Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 55–60, junio–diciembre 1994

Diferenciabilidad no Connmutativa

ERNESTO ACOSTA G.*

Resumen

Si G es un grupo de Lie y f es una función de G en G diferenciable en el el sentido de grupos topológicos, entonces f es diferenciable vista como función entre variedades. Sin embargo el recíproco no se tiene.

1. Introducción

La noción de diferenciabilidad para funciones entre grupos topológicos proviene de la formulación de diferenciabilidad presentada por Carathéodory en su libro de análisis complejo [3]. Esta formulación fue rescatada por Kuhn en [1], quien destaca las ventajas de ésta para simplificar las demostraciones de los teoremas elementales del cálculo diferencial en $\mathbb{R}$. Acosta y Delgado [5] generalizaron esta formulación a espacios vectoriales normados, y Acosta presentó en [5] la noción de diferenciabilidad en grupos topológicos. Un aspecto novedoso de esta noción es la no unicidad de la derivada cuando se trabaja con grupos no abelianos. [5] abre las puertas a una versión bien general de cálculo diferencial no conmutativo.

Sean G y H dos grupos topológicos localmente compactos. Denotaremos mediante $Ghom(G,H)$ el grupo topológico generado por el conjunto $Hom(G,H)$ de homomorfismos continuos de G en H dotado de la

*Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá

topología compacto abierta. A los elementos de $Ghom(G,H)$ los llamaremos ghomomorfismos. En el caso en que G y H coincidan en lugar de $Hom(G,G)$ escribiremos $End(G)$ y en lugar de $Ghom(G,G)$ escribiremos $Gend(G)$. A los elementos de $Gend(G)$ los llamaremos gendomorfismos. Diremos que $f : G \longrightarrow H$ es C–diferenciable en $a \in G$ si existe $\phi : G \longrightarrow Ghom(G,H)$ continua en a tal que

$$f(x)f(a)^{-1} = \phi(x)[xa^{-1}].$$

A la función ϕ la llamamos una función de pendientes para f en a y al valor $\phi(a)$ lo llamamos una C–derivada de f en a. En [5] se estudiaron algunas de las propiedades de las funciones C–diferenciables y se dieron condiciones necