

ERRORES EN LA ESTIMACIÓN DE ARMÓNICOS UTILIZANDO LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

ERRORS IN THE HARMONICS ESTIMATION PROCESS USING THE DISCRETE FOURIER TRANSFORM



AUTOR

MARÍA ALEJANDRA MANTILLA VILLALOBOS
Ingeniera Electrónica, Ms(c).
*Universidad Industrial de Santander
Estudiante de Maestría
Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones
mmantilla@ieee.org
COLOMBIA

AUTOR

JOHANN FARITH PETIT SUAREZ
Ingeniero Electricista, Ph.D.
*Universidad Industrial de Santander
Profesor Asociado
Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones
jfpetit@uis.edu.co
COLOMBIA

INSTITUCIÓN

*UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
UIS
Institución oficial
Carrera 27 calle 9 Bucaramanga
COLOMBIA

AUTOR

CESAR ANTONIO DUARTE GUALDRÓN
Ingeniero Electricista, Ms(c).
*Universidad Industrial de Santander
Profesor Auxiliar
Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones
cedagua@uis.edu.co
COLOMBIA

AUTOR

GABRIEL ORDOÑEZ PLATA
*Universidad Industrial de Santander
Profesor titular
Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones
gaby@uis.edu.co
COLOMBIA

Recepción: Noviembre 11 de 2009

Aceptación: Diciembre 29 de 2009

Temática: Tratamiento de señales

Tipo de Artículo: Artículo de Reflexión

RESUMEN

Este documento presenta un estudio de los errores generados al utilizar la transformada discreta de Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform) en la estimación de los armónicos de una señal con componente fundamental de frecuencia variable cercana a los 60 Hz. Inicialmente, se muestra un diseño del sistema de discretización de la señal asumiendo un error del 1% en cada una de sus etapas. Luego, se presenta un estudio teórico de los errores generados al utilizar la DFT en la estimación de los armónicos de la señal, debidos a variaciones en la frecuencia de la señal y a la pérdida de sincronización en el proceso de muestreo. Estos errores se analizan tanto para el caso de la ventana rectangular como para el caso de la ventana Hanning, recomendadas por la norma CEI 61000-4-7 para la medición de armónicos en las redes de suministro eléctrico. Por último, se presentan los resultados de simulación y las conclusiones finales.

PALABRAS CLAVES

Estimación de armónicos
Discretización de la señal
Transformada discreta de Fourier
Ventana rectangular
Ventana Hanning

ANALYTICAL SUMMARY

This paper shows a study of the errors generated by using the Discrete Fourier Transform in the harmonic estimation of a variable frequency signal which value is close to 60Hz. First, the discretization system design assuming a 1% error for each stage is presented. Then, it is shown a theoretical study of the errors generated by using the DFT in the estimation of the harmonic signal due to the signal frequency variation as well as to the loss of synchronization in the sampling process. Regarding the errors, these are analyzed using two kind of windows: Rectangular and Hanning, which are recommended by the Standard IEC 61000-4-7. Finally, the simulation results and the conclusions are presented.

KEYWORDS

Harmonic estimation
Signal discretization
Discrete Fourier Transform
Rectangular window
Hanning window

INTRODUCCIÓN

La transformada discreta de Fourier es utilizada en una gran variedad de aplicaciones de tratamiento de señales, principalmente en aplicaciones de filtrado y de análisis espectral. En muchas de estas aplicaciones,

las señales de interés no son de longitud finita o de longitud definida, aspecto que genera una inconsistencia con el requerimiento de longitud finita de la DFT. En general, cuando se desea analizar una señal de longitud indefinida mediante la DFT, se requiere el empleo previo de un proceso de enventanado el cual delimita y reduce la cantidad de datos de la DFT. Este proceso tiene importantes efectos en la representación de Fourier de la señal, ya que suaviza o extiende los impulsos de esta representación y reduce la capacidad de identificar señales sinusoidales cercanas en frecuencia [1], [2]. En muchas aplicaciones es posible reducir o incluso eliminar el efecto de este proceso de envetando utilizando un tamaño adecuado de la DFT, sin embargo, en muchas otras aplicaciones no es posible reducir este efecto debido a factores como la variabilidad en las frecuencias de la señal de interés.

Una de las posibles aplicaciones de la transformada discreta de Fourier es la estimación de las componentes espectrales que se superponen a la componente fundamental de la señal eléctrica en las redes de suministro de energía de 50 y de 60 Hz [3]. El problema de utilizar la DFT para realizar esta estimación de armónicos, se debe principalmente a la variabilidad de la frecuencia de la señal eléctrica, ya que esta variación puede producir errores en la estimación de los armónicos debido al proceso de discretización de la señal, a la pérdida de sincronización en el proceso de muestreo, al efecto generado por el proceso de enventanado y a la utilización de una DFT de longitud finita determinada.

Con el fin de realizar un estudio de estos errores, se analiza una aplicación específica del uso de la DFT para la estimación de las componentes armónicas de una señal con componente fundamental de frecuencia variable cercana a los 60 Hz, considerando hasta su decimotercer armónico. En la figura 1, se presenta el sistema general utilizado para la estimación de los armónicos de la señal, considerando los procesos de

discretización, enventanado y cálculo de la DFT. Los errores en la estimación de los armónicos son analizados partiendo desde el proceso de discretización de la señal, el cual está conformado por las etapas de filtrado analógico, conversión analógica digital y el proceso de diezmado. El proceso de discretización fue diseñado bajo la suposición de obtener un error del 1% en cada una de sus etapas.

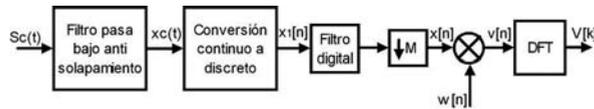


FIGURA 1. Sistema utilizado para la estimación de los armónicos de la señal.

Posteriormente se analizan los errores generados por el enventanado y por la utilización de la transformada discreta de Fourier al variar la frecuencia de la señal de entrada. Para analizar estos errores, se realizaron diferentes tipos de consideraciones. En primer lugar, se calculó teóricamente el rango entre el cual puede variar la frecuencia de la señal para obtener un error máximo del 1% en la estimación de su componente fundamental, sin modificar la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital, es decir, considerando una pérdida de sincronización en el proceso de muestreo. Posteriormente, se calculó la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital con el fin de que al variar la frecuencia de la señal de entrada se obtenga un error máximo del 1% en la estimación de su componente fundamental. Además, también se calculó el rango entre el cual puede variar la frecuencia de la señal para obtener un error máximo del 1% en la estimación de sus 13 componentes armónicas. Los anteriores análisis se realizaron tanto para el caso de ventana rectangular, como para la ventana Hanning, con el fin de comparar el desempeño de estos dos tipos de ventanas en el problema de interés.

Finalmente se presentan los resultados de simulación obtenidos mediante la herramienta Matlab/Simulink, con el fin de estimar los errores totales generados al variar la frecuencia de la señal de entrada.

1. DISEÑO DEL SISTEMA DE MUESTREO

El sistema de muestreo está compuesto de tres etapas: un filtro pasa bajas Butterworth anti solapamiento, un convertidor analógico digital y un diezmador. Cada una de estas etapas fue diseñada para obtener un error del 1% suponiendo un valor fijo de 60 Hz para la frecuencia de la señal de entrada. Para realizar este diseño, se considera hasta el decimotercer componente armónico de la señal (780 Hz).

1.1 DISEÑO DEL FILTRO BUTTERWORTH ANALÓGICO

Los criterios tenidos en cuenta para el diseño del filtro Butterworth fueron:

- Ganancia de 0.99 (error del 1%) a una frecuencia de 780 Hz (Decimotercer armónico)
- Orden = 8
- Se asume que la respuesta en frecuencia es 0 cuando su magnitud es menor a -100dB.

Para realizar el diseño, se partió de la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro pasa bajas Butterworth de orden 8 dada por la ecuación (1) [4].

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{16}}} \quad (1)$$

Con el fin de obtener un error del 1% en la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro en 780 Hz, se calculó el valor de la frecuencia de corte del filtro Butterworth a partir de la ecuación (1), la cual fue de $f_c=995,109$ Hz. Posteriormente se calculó la frecuencia a partir de la cual la magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro es menor de -100 dB, obteniendo como resultado $f_2=4196,34$ Hz.

En la figura 2, se puede observar la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia del filtro Butterworth de orden 8 diseñado.

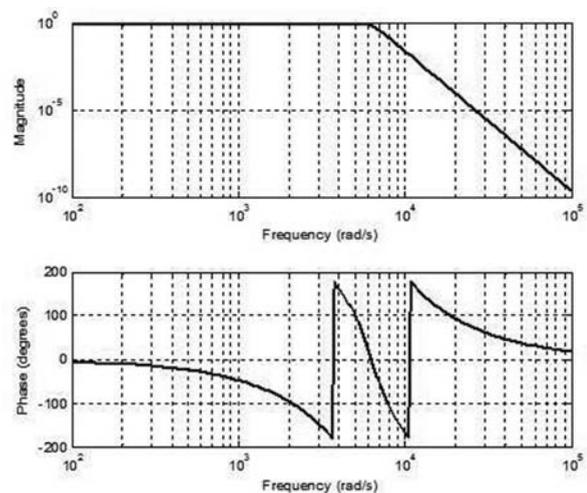


FIGURA 2. Magnitud y fase de la respuesta en frecuencia del filtro Butterworth.

Un aspecto importante que se debe considerar si se quieren estimar los ángulos de fase de las componentes armónicas de la señal de interés, es la modificación en la fase de estas componentes producida por el filtro pasa bajas, según la fase de su respuesta en frecuencia observada en la figura 2.

1.2 ESPECIFICACIONES DEL CONVERTIDOR ANALÓGICO DIGITAL

El primer parámetro considerado para definir las especificaciones del convertidor analógico digital fue el valor mínimo de la frecuencia de muestreo (f_s) necesaria para evitar el solapamiento en la banda de interés de la señal. Debido a que se supone que la máxima frecuencia de interés de la señal es 780 Hz y que la respuesta en frecuencia es 0 cuando su magnitud es menor a -100dB, es decir, a partir de la frecuencia $f_2=4196,34$ Hz, la frecuencia de muestreo debe cumplir con la desigualdad (2) para evitar el solapamiento en la banda de interés.

$$f_s \geq 780 + 4196,34 = 4976,34 \text{ Hz} \quad (2)$$

Partiendo de los requerimientos de la norma CEI 61000-4-7 [3], en la cual se especifica que la ventana temporal debe sincronizarse con 12 ciclos de la señal de 60 Hz, y considerando el hecho de que el tamaño de la DFT debe ser una potencia de 2, se selecciona una resolución para la DFT de 5 Hz, un tamaño de la ventana de 512 muestras, un tamaño para la DFT de 512 y una frecuencia de muestreo de la señal discreta resultante de 2560 Hz, con el fin de obtener 12 ciclos exactos de la señal de 60 Hz y de evitar el solapamiento en la banda de interés. Debido a que la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital debe cumplir con la desigualdad (2), se selecciona una frecuencia de muestreo de 5120 Hz y un factor de compresión $M=2$ para el proceso de diezmado.

Se supone un convertidor analógico digital de 12 bits con un rango dinámico comprendido entre 0 y 5 V. Según estas especificaciones, se tiene una resolución del convertidor dada por la ecuación (3).

$$\Delta = \frac{5}{2^{12}} \quad (3)$$

1.3 ERRORES ASOCIADOS AL CONVERTIDOR ANALÓGICO DIGITAL

Los errores asociados con el convertidor analógico digital se deben al proceso de cuantificación de la señal. Las muestras del error de cuantificación se consideran como

una señal de ruido aditivo. Debido a que el número de bits del convertidor analógico digital supuesto es elevado (12 bits), el error de cuantificación se puede suponer como una variable aleatoria con distribución uniforme entre $-\Delta/2$ y $\Delta/2$, según se observa en la figura 3. Por lo tanto la magnitud del máximo error asociado al proceso de conversión analógico digital es $\Delta/2$, donde Δ está dado por la ecuación (3) [1].

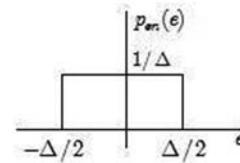


FIGURA 3. Función de densidad de probabilidad del error de cuantificación.

1.4 DISEÑO DEL SISTEMA DE DIEZMADO

El sistema de diezmado está compuesto por dos etapas: el filtro digital anti solapamiento y el compresor en frecuencia, según se observa en la figura 4. Según las especificaciones de diseño planteadas anteriormente el factor de compresión del sistema de diezmado es de 2.

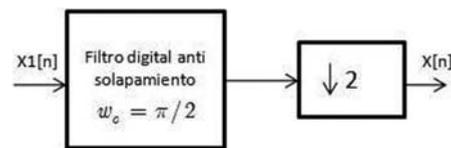


FIGURA 4. Sistema de diezmado.

Para el diseño del filtro digital se tuvieron las siguientes consideraciones:

- Filtro Butterworth pasabajas.
- Ganancia de 0.99 (error del 1%) a una frecuencia de 780 Hz ($\omega_1 = 2\pi * 0.3046$ rad/muestra)
- Ganancia de 10^{-5} (-100 dB) a una frecuencia de 1780 Hz ($\omega_2 = 2\pi * 0.6952$ rad/muestra). Se asume que la respuesta en frecuencia es 0 cuando su magnitud es menor a -100dB. El valor de esta frecuencia se escoge con el fin de evitar el solapamiento en la banda de interés al realizar el proceso de diezmado por un factor de 2.

El diseño del filtro fue realizado empleando la herramienta fdatool de Matlab para el análisis y diseño de filtros. En las figuras 5 y 6, se observan la magnitud

y la fase de la respuesta en frecuencia del filtro, el cual cumple con las especificaciones de diseño planteadas anteriormente para un orden 11.

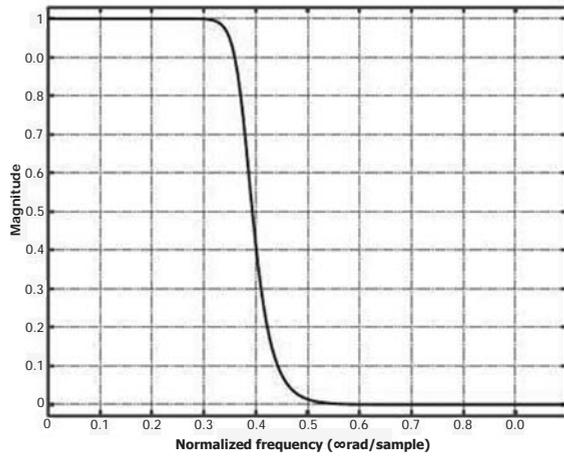


FIGURA 5. Magnitud de la respuesta en frecuencia del filtro Butterworth digital.

Al igual que para el caso del filtro Butterworth analógico, un aspecto importante que se debe considerar si se quieren estimar los ángulos de fase de las componentes armónicas de la señal de interés, es la modificación en la fase de estas componentes producida por el filtro pasa bajas digital, según su respuesta en fase mostrada en la figura 6.

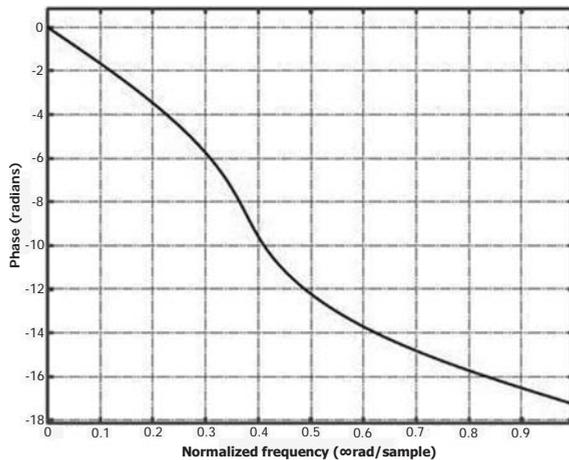


FIGURA 6. Fase de la respuesta en frecuencia del filtro Butterworth digital.

2. EFECTO DEL ENVENTANADO EN LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE LA SEÑAL

Debido a que para el análisis de los errores se considera hasta el decimotercer componente armónico, la señal discreta, suponiendo un proceso de muestreo ideal sin solapamiento ni error de cuantificación, se puede describir según la ecuación (4).

$$x[n] = A_0 + \sum_{i=1}^{13} A_i * \cos(\omega_i n + \theta_i) \quad (4)$$

Donde $\omega_i = \Omega_i * T$, para $T = 1/2560$ s. Para una frecuencia fundamental de 60 Hz, $\Omega_1 = 2\pi 60$ rad/s y $\omega_1 = 2\pi 60/2560$ rad/muestra, y la transformada de Fourier de la señal de la ecuación (4), corresponde a una serie de impulsos desplazados cada $\Delta\omega = 2\pi 60/2560$ rad/muestra. La magnitud de la respuesta en frecuencia de la señal, se grafica en la figura 7, suponiendo amplitudes unitarias para todas las componentes armónicas.

Multiplicando la señal en tiempo discreto (ecuación (4)), por una ventana $w[n]$, se obtiene la secuencia enventanada $v[n]$ descrita por la ecuación (5), cuya transformada de Fourier está dada por la ecuación (6) en función de la transformada de Fourier de la ventana $W(e^{j\omega})$ [1].

$$v[n] = A_0 w[n] + \sum_{i=1}^{13} A_i w[n] * \cos(\omega_i n + \theta_i) \quad (5)$$

$$V(e^{j\omega}) = A_0 W(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{13} [A_i e^{j\theta_i} W(e^{j(\omega-\omega_i)}) + A_i e^{-j\theta_i} W(e^{j(\omega+\omega_i)})] \quad (6)$$

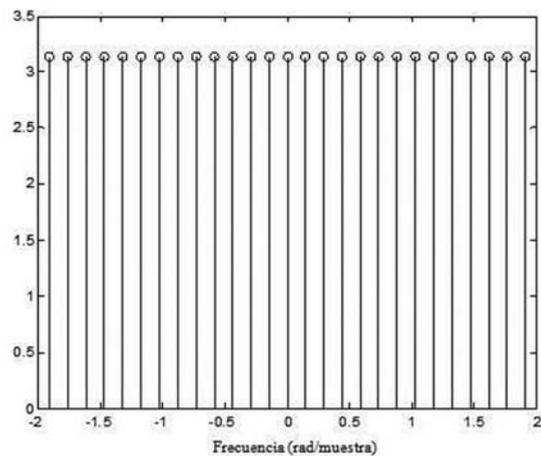


FIGURA 7. Magnitud de la respuesta en frecuencia de la señal discreta considerando $\omega_1 = 2\pi 60/2560$

Según ecuación (6), la transformada de Fourier de la señal enventanada está formada por la transformada de Fourier de la ventana replicada en las frecuencias $\pm\omega_i$ para $i = 0, 1, \dots, 13$ y escalada por las amplitudes complejas de las exponenciales complejas que forman la señal.

3. ERRORES GENERADOS AL UTILIZAR LA DFT CON VENTANA RECTANGULAR

Según el diseño realizado anteriormente, se especificó una longitud para la ventana de 512 muestras. La transformada de Fourier de una ventana rectangular de tamaño 512 está dada por la ecuación (7) y la magnitud de la respuesta en frecuencia de esta ventana se observa en la figura 8 para un rango de frecuencias entre $-26\pi/512$ y $26\pi/512$ [1].

$$W_r(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(511/2)} \frac{\text{sen}(256\omega)}{\text{sen}(\omega/2)} \quad (7)$$

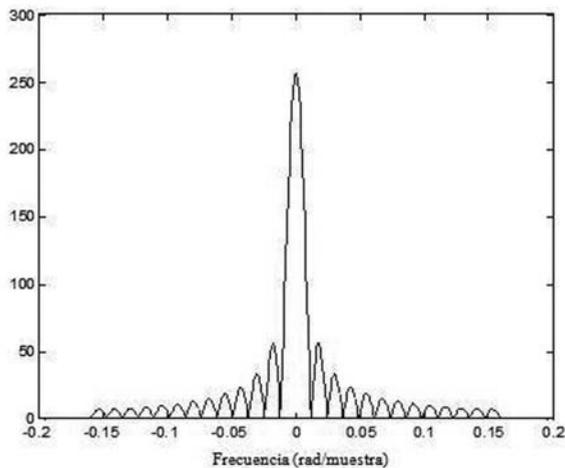


FIGURA 8. Magnitud de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular.

El ancho del lóbulo principal para la ventana rectangular es de $4\pi/512$ rad/muestra, por lo que la resolución en frecuencia de la ventana es de 10 Hz (ancho del lóbulo principal de la ventana para una frecuencia de muestreo de la señal discreta resultante de 2560 Hz).

Teóricamente si se realiza una DFT de 512 puntos se estaría muestreando la transformada de Fourier de la señal enventanada $V(e^{j\omega})$ cada $2\pi/512$ rad/muestra y se obtendría una estimación perfecta de las componentes armónicas de la señal, en donde la magnitud de cada

una de las componentes estimadas está dada por $|256A_i|$ según las ecuaciones (6) y (7). Lo anterior es válido solo si se considera un proceso de muestreo ideal sin solapamiento ni error de cuantificación.

Con el fin de calcular teóricamente un rango entre el cual podría variar la frecuencia de la señal de interés para obtener un error del 1% en la estimación de su componente fundamental, sin modificar la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital, considere la figura 9, en la cual se presenta una gráfica de las replicas de la transformada de Fourier de la ventana rectangular para las frecuencias ω_0 , ω_1 y ω_2 . Según se observa en esta figura, los lóbulos que podrían llegar a afectar en un mayor grado la estimación de la componente fundamental de la señal, son los lóbulos doceavos de las componentes armónicas ubicadas ω_0 y ω_2 . Sin embargo la relación entre el lóbulo principal y el lóbulo doceavo para la ventana rectangular es de aproximadamente 31 dB, por lo que se desprecian los lóbulos secundarios para el cálculo de este rango de frecuencia.

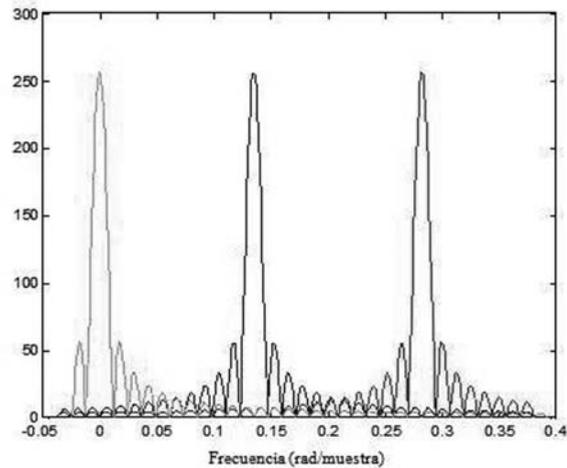


FIGURA 9. Replicas de la transformada de Fourier de la ventana rectangular en las frecuencias ω_0 , ω_1 y ω_2 .

Por lo tanto, la variación en frecuencia permitida para obtener un rango de error del 1% en la estimación de la componente fundamental de la señal se calcula despreciando los posibles errores generados por los lóbulos de las otras componentes armónicas.

La variación en frecuencia permitida se calcula a partir de la ecuación (8) y se puede observar en la figura 10. En esta figura, la transformada de Fourier se centra con respecto a $\omega = 0$, es decir, se adelanta $2\pi \cdot 60 / 2560$ rad/muestra con el fin de facilitar el cálculo de la variación de frecuencia.

$$|256A_i| * 0.99 = \left| \frac{\text{sen}(\Delta\omega_{p1} * 256)}{\text{sen}(\Delta\omega_{p1} / 2)} \right| \quad (8)$$

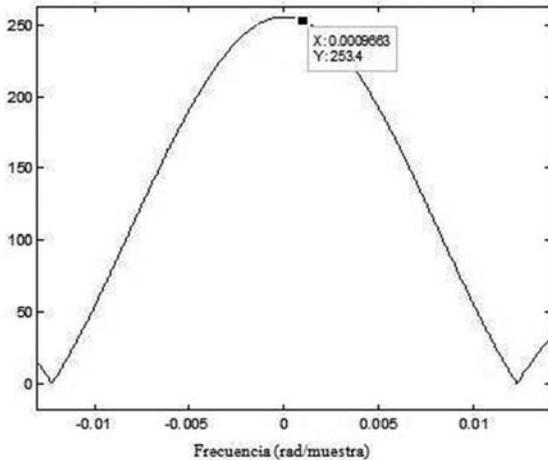


FIGURA 10. Variación en frecuencia para un error del 1% en la estimación de la componente fundamental.

