

# ESTUDIO COMPARATIVO DE LAS TÉCNICAS DE ENMALLADO ESTÁTICO EMPLEADAS EN SIMULACIÓN NUMÉRICA DE YACIMIENTOS

Luis Enelso Sierra Suárez<sup>1</sup>, Elkin Rodolfo Santafé Rangel<sup>2</sup>, Olga Patricia Ortíz<sup>3</sup>, Carlos Cesar Piedrahita Escobar<sup>4</sup>

## RESUMEN

En este trabajo se estudian los diferentes métodos y técnicas de enmallado que se han implementado en el modelamiento de flujo de fluidos en medios porosos como lo son: las mallas cartesianas, cilíndricas, curvilíneas, híbridas, PEBI (Perpendicular Bisection) o Voronoi, técnicas de refinamiento global, local y geometría punto esquina, las cuales pueden definir la exactitud de la simulación numérica.

También se establece una comparación para generar una serie de criterios que permitan determinar bajo qué condiciones, ciertos tipos de enmallado pueden resultar más favorables que otros. A su vez se valida la información teórica con un ejercicio experimental sobre un modelo sintético usando dos simuladores comerciales.

**Palabras claves:** Enmallado, Celda, Discretización, Refinamiento, Geometría de Punto Esquina, Voronoi, Diferencias Finitas, Formulación Integral, Formulación Variacional, Elementos Finitos.

## ABSTRACT

In this paper was studied different methods and techniques of gridding that have been implemented in the modelation of fluid flow in porous media, such us cartesian, cilíndric, curvilinear, hybrid, PEBI (Perpendicular Bisection) or Voronoi grids; techniques of global and local refinement and corner point geometry (CPG), which could define the numerical simulation precision.

It was established a comparison to generate a series of judgement that allow to determine under what condition, some types of gridding can be more favorable. It was validated the theoretical information with an experimental exercise on a synthetic model using two commercial simulators.

**Keywords:** Grid, Grid Block; discretization, refinement, corner point geometry, varonoi, integral formulation, variational formulation; finites differences; finites elements.

1 Universidad Industrial de Santander, UIS. E- mail: LuisE.Sierra@yahoo.co.uk

2 Universidad Industrial de Santander, UIS. E- mail: santafelkin@gmail.com

3 Universidad Industrial de Santander, UIS. E- mail: oportizc@uis.edu.co

4 ECOPETROL - ICP. E- mail: carlos.piedrahita@ecopetrol.com.co

## INTRODUCCIÓN

El desarrollo hardware, software y numérico durante el siglo XX ha permitido la simulación de fenómenos naturales e industriales de una forma más compleja.

Inicialmente el sistema de enmallado estuvo enfocado en mallas cartesianas y esquemas numéricos en diferencias finitas, el cual es algo rígido para la representación de estructuras geológicas (Mattax 1990). Actualmente se tienen sistemas de enmallado más complejos que tienen una mejor adaptabilidad y flexibilidad, lo cual implica conocer otros esquemas numéricos y computacionales, como *control volume finite element (CVFE)* y computación de alto rendimiento (paralelismo) (Liu & Mezzatesta 2003), para garantizar las leyes de conservación y que las simulaciones a escala real se desarrollen en un tiempo razonable.

Esto ha hecho que geólogos e ingenieros tengan una mejor representación de las estructuras del subsuelo, fundamental en la industria petrolera para la valoración de reservas de hidrocarburos y elaboración de esquemas de producción.

A continuación se muestra una comparación de los resultados de simulación y tiempos de cómputo de un modelo enmallado con una malla cartesiana, refinamiento global, refinamiento local, malla *corner point geometry* y malla voronoi empleando dos herramientas comerciales en simulación de yacimientos.

## TIPOS DE MALLAS

Hoy en día se han desarrollado una gran gama de enmallados, los cuales se han venido implementando en las diferentes herramientas comerciales. Cada tipo tiene una complejidad matemática y computacional, que en la mayoría de los casos es transparente para el usuario de las aplicaciones software de modelamiento numérico. Igualmente presentan ventajas y desventajas las cuales se deben equilibrar; Azik (1993) muestra un compendio de los sistemas de enmallados y plantea para la selección de la malla los siguientes criterios:

1. La geología y el tamaño del yacimiento, y los datos disponibles para su descripción.
2. Tipo de fluido desplazante o proceso de agotamiento a ser modelado
3. Desarrollo del campo (localización y tipo de pozos)
4. Exactitud numérica deseada
5. Opciones de software disponible
6. Objetivos del estudio de simulación
7. Competencias del grupo de ingenieros.

Dentro de los sistemas de enmallado se encuentran las mallas cartesianas, cilíndricas, curvilíneas ortogonales y voronoi (Palagi 1991) que es un caso general de las anteriormente mencionadas y todas se agrupan en las denominadas k-ortogonales, porque todas las intersecciones locales forman un ángulo recto. Las mallas voronoi ofrecen una excelente adaptabilidad al fenómeno de flujo de fluidos y las estructuras geológicas (Melichar & Douglas 2003), (Mlacnik et 2003) y el planteamiento numérico de las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) es relativamente sencillo por la ortogonalidad presente en la malla.

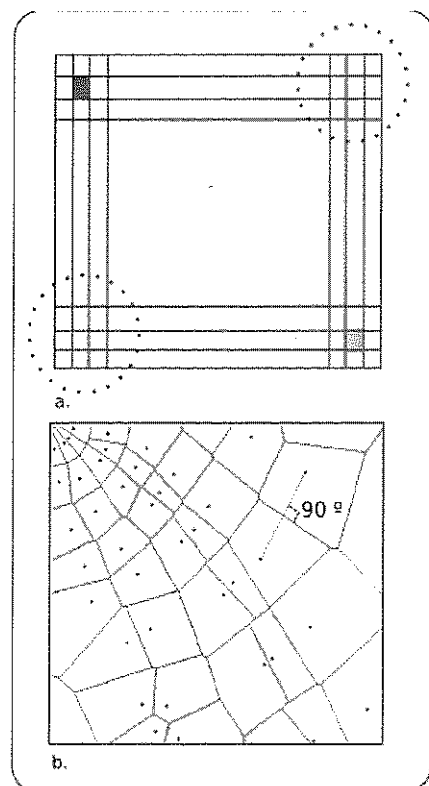


Figura 1. Mallas k-ortogonales. a. refinamiento global. b. Malla PEBI o voronoi.

