, no. 1, p. 44-70, 2010.
18. M. R. Hestenes and E. Stiefel, *Methods of conjugate gradients for solving linear systems*. National Bureau of Standards, 1952.
19. R. J. LeVeque, *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge [u.a.: Cambridge Univ. Press, 2003.

Recepción: 9 de Octubre de 2013
Aceptación: 19 de Diciembre de 2013