A partir de la ecuación (8) se obtiene una variación teórica de 0,39032 Hz, lo cual indica que es posible que la frecuencia de la señal varíe en el rango comprendido entre los valores $59,6097 \leq f \leq 60,3903$ Hz, para obtener un error máximo del 1% en la estimación de su componente fundamental.

Posteriormente, se calculó la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital con el fin de que al variar la frecuencia de la señal de entrada dentro del rango siguiente de frecuencias dado por $60,3903 \leq f \leq 61,171$ Hz, se obtenga un error del 1% en la estimación de su componente fundamental. Para esto, se considera la frecuencia central de este nuevo rango dada por 60,7806 Hz, y partiendo de un tamaño de ventana de 512 datos y del requerimiento de que la ventana temporal se sincronice con 12 ciclos de la señal de 60,7806 Hz, la nueva frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital debe ser de 5186 Hz, por lo que la variación necesaria de esta frecuencia es de 66 Hz.

En la figura 11, se presenta un resumen de la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital y los rangos de frecuencias calculados para la frecuencia de la señal, con el fin de obtener un error de 1% en la estimación de su componente fundamental.

A pesar de que al variar la frecuencia de la señal dentro del rango comprendido entre $59,6097 \leq f \leq 60,3903$ Hz, se obtiene un error del 1% en la estimación de la

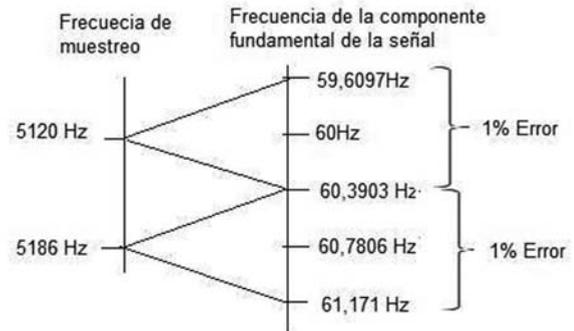


FIGURA 11. Variación en frecuencia para un error máximo del 1% en la estimación de la componente fundamental. Caso: ventana rectangular.

componente fundamental, los errores generados en la estimación de las otras componentes armónicas de la señal son mayores. Por ejemplo, el error que se obtiene al estimar el sexto armónico de la señal es del orden del 33%.

Por lo tanto, se calcula el rango entre el cual podría variar la frecuencia de la señal para obtener un error máximo del 1% en la estimación de cualquiera de sus 13 componentes armónicas, considerando una pérdida de sincronización en el proceso de muestreo. Teniendo en cuenta el análisis realizado anteriormente, la frecuencia de la componente armónica mayor de la señal, es decir, del decimotercer armónico, podría variar en 0,39032 Hz para obtener un error máximo del 1% en su estimación. Lo anterior implica que es posible que la frecuencia de la componente fundamental varíe $0,39032/13 = 0.03$ Hz. Por lo tanto, la frecuencia de la señal puede variar en el rango comprendido entre $59,97 \leq f \leq 60,03$ Hz, para obtener un error máximo del 1% en la estimación de cualquiera de las 13 componentes armónicas.

Finalmente, se calculó la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital con el fin de que al variar la frecuencia de la señal de entrada dentro del rango siguiente de frecuencias dado por $60,03 \leq f \leq 60,09$, se obtenga un error máximo del 1% en la estimación de sus 13 componentes armónicas. Para esto, se considera la frecuencia central del nuevo rango dada por 60,06 Hz, y partiendo de un tamaño de ventana de 512 datos y del requerimiento de que

la ventana temporal se sincronice con 12 ciclos de la señal de 60,06 Hz, la nueva frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital debe ser de 5125,12 Hz, por lo que la variación necesaria de esta frecuencia es de 5,12 Hz aproximadamente.

4. ERRORES GENERADOS AL UTILIZAR LA DFT CON VENTANA HANNING

Al igual que en el caso anterior, se especificó una longitud para la ventana de 512 muestras. La transformada de Fourier de la ventana Hanning de tamaño 512 está dada por la ecuación (9) y la magnitud de la respuesta en frecuencia de esta ventana se observa en la figura 12 para un rango de frecuencias entre $-26\pi/512$ y $26\pi/512$ [1].

$$W_r(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{-j\omega \frac{511}{2}} \frac{\text{sen}(256\omega)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{511}{2}\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)} \frac{\text{sen}\left(\left(\omega - \frac{2\pi}{M}\right)256\right)}{\text{sen}\left(\left(\frac{\omega\pi}{2} - \frac{\pi}{M}\right)\right)} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{511}{2}\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)} \frac{\text{sen}\left(\left(\omega + \frac{2\pi}{M}\right)256\right)}{\text{sen}\left(\left(\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{M}\right)\right)} \quad (9)$$

El ancho del lóbulo principal para la ventana Hanning es de $8\pi/512$ rad/muestra, por lo que la resolución en frecuencia de la ventana es de 20 Hz.

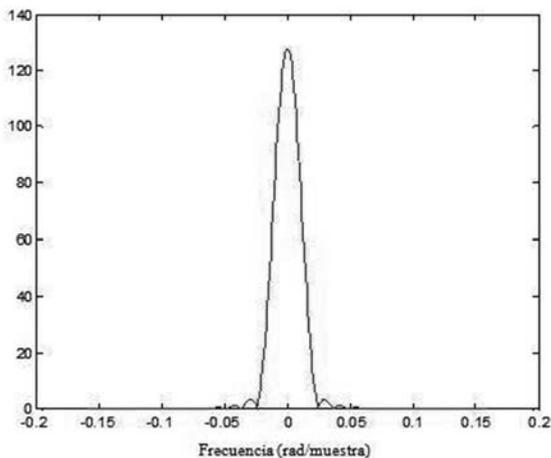


FIGURA 12. Magnitud de la respuesta en frecuencia de la ventana Hanning.