También están las mallas *corner point geometry* (CPG) (Ding 1995) las cuales se adaptan bien a estructuras altamente falladas, ya que se trata de un hexaedro que puede tener todas sus aristas de diferente longitud (Figura 2) y la solución numérica se apoya en transformaciones espaciales para dar solución al sistema de EDP por el método de diferencias finitas en un dominio computacional.

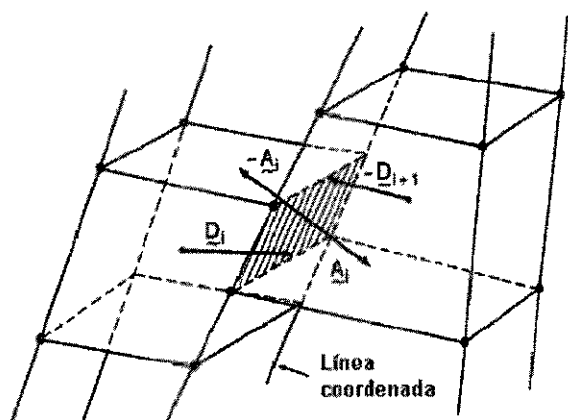


Figura 2. Celdas de una malla corner point geometry.

Hay técnicas que permiten realizar modificaciones al dominio de la malla para obtener refinamientos ya sea de tipo global o local (Heinemann 1983), con las implicaciones numéricas que permitan dar cumplimiento a los principios de conservación de la masa, el momentum y la energía en el modelo. Cuando dichos refinamientos cambian con el tiempo se les denominan mallas dinámicas, las cuales son ampliamente desarrolladas para mallas cartesianas (Ding 1993) y así apreciar en la simulación los altos gradientes de presión y saturación que se presentan en las cercanías del pozo (Christense 2004), teniendo importancia en procesos de recuperación por inyección de fluidos (Ding 2004). En las figuras 3 y 4 se muestra una clasificación general.

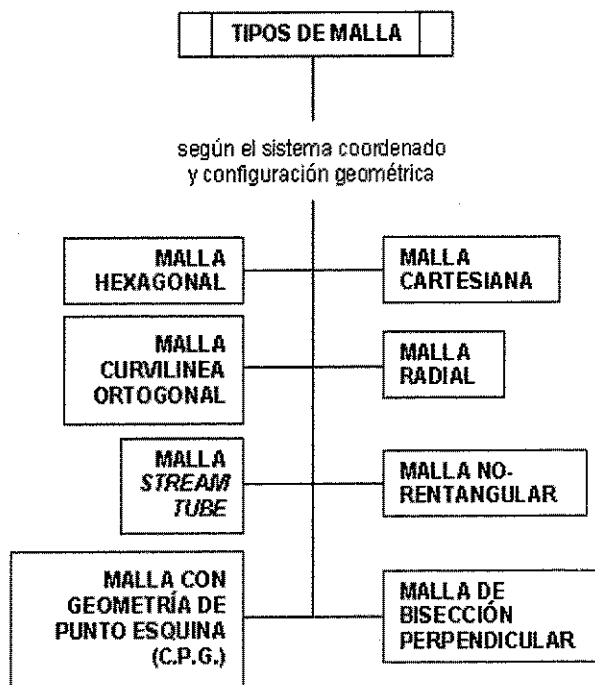


Figura 3. Clasificación general de las mallas según el sistema coordenado.

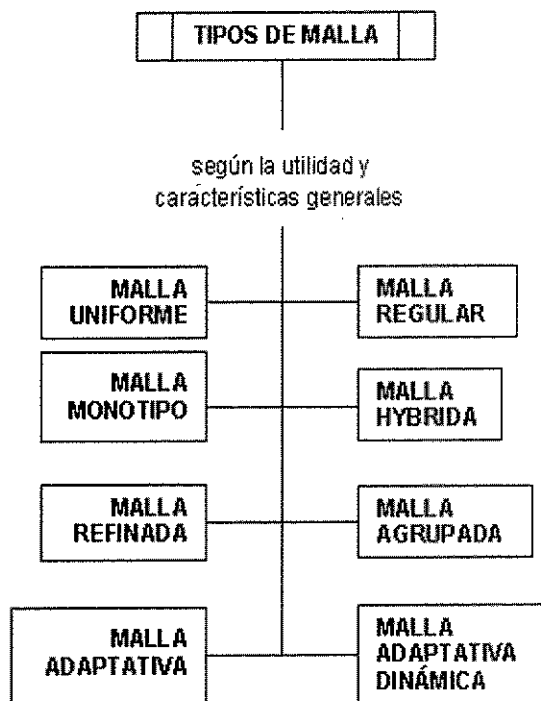


Figura 4. Clasificación general de las mallas según utilidad.

Si se combinan dos o más sistemas de enmallado se le denominan mallas híbridas, el caso más conocido es la combinación de mallas cilíndricas y cartesianas, donde las primeras discretizan las áreas cercanas al pozo y las segundas representan el resto del yacimiento con el objeto de disminuir la dispersión numérica y obtener resultados más exactos al representar de forma más adecuada el comportamiento radial del fluido en las zonas del pozo (Pedrosa 1986).

También se tienen las mallas streamline y streamtube cuya solución numérica es rápida y muestra patrones de flujo de fluidos en el yacimiento.

### MALLAS Y ESQUEMAS NUMÉRICOS

Los modelos matemáticos, basados en ecuaciones diferenciales parciales (EDP), para el flujo de fluidos en medios porosos (Ecuación 1) requieren de una solución numérica que en la mayoría de los casos se apoya en una discretización del dominio espacial y temporal. (Aziz & Settari 1979).

$$\sum_j^{N_j} \sum_p^{N_p} T_{c,p,i,j} (\Phi_{p,j} - \Phi_{p,i}) = \frac{V_{b,i}}{\Delta t} [(M_{c,i})^{(n+1)} - (M_{c,i})^n] + q_{c,i} \quad (1)$$

Donde la transmisibilidad entre el nodo  $i$  y  $j$  es

$$T_{c,p,i,j} = \left( \frac{f_c A k k_{rp} \omega_{c,p}}{L \mu_p} \right)_{i,j} \quad (2)$$

Para cada celda, una ecuación de este tipo es escrita para cada componente o pseudocomponente,  $c$ , en su respectiva fase  $p$  (oil, gas, water) en el sistema. Las propiedades geométricas de la celda requeridas son el volumen del bloque,  $V_b$ , el área de cada cara del bloque  $A$  y la distancia entre los nodos  $i, j$  para cada conexión,  $L$ .

Cada tipo de malla tiene implicaciones numéricas para que las soluciones sean convergentes y

estables, con márgenes de error decentes y tiempos computacionales razonables.

Las primeras implementaciones numéricas se hicieron en los años de 1950 empleando mallas cartesianas 1D bajo esquemas en diferencias finitas superando las limitaciones de las soluciones analíticas. Solo hacia 1960 que se hizo posible la inclusión de dos y tres fases con la introducción del modelo de aceite negro (*black oil*) (Coats, 1982). Desde la época a la fecha se han logrado grandes avances con aporte de las ciencias computacionales, matemáticas e ingeniería. En la tabla 1. se muestra los esquemas más populares hoy en día en el área de simulación de yacimientos: diferencias finitas, volúmenes finitos (Rozo, 1989 ) y elementos finitos. Este último se puede plantear por métodos variacionales o por residuos ponderados como son: el método de colocación, de subdominios, de mínimos cuadrados o el más común método Galerkin (Fletcher, 1991). Sin desconocer otros métodos de discretización como son: *boundary element method* (BEM), espectrales y *meshfree*.

Tabla 1. Métodos numéricos y aproximaciones.

Método Numérico	Aproximación de discretización	Características
Diferencias Finitas	Serie de Taylor	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fácil implementación.</li> <li>Presenta problemas de adaptación en dominios no regulares</li> </ul>
Volumen Finito	Formulación Integral	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aprovecha la facilidad de manejo de las diferencias finitas y la capacidad de adaptación de los elementos finitos.</li> </ul>
Elementos Finitos	Formulación variacional Residuos ponderados (Galerkin)	<ul style="list-style-type: none"> <li>Su implementación es algo compleja.</li> <li>Alta adaptabilidad a la Geometría y a los fenómenos.</li> <li>Requiere buen hardware.</li> </ul>

El método de diferencias finitas puede ser aplicado a mallas cartesianas y mallas transformadas

especialmente a un dominio computacional cartesiano, como es el caso de las mallas CPG y cilíndricas. Las demás mallas requieren de esquemas que permitan dar estabilidad y convergencia a la solución numérica manteniendo los principios de conservación. El más empleado es el método de volúmenes finitos porque combina ventajas del método en diferencias finitas (fácil implementación y comprensión) y del método en elementos finitos (buena adaptabilidad de la malla). El método de elementos finitos, que tiene una amplia gama de técnicas de discretización, viene tomando importancia en el manejo de modelos complejos, como es el caso de yacimientos composicionales y naturalmente fracturados (Hoteit & Firoozabadi, 2004), y en la simulación de fenómenos acoplados como lo es el comportamiento geomecánico y de flujo de fluidos en un yacimiento (Wan et, 2003). También se han venido construyendo modelos que combinan los diferentes esquemas numéricos aplicados a la industria del petróleo (Matringe & Juanes 2007. ), para así aprovechar las ventajas de cada uno de los métodos.

## MODELO

Se realizaron simulaciones sobre un modelo sintético tridimensional de aceite negro asociado con inyección de gas (Figura 6), descrito en el octavo estudio comparativo de la SPE (Quandalle 1993)

Los pozos están conectados a la primera capa y el bloque tiene un ligero buzamiento hacia el pozo productor 1. Para este estudio se emplearon los simuladores Eclipse 100 (simulador de aceite negro), el entorno *Eclipse Office* y los simuladores *IMEX* (simulador de aceite negro) y *STAR* (simulador térmico) de *CMG*.

Las propiedades de cada capa y las respectivas profundidades se muestran en la figura. 7.