Teóricamente si se realiza una DFT de 256 puntos se estaría muestreando la transformada de Fourier de la señal enventanada $V(e^{j\omega})$ cada $2\pi/256$ rad/muestra y se obtendría una estimación perfecta de las componentes armónicas de la señal, en donde la magnitud de cada una de las componentes estimadas está dada por $|128A_n|$ según las ecuaciones (6) y (9). Lo anterior es válido solo si se considera un proceso de muestreo ideal sin solapamiento ni error de cuantificación.

En la figura 13, se pueden comparar las magnitudes de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular y de la ventana Hanning. Según se observa, los lóbulos secundarios de la ventana Hanning afectan en un menor grado la estimación de la componente fundamental y de los demás armónicos de la señal en comparación con los lóbulos de la ventana rectangular. Por ejemplo, la relación entre el lóbulo principal y el primer lóbulo secundario para la ventana rectangular es de -13 dB, en cambio para la ventana Hanning es del orden de -31 dB [1].

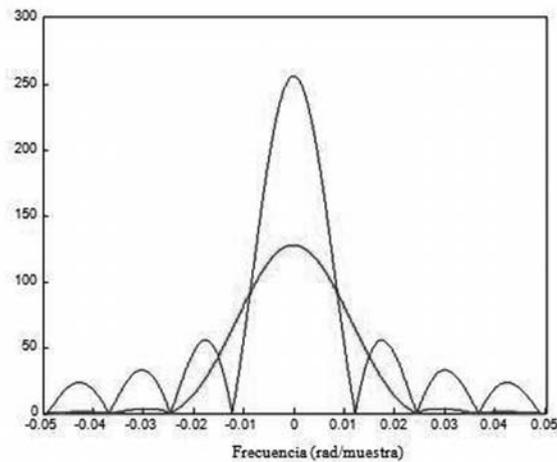


FIGURA 13. Magnitud de la respuesta en frecuencia de las ventanas: rectangular (azul) y Hanning (rojo).

Para el caso de la ventana Hanning, los lóbulos que podrían llegar a afectar en un mayor grado la estimación de la componente fundamental de la señal, son los lóbulos onceavos de las componentes armónicas ubicadas ω_0 y ω_2 . Sin embargo la relación entre el lóbulo principal y el lóbulo onceavo para la ventana Hanning es de aproximadamente 73 dB, por lo que se desprecian los lóbulos secundarios para el cálculo de este rango de frecuencia.

Por lo tanto, la variación en frecuencia permitida para obtener un rango de error del 1% en la estimación de la componente fundamental de la señal, se calcula

despreciando los posibles errores generados por los lóbulos de las otras componentes armónicas. La variación en frecuencia permitida se calcula entonces a partir de la ecuación (10).

Se obtiene una variación teórica de 0,616 Hz para el caso de la ventana Hanning, lo cual indica que es posible que la frecuencia de la señal varíe en el rango comprendido entre $59,384 \leq f \leq 60,616$ Hz, para obtener un error máximo del 1% en la estimación de su componente fundamental.

$$0.99|128A_i| = \left| \frac{1}{2} e^{-j\frac{511}{2}\Delta\omega_{p2}} \frac{\text{sen}\left(256\Delta\omega_{p2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Delta\omega_{p2}}{2}\right)} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{511}{2}\left(\Delta\omega_{p2}-\frac{2\pi}{M}\right)} \frac{\text{sen}\left(256\left(\Delta\omega_{p2}-\frac{2\pi}{M}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Delta\omega_{p2}}{2}-\frac{\pi}{M}\right)} - \frac{1}{4} e^{-j\frac{511}{2}\left(\Delta\omega_{p2}+\frac{2\pi}{M}\right)} \frac{\text{sen}\left(256\left(\Delta\omega_{p2}+\frac{2\pi}{M}\right)\right)}{\text{sen}\left(\frac{\Delta\omega_{p2}}{2}+\frac{\pi}{M}\right)} \right| \quad (10)$$

Posteriormente, se calculó la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital con el fin de que al variar la frecuencia de la señal de entrada dentro del rango siguiente de frecuencias dado por $60,616 \leq f \leq 61,848$, se obtenga un error del 1% en la estimación de su componente fundamental. Para esto, se considera la frecuencia central de este rango dada por 61,232 Hz, y partiendo de un tamaño de ventana de 512 datos y del requerimiento de que la ventana temporal se sincronice con 12 ciclos de la señal de 61,232 Hz, la nueva frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital debe ser de 5225 Hz, por lo que la variación necesaria de esta frecuencia es de 105 Hz.

En la figura 14, se presenta un resumen de la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital y los rangos de frecuencias calculados para la frecuencia fundamental, con el fin de obtener un error máximo de 1% en la estimación de la componente fundamental de la señal.

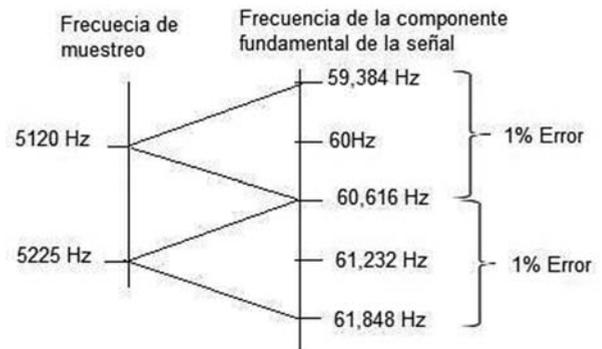


FIGURA 14. Variación en frecuencia para un error máximo del 1% en la estimación de la componente fundamental. Caso: ventana Hanning.