## METODOLOGÍA

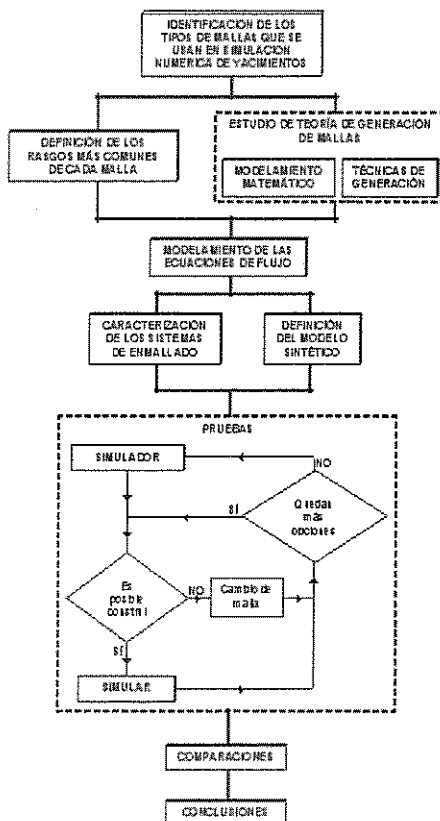


Figura 5. Metodología de trabajo

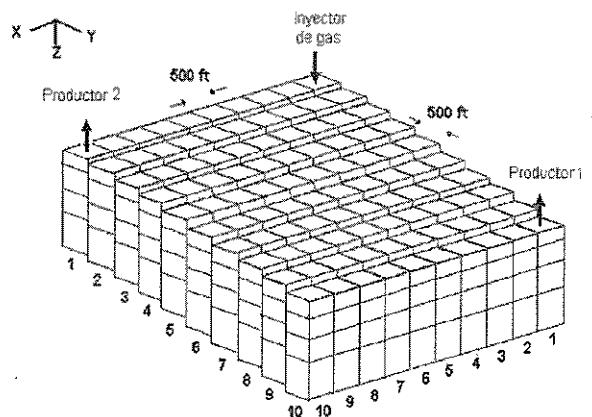


Figura 6. Vista 3D del modelo

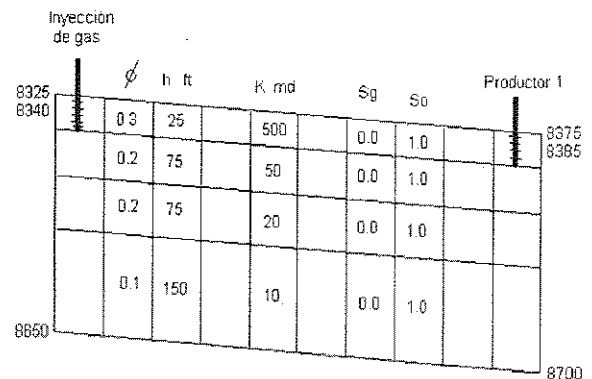


Figura 7. Perfil del modelo, profundidades y propiedades de las capas.

## Mallas empleadas

Las mallas que se aplicaron a dicho modelo fueron: (Santafé & Sierra, 2004)

a) Malla cartesiana de 100 bloques por capa (Figura 8a), simulada con un esquema de nueve puntos totalmente implícito para la minimización de los efectos de orientación y dispersión numérica, la cual se tomó como referencia para comparar con los otros sistemas de enmallado. Emplear un esquema de 27 puntos para mejorar la exactitud sería innecesario, ya que el flujo de fluido está centrado en la capa superior en la cual la permeabilidad es mucho mayor que las demás.

b) Agrupamientos (Figuras 8b, 8c)

c) Refinamiento global, local y radial (Figuras 8d, 8e, 8f) tanto en el pozo productor como en el pozo inyector.

d) Malla voronoi o *PEBI* (Figura 8.g).

e) Malla *corner point geometry* (Figura 8h)

Uno de los objetivos de las pruebas es realizar enmallados (Figuras 8.a., 8.b., 8.c., 8.g. y 8.h.) que reduzcan el número de bloques del modelo de referencia sin perder exactitud en una proporción considerable. Otro de los objetivos es implementar sistemas de enmallado aplicando refinamiento global, local e híbrido en las cercanías del pozo. (Figuras 8.d, 8.e. y 8.f) para observar las diferencias en tiempo de cómputo que se pueden presentar respecto a la malla de referencia.

Las pruebas se desarrollaron en una máquina i-386 de 2GHz con 1GB de RAM y 40 GB de D.D.

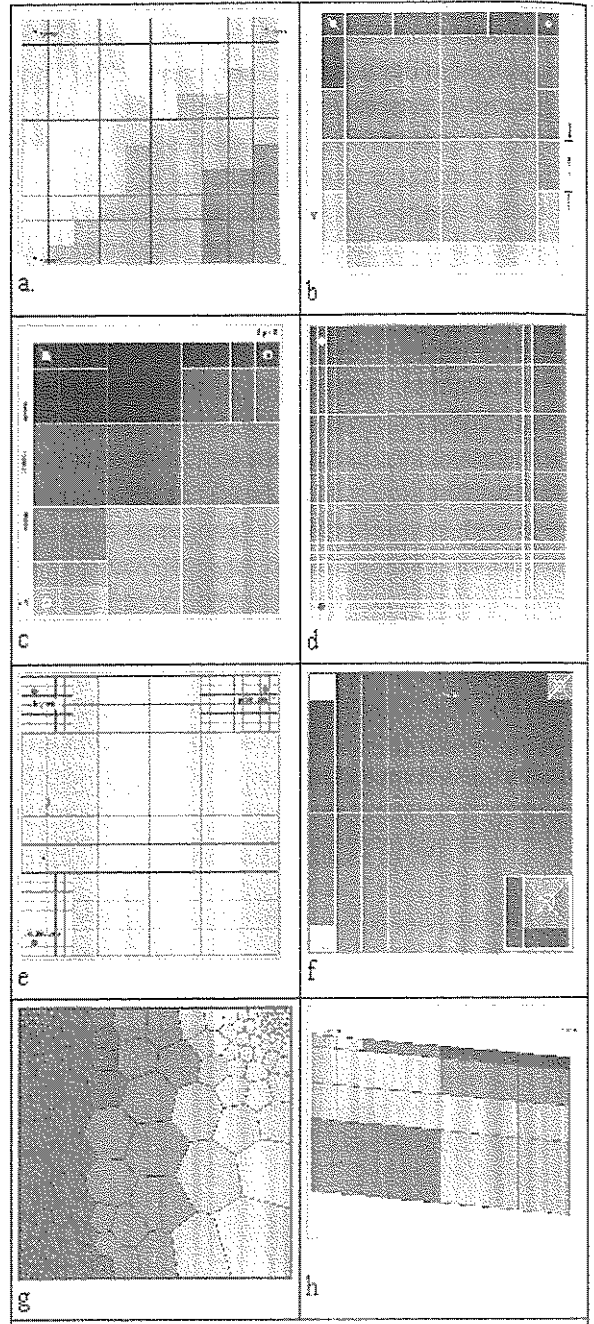


Figura 8. - Mallas Modeladas.

En la figura 8 se tienen las siguientes mallas: Malla cartesiana que es el modelo base de 100 bloques por capa.(Figura 8a), Malla construida con la técnica de agrupamiento de 24 bloques por capa (Figura 8b). Malla construida con la técnica de agrupamiento de 22 bloques por capa (Figura 8c). Malla construida con la técnica de refinamiento global (Figura 8d). Malla construida con la técnica de refinamiento local (Figura 8e). Malla construida con la técnica de

refinamiento local radial (Figura 8f). Malla tipo PEBI. (Figura 8g). Perfil de la malla C.P.G (Figura 8h).

## DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Para las figuras que se muestran a continuación las convenciones se encuentran en las tablas 2 y 3. En la figura 10 y 11 se muestra el comportamiento de la relación gas-aceite (*gas oil relation, GOR*) y en las figuras 12 y 13 se encuentra el comportamiento de presión de fondo (*bottom hold pressure, BHP*). Se tiene que todos los modelos predicen una irrupción de gas en el pozo antes que en el modelo simulado con el esquema de nueve puntos. El modelo basado en geometría C.P.G es la que se encuentra más desviado de la curva de referencia en el punto de irrupción para los dos pozos (Figura 9 y 10), a pesar de que es la malla que mejor se ajusta a la geometría del modelo por su carácter inclinado (Figura 8h). Esto se debe a la baja cantidad relativa de celdas lo que hace que se presente una dispersión numérica, ya que las líneas que comunican los nodos no tienen una ortogonalidad natural con las fronteras de las celdas. Un efecto similar se refleja en el caso de la malla tipo PEBI, pero con un menor impacto en el comportamiento del *GOR* comparado con la malla anterior, ya que este tipo de malla es k-ortogonal.

Este comportamiento permite observar que si se llega a disminuir demasiado el número de celdas se puede perder exactitud por efecto de la dispersión numérica que se puede generar.

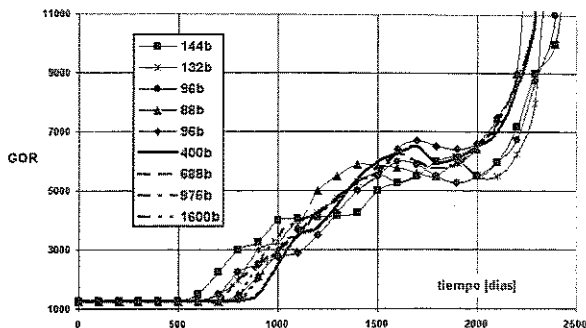


Figura. 10 - Comportamiento del GOR en el pozo Productor 2 para los modelos de enmallado implementados

Para el caso de la *BHP*, las diferencias básicas se presentan esencialmente después de que la presión cae por debajo de la presión de burbuja en el yacimiento, teniéndose que la presión de burbuja es alcanzado alrededor de los 900 días con la malla cartesiana bajo el esquema de nueve puntos, mientras que con los otros sistemas de enmallado esta ocurriendo en un tiempo  $500 < t < 900$  días, siendo coherente con lo mostrado con el comportamiento del *GOR*. Para el caso del modelo basado en geometría C.P.G., la desviación sigue siendo alta (Figuras 11 y 12).

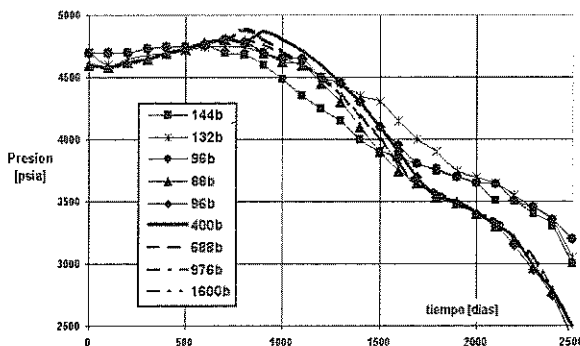


Figura 11 - Comportamiento de la BHP en el pozo Productor 1 para los modelos de enmallado implementados.

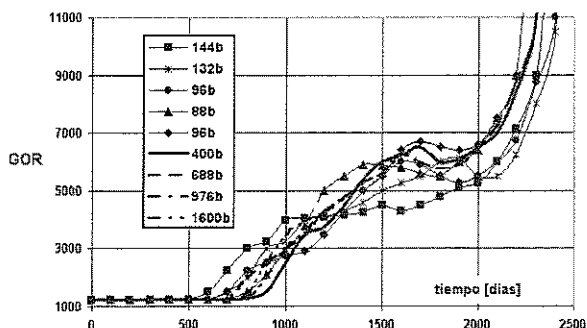
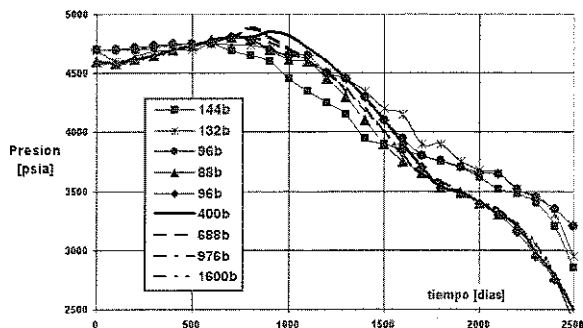
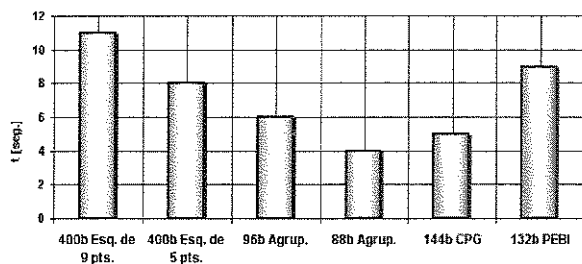


Figura. 9 - Comportamiento del GOR en el pozo Productor 1 para los modelos de enmallado implementados



**Figura. 12 -** Comportamiento de la BHP en el pozo Productor 2 para los modelos de enmallado implementados.

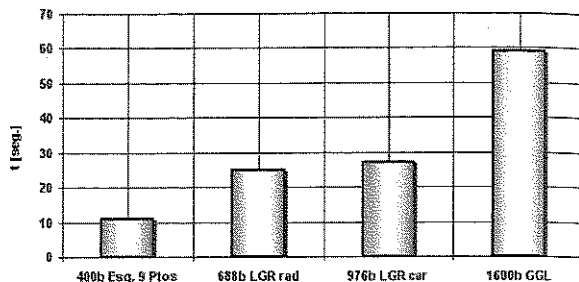
En contraste, en la figura 13 se puede apreciar que al disminuir la cantidad de celdas efectivamente el tiempo de cómputo disminuye pero la exactitud también disminuye dependiendo del tipo de esquema que se utilice como se vio reflejado en las curvas de GOR y BHP. En los modelos con geometría de punto esquina y de tipo *PEBI*, se puede apreciar que el tiempo de computo es alto con respecto a los demás debido a que en las simulaciones se requieren resolver sistemas de ecuaciones más complejos. Esto permite pensar que en el caso de sistemas de enmallado no estructurados, su uso puede no llegar a ser común a escala de modelos completos de campo, dejándolo para fines más específicos tales como modelos de pozo, zonas piloto o áreas de alta complejidad estructural.



**Figura. 13 -** Tiempos de cómputo empleados para diferentes sistemas de enmallado. El eje de tiempo de CPU está en segundos y representa realmente el tiempo de duración de la simulación.

En la figura 14 se aprecia como un refinamiento global puede alterar sensiblemente los tiempos de cómputo. (688b LGR rad: refinamiento local radial

de 688 bloques en total. 976b LGR car: refinamiento local cartesiano con 976 bloques en total. 1600b GGL: refinamiento global con 1600 bloques en total.)



**Figura 14.** Tiempos de cómputos para los diferentes refinamientos hechos sobre el modelo.

De acuerdo a estos resultados se puede apreciar que debido a la sencillez del modelo, el factor más determinante en el tiempo de cómputo es el número de celdas. Aunque se realizaron pruebas con sistemas de enmallado que permiten la adaptabilidad a zonas de considerable complejidad estructural, no se pudieron apreciar las ventajas completas de usar sistemas de este tipo, pues la forma de la celda no influía de manera decisiva en el modelo. Por el contrario debido a la complejidad en tipo y número de operaciones, los tiempos de cómputo que registraron no fueron favorables.

También se realizaron otras pruebas para observar el comportamiento de las diferentes técnicas de refinamiento que se pueden usar y éstas se aplicaron sobre el modelo cartesiano inicial, buscando mejorar la resolución en la cercanía del pozo (Figura 14). En estas pruebas se pudo apreciar que definitivamente los tiempos de cómputo se pueden elevar demasiado si no se acondiciona todo el sistema para que se compense el tiempo total de simulación de un refinamiento global sobre la malla inicial, el cual para este caso logro ser casi 5 veces mayor que el tiempo obtenido para la malla cartesiana con esquema de 9 puntos.

Finalmente se expone en la figura 15 la cantidad de memoria requerida por celda para cada uno de los sistemas de enmallado empleados en este estudio. Se puede observar como un esquema de nueve puntos, que maneja una mayor interacción entre



celdas comparado con el de cinco puntos ocupa mayor memoria.

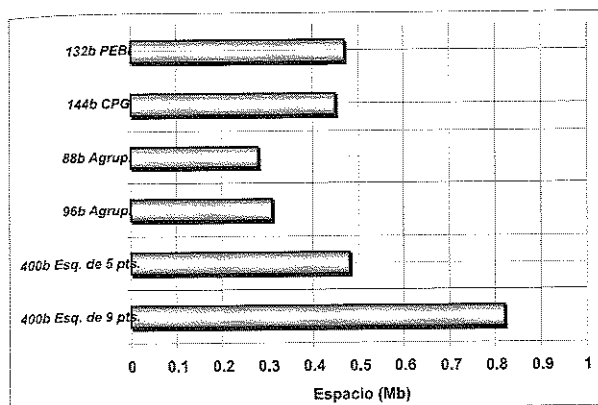


Figura 15 - Comparación a nivel del espacio ocupado en memoria por celda de los procesos de cómputo para cada una de las pruebas realizadas

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se establece de una manera concreta una ficha técnica que condensa los elementos clave de los diferentes sistemas de enmallado estático que se pueden emplear en simulación de yacimientos (Anexo 1).

No existe un sistema único de enmallado para solucionar todos los problemas generados en una simulación de yacimientos. Algunos sacrifican definición por ahorrar tiempo de cómputo y otros, pese a que logran adaptarse a casi a cualquier tipo de escenario, representan costos altos en tiempo de cómputo lo que los limita a usos muy específicos.

Es muy importante tener en cuenta que el tipo de discretización que se use para modelar el problema, definirá el sistema de ecuaciones que tiene que resolver y por consiguiente, dará la pauta para escoger el método de solución que se debe aplicar al modelo. Esto enfatiza la importancia que la Teoría de Generación de Mallas tiene dentro del proceso de construcción de un simulador completo.

De la revisión general de las experiencias publicadas en la literatura, se observó que los sistemas de enmallado que tienen una mayor acogida son los

basados en Geometría de Punto Esquina para modelos de campo y los sistemas radiales para modelos de pozo. Los sistemas de enmallado adaptativos tales como el PEPI, no han sido usados suficientemente por su tendencia a consumir altos tiempos de cómputo, lo que lo hace poco interesante para las empresas. Sin embargo, es muy probable que el sistema a nivel de modelos de pozo, dé muy buenos resultados con tiempos aceptables que lo pueden convertir en una buena opción. Pero si se tiene en cuenta el desarrollo de técnicas de paralelización las cuales reducen drásticamente los tiempos de cómputo, lo haría atractivo para ser utilizado en modelos completos de campo.

Se recomienda realizar un estudio sobre modelos más heterogéneos y de mayor complejidad de tal manera que se pueda evaluar de una forma más explícita el impacto de los diferentes sistemas de enmallado. Dado que las pruebas se realizaron sobre un modelo sintético homogéneo, el parámetro incidente sobre los tiempos de cómputo fue el número de celdas más no la forma de la celda como tal. Si el modelo es heterogéneo, la geometría y la distribución de la misma pueden entrar a jugar un papel sumamente representativo dentro del tiempo de cómputo.