A pesar de que al variar la frecuencia de la componente fundamental de la señal dentro del rango $59,384 \leq f \leq 60,616$ Hz, se obtiene un error del 1% en la estimación de la componente fundamental, los errores generados en la estimación de las otras componentes armónicas son mayores. Se calcula entonces, el rango entre el cual puede variar la frecuencia de la señal para obtener un error máximo del 1% en la estimación de cualquiera de sus 13 componentes armónicas. Teniendo en cuenta el análisis realizado anteriormente, la frecuencia del armónico decimotercero podría variar en 0,616 Hz, lo cual indica que es posible que la frecuencia de la señal varíe en el rango comprendido entre $59,9526 \leq f \leq 60,0474$ Hz, para obtener un error máximo del 1% en la estimación de sus 13 componentes armónicas.

Finalmente, se calculó la variación necesaria en la frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital con el fin de que al variar la frecuencia de la señal de entrada dentro del rango siguiente de frecuencias dado por $60,0474 \leq f \leq 60,1422$ Hz, se obtenga un error máximo del 1% en la estimación de los 13 armónicos de la señal. Para esto, se considera la frecuencia central de este nuevo rango dada por 60,0949 Hz, y partiendo de un tamaño de ventana de 512 datos y del requerimiento de que la ventana temporal se sincronice con 12 ciclos de la señal de 60,0949 Hz, la nueva frecuencia de muestreo del convertidor analógico digital debe ser de 5128,1 Hz, por lo que la variación necesaria de esta frecuencia es de 8,1 Hz aproximadamente.

5. SIMULACIÓN DEL SISTEMA

Por último, empleando la herramienta de software Matlab/Simulink, se realizó la simulación de todo el sistema, tanto para la ventana rectangular como para la ventana Hanning, con el fin de analizar el error total generado en la estimación de los armónicos de la señal debido a variaciones presentes en su frecuencia.

En la simulación se supuso una amplitud unitaria para todas las componentes armónicas de la señal. El esquemático del sistema simulado se presenta en la figura 15, para la ventana rectangular.

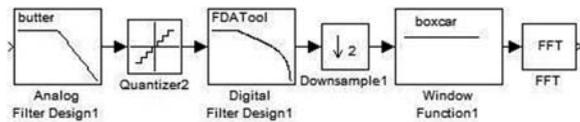


FIGURA 15. Esquemático del sistema simulado.

En primer lugar se realizó la simulación considerando una frecuencia de 60,39 Hz para la componente fundamental de la señal, con el fin de obtener los errores totales del sistema con variaciones en la frecuencia. En la figura 16, se puede observar la señal de entrada del sistema y en la figura 17 se observa la magnitud de la transformada discreta de Fourier a la salida, utilizando ventana rectangular.

Según la figura 17, el error obtenido en la estimación de la componente armónica fundamental es del orden del 0,11%. El error que se obtiene en la estimación del sexto armónico es del orden de 32%.

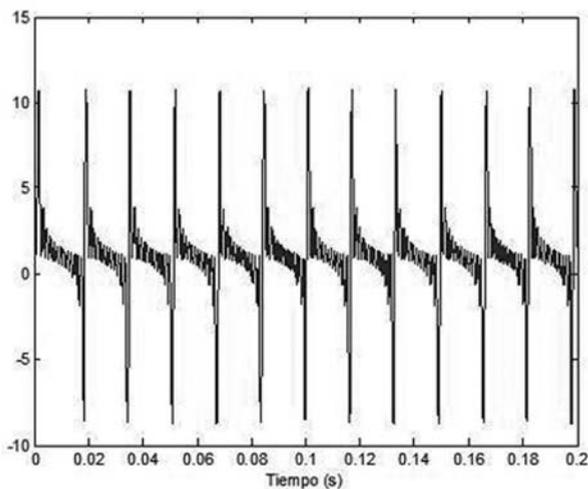


FIGURA 16. Señal de entrada para una frecuencia fundamental de 60,39 Hz.

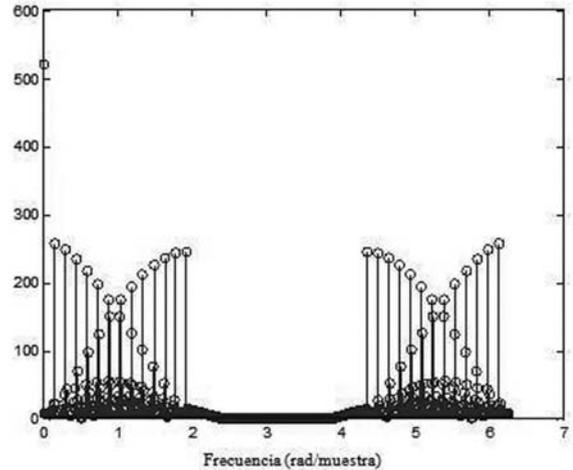


FIGURA 17. Magnitud de la DFT de la salida del sistema para una frecuencia fundamental de 60,39, utilizando ventana rectangular.

En la figura 18 se observa la magnitud de la transformada discreta de Fourier a la salida del sistema utilizando ventana Hanning, para una frecuencia de 60,39 Hz. Según se observa en esta figura, el error obtenido en la estimación de la componente armónica fundamental es del orden del 0,092%. El error que se obtiene en la estimación del sexto armónico es del orden de 13,6%.

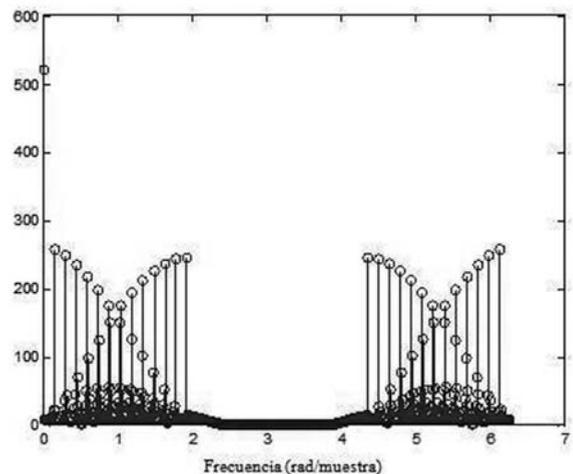


FIGURA 18. Magnitud de la DFT de la salida del sistema para una frecuencia fundamental de 60,39 Hz, utilizando ventana Hanning.