## NOMENCLATURA

- $A$  área común entre bloques  $i, j$
- $f_c$  factor de corrección de transmisibilidad
- $k$  permeabilidad absoluta
- $k_{rc}$  permeabilidad relativa de  $c$
- $L$  distancia entre los nodos  $i$  y  $j$
- $M_c$  masa de  $c$  en el bloque
- $N_j$  número de bloques conectados
- $N_p$  número de fases
- $p$  índice de fase
- $q_c$  rata de flujo del pozo
- $T$  transmisibilidad
- $V_b$  volumen del bloque

**Tabla 2.** Convenciones para las gráficas de comparación de tiempos

400b Esq. de 9 pts	Esquema de 9 puntos con 400 bloques
400b Esq. de 5 pts	Esquema de 5 puntos con 400 bloques
96b Agrup.	Técnica de Agrupamiento con 96 bloques
88b Agrup.	Técnica de Agrupamiento con 88 bloques
144b CPG	Enmallado C.P.G. con 144 bloques
132b PEBI	Enmallado PEBI con 132 bloques

**Tabla 3.** Convenciones para las gráficas de comparación de comportamientos (BHP y GOR)

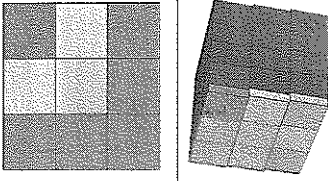
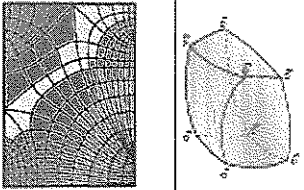
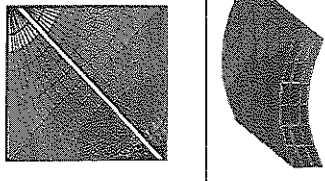
CONVENCIÓN	TIPO DE MALLA	BLOQUES
	Malla cartesiana de referencia (esquema de 9 puntos)	400
	Malla de geometría de punto esquina (Corner Point Geometry - C.P.G.)	144
	Malla de Bisección Perpendicular (PEBI)	132
	Malla cartesiana (técnica de agrupamiento)	96
	Malla cartesiana (técnica de agrupamiento)	88
	Malla cartesiana (técnica de refinamiento local)	96
	Malla de referencia con refinamiento radial en los pozos (técnica de hibridación)	688
	Malla de referencia con refinamiento cartesiano en los pozos	976
	Malla de referencia con refinamiento global	1600

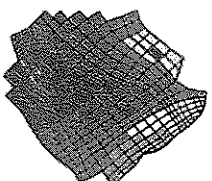
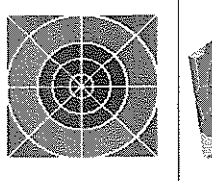
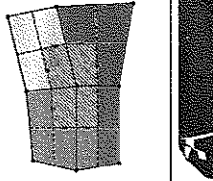
**REFERENCIAS**

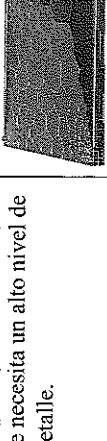
1. AZIK Khalid. Reservoir simulations grids: oportunités and problems. SPE 25233 1993.
2. AZIZ, K. and SETTARI, A. "Petroleum Reservoir Simulation" Applied Science Publishers. London, 1979
3. CHRISTENSE J. R. MA H. SAMMON P. H. Applications of dynamic gridding to thermal simulations SPE 86969. 2004.
4. COATS k. H. Reservoir Simulation: State of the Art. SPE 10020 Ago 1982.
5. DING Y. and LEOMONNIER P. Empleo de geometría punto esquina en simulación de yacimientos SPE 29993 Members 1995
6. DING Y. JEANNIN L.. New Numerical Schemes for Near-Well Modeling Using Flexible Grid SPE 87679-PA 2004.
7. DING Yu y LEOMONNIER P,A., Development of dynamic local grid refinement in reservoir simulation. En: SPE. No. 25279 1993
8. FLETCHER Clive A. J. Computacional techniques for fluid dynamics I. 2ed Berlin 1991 p 98-162
9. GHOSH S. Curvilinear Local Grid Refinement SPE 50633-MS 1998.
10. HEINEMANN, Z. , GERKEN, G. y HANTELMMANN, G. Using local grid refinement in a multiple-application reservoir simulator. En: SPE. No. 12255, (San Francisco, USA 1983
11. HOTEITH. FIROOZABADIA. Compositional Modeling of Fractured Reservoirs Without Transfer Functions by the Discontinuous Galerkin and Mixed Methods. SPE 90277-MS 2004.
12. MATTAX Calvin C. y DALTON Robert L. Reservoir simulation. 1 Ed, SPE. USA 1990

13. MATRINGE S.F. JUANES U., R. Mixed Finite Element and Related Control Volume Discretizations for Reservoir Simulation on Three-Dimensional Unstructured Grids SPE 106117 2007.
14. MELICHAR Herbert DOUGLAS Alan J.R. Use of PEBI Grids for a Heavily Faulted Reservoir in the Gulf of Mexico SPE 84373-MS 2003
15. MLACNIK M.J. DURLOFSKY L.J. And HEINEMANN Z.E. Dynamic Flow-Based PEBI Grids for Reservoir Simulation SPE 90009 2004
16. PALAGI C.L, y AZIK K. Use of voronoi grid in reservoir simulation. En: SPE. No. 22889 1991
17. PALAGI C.L, y AZIK K. Supplement to SPE No. 22889, Use of voronoi grid in reservoir simulation apéndices A, B y C. En: SPE No. 26951
18. PEDROSA, Oswaldo A., AZIZ Khalid . Use of a hybrid grid in reservoir simulation. / En: SPE. No. 13501 (Stanford U 1986)
19. QUANDALLE PHILLPPE, BEICIP-FRANLAB. Eighth SPE comparative solution project: gridding in reservoir simulation. En. SPE. No. 25263 1993.
20. ROZON, B. J. A generalizad finite volumen discretization method for reservoir simulation. En: SPE No. 18414, Houston USA 1989
21. SANTAFE Elkin & SIERRA Luis E. Estudio Comparativo de las Técnicas de Enmallado en Simulación de Yacimientos. UIS, Bucaramanga 2004
22. WAN L. DURLOFSKY L.J., HUGHES T.J.R., AZIZ K. Stabilized Finite Element Methods for Coupled Geomechanics - Reservoir Flow Simulations SPE 79694-MS 2003

ANEXO 1. Cuadro comparativo de los diferentes sistemas de enmallado.

TIPO	DESCRIPCIÓN	CONSTRUCCIÓN	VENTAJAS	DESVENTAJAS	APLICACIÓN	VISTAS
<b>Malla Cartesiana</b>	<p>Puede ser rectangular o cuadrada dependiendo de la distribución general.</p> <p>En cada nodo las líneas coordenadas son ortogonales. El sistema es totalmente ortogonal.</p>	<p>Intersección ortogonal de líneas rectas sobre el plano. También se puede plantear bajo un esquema de 9 puntos para corregir los efectos de orientación, o bajo esquemas de bloque centrado y punto distribuido</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se puede inclinar o girar en el plano para orientar la malla con la tendencia de flujo.</li> <li>• Permite implementar refinamientos o agrupamientos de celdas.</li> <li>• Sirve de aproximación a un esquema <i>stream tube</i>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es demasiado rígida y no siempre logra describir de forma adecuada la geometría del yacimiento.</li> </ul>	<p>Es de uso general. Clave en modelos de pozo en estudios de conificación o inyección de fluidos. Se usa también para describir mejor los límites de fase.</p>	
<b>Malla Curvilínea</b>	<p>Todo el esquema general de la malla puede ser ortogonal o no. Las líneas de flujo son suaves. Tienen a ser más densa en las cercanías a los pozos.</p>	<p>Los nodos se ubican sobre las líneas de flujo en el yacimiento.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite corregir los efectos de orientación.</li> <li>• Facilita minimizar el tamaño del modelo sin sacrificar exactitud.</li> <li>• Disminuye el error numérico de truncamiento y reduce el número de celdas activas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Las caras de los bloques son curvas, lo cual dificulta el cálculo del área transversal o del volumen de la celda.</li> <li>• Puede ser alta-mente no ortogonal.</li> </ul>	<p>Ya no es de uso común debido a que fue reemplazada por esquemas mejorados creados posteriormente. Se conservan las características de la estructura del sistema coordenado.</p>	
<b>Stream Tube</b>	<p>La principal característica es que no existe flujo entre las líneas de flujo que la conforman, solo sobre ellas. Esto le da el comportamiento de tubo.</p>	<p>Los nodos se colocan sobre las líneas de flujo y estas a su vez, son cortadas por superficies equipotenciales que terminan de generar la malla. Es el mismo esquema de generación de una malla curvilínea.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Permite aproximar en el espacio sobre la vertical en las Mallas cartesianas cuando el espesor del yacimiento no es comparable con su área.</li> <li>• Además facilita el cálculo del volumen o del área de la celda ya que dos caras de una celda pasan a ser rectilíneas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introduce las consecuencias de la no ortogonalidad en los nodos, si el esquema trabajado es no ortogonal.</li> <li>• Es rígida en la vertical y limitada a aplicaciones particulares.</li> </ul>	<p>En patrones sencillos y con una relación de movilidad favorable. Es válida en aproximaciones de discretización vertical cuando el espesor del yacimiento no es comparable con su extensión. Apta para modelar zonas en donde existen canales de alta permeabilidad y en modelos de pozo horizontal.</p>	

<p><b>Malla No rectilínea</b></p>	<p>Genera celdas con forma de cuadriláteros, considerando el flujo entre líneas de flujo existentes en el yacimiento. En la vertical se comporta como una malla cartesiana.</p>	<p>Se genera de la misma manera que una malla de Tubos de Flujo, pero ahora cada línea de flujo está formada por segmentos de recta.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Facilita el cálculo de áreas y volúmenes dado que se eliminan los lados curvos.</li> <li>• Se adapta a la irregularidad del yacimiento en el plano.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Introduce un alto nivel de no ortogonalidad.</li> <li>• Rígida en la vertical.</li> </ul>	<p>No se usa como tal, ya que existen esquemas más completos que introducen estas características geométricas posteriormente.</p>	
<p><b>Malla Radial</b></p>	<p>Es un tipo de esquema Híbrido entre una malla cartesiana y una curvilínea.</p>	<p>Bajo un sistema de coordenadas curvi-líneo, se construyen superficies equipo-tenciales circulares a partir del nodo de referencia el cual representa el pozo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Si las condiciones son isotrópicas el modelo es circular y si son anisotrópicas el modelo es elíptico.</li> <li>• Puede reducir considerablemente los tiempos de cómputo evitando un refinamiento cartesiano en la zona del pozo.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Requiere de un buen refinamiento en la vertical. Esto la limita en muchas ocasiones a modelos de pozo individuales.</li> <li>• Puede presentar problemas de convergencia si todos los pozos se modelan así.</li> </ul>	<p>Estudios de configuración y análisis de sensibilidad de parámetros de pozo en operaciones como inyección de vapor y aditivos químicos.</p>	
<p><b>C.P.G. (Corner Point Geometry)</b></p>	<p>En el plano puede ser una malla cartesiana o una no rectilínea. En la lateral puede adquirir forma de un stream Tube o no, dependiendo de las condiciones. En 3D es básicamente un conjunto de cajas, pero con la propiedad de que se pueden ajustar a la geometría del yacimiento de forma libre.</p>	<p>Cada vértice del bloque posee una ubicación espacial permitiéndole adquirir la posición más conveniente.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Se puede modelar prácticamente cualquier tipo de geometría de un yacimiento (fallados, particularmente).</li> <li>• Permite refinamiento en las zonas donde se requiera.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Difícil cálculo de la transmisibilidad debido a la geometría del bloque. Pueden existir muchas configuraciones de bloques las cuales pueden propiciar o no, paralelismo entre sus caras.</li> </ul>	<p>Campos altamente fallados y con geometrías complejas. Es la geometría de mayor uso.</p>	

<p><b>PEBI</b> (Bisección Perpendicular)</p>	<p>Pueden tomar diversas formas dependiendo de la distribución de los nodos y de la celda patrón que se escoja. Los elementos que la componen son prismáticos. Es un esquema simplificado del método CVFE.</p>	<p>Se usa generalmente la triangulación de Delaunay, el algoritmo de partición "Divide y Vencerás" y el método de La Fortune.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprovecha las propiedades que tiene de los elementos finitos para adaptarse (se autorefina).</li> <li>• Garantiza que las líneas de flujo entre los nodos van a ser siempre ortogonales a las caras de las celdas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Requiere de medianos y altos tiempos de cómputo.</li> <li>• Puede presentar fallas en la adaptación a los límites del yacimiento.</li> </ul>	<p>Puede usarse prácticamente para cualquier tipo de proceso y en cualquier situación, dada su alta adaptabilidad. Se recomienda para modelos de pozo y en la vertical, si se necesita un alto nivel de detalle.</p>	
--	--	---	--	---	--	---