En la figura 19 se observa la magnitud de la transformada discreta de Fourier a la salida, utilizando ventana rectangular para una frecuencia de 60,616 Hz.

Según esta figura, el error obtenido en la estimación de la componente armónica fundamental es del orden del 1,66%.

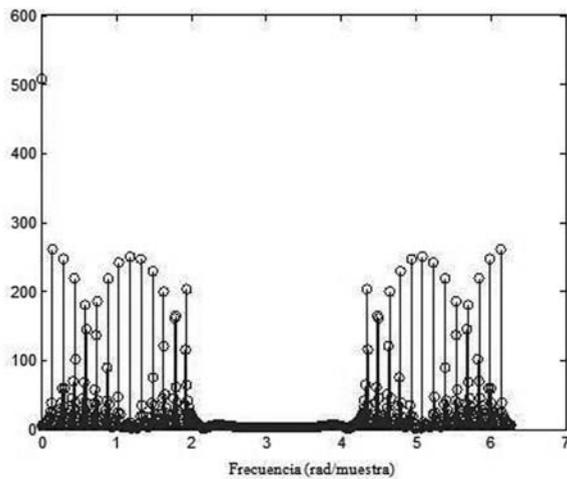


FIGURA 19. Magnitud de la DFT de la salida del sistema para una frecuencia fundamental de 60,616 Hz, utilizando ventana rectangular.

Finalmente, en la figura 20 se observa la magnitud de la transformada discreta de Fourier a la salida, utilizando ventana Hanning para una frecuencia de 60,616 Hz. Según esta figura, el error obtenido en la estimación de la componente armónica fundamental es del orden del 0,7%.

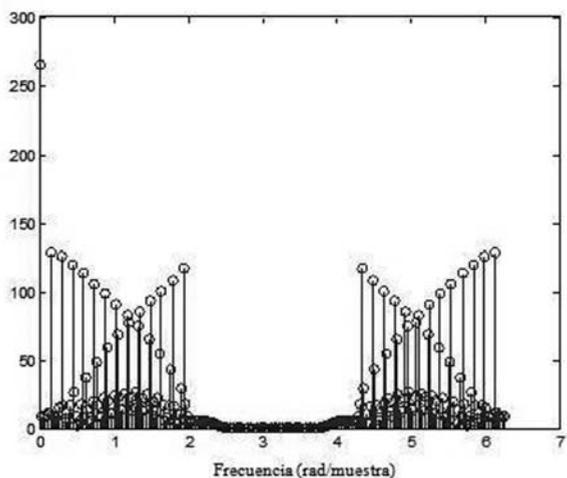


FIGURA 20. Magnitud de la DFT de la salida del sistema para una frecuencia fundamental de 60,616 Hz, utilizando ventana Hanning.

Al comparar los resultados obtenidos para los dos tipos de ventanas (Rectangular y Hanning), se puede ver que la ventana Hanning presenta un mejor desempeño que la ventana rectangular a la hora de estimar el armónico fundamental cuando la frecuencia de la señal de interés presenta variaciones. Esto se evidencia debido a que se obtiene un menor error en la estimación de la componente fundamental de la señal cuando se utiliza este tipo de ventana.

6. CONCLUSIONES

La ventana Hanning presenta un mejor desempeño que la ventana rectangular cuando la frecuencia de la componente fundamental de la señal de interés presenta variaciones cercanas a los 60 Hz y ocurre pérdida de sincronización en el proceso de muestreo. Esta característica se debe principalmente al hecho de que la magnitud de la respuesta en frecuencia de la ventana rectangular tiende a variar más abruptamente en las frecuencias cercanas a 0 Hz, mientras que el cambio en la magnitud de la respuesta en frecuencia de la ventana Hanning no es tan pronunciado.

Al emplear la transformada discreta de Fourier para la estimación de armónicos de una señal cuya frecuencia fundamental presenta variaciones cercanas a los 60 Hz, por ejemplo, en el caso de la estimación de las componentes espectrales que se superponen a la componente fundamental de la señal eléctrica en las redes de suministro de energía, se debe realizar una sincronización adecuada del proceso de muestreo de la señal, con el fin de reducir los errores generados por el proceso de enventanado y por la utilización de una DFT de longitud finita determinada. Para realizar esta sincronización, puede considerarse la utilización de un lazo de seguimiento de fase (PLL, *Phase Locked Loop*). En caso en que no sea posible realizar esta sincronización, los errores generados serán muy grandes y en consecuencia se tendrá una mala estimación de los armónicos de la señal.

Aunque la ventana Hanning presenta una peor resolución en frecuencia en comparación con la ventana rectangular para un mismo tamaño de ventana, el hecho de que las relaciones entre el lóbulo primario y los lóbulos secundarios sean mayores para la ventana Hanning, hace que los lóbulos secundarios influyan menos en la estimación de armónicos cuando ocurre pérdida de sincronización en el proceso de muestreo, en comparación con la ventana rectangular.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Industrial de Santander por su apoyo a este trabajo mediante el proyecto VIE-DIEF-5538: Estudio e implementación en tiempo real de algoritmos de estimación de magnitudes eléctricas para el control de dispositivos *Custom Power*.

8. REFERENCIAS

- [1] OPPENHEIM, Alan y SHCAFER, Ronald y BUCK, John. Tratamiento de señales en tiempo discreto. Segunda edición. Madrid , España: Prentice Hall, 2000. 870 p.
- [2] PROAKIS, John y MANOLAKIS, Dimitris. Digital Signal Processing. Tercera edición. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996.
- [3] COMISIÓN ELECTROTÉCNICA INTERNACIONAL. CEI 61000-4-7. Compatibilidad electromagnética (CEM) - parte 4-7: Técnicas de ensayo y medida. Guía general relativa a las medidas de armónicos e interarmónicos, así como a los aparatos de medida, aplicable a las redes de suministro y a los aparatos conectados a éstas. 2004. 38 p
- [4] SEDRA, Adel y SMITH, Kenneth. Microelectronic Circuits. Cuarta edición. New York: Oxford University Press, 1998. 1232 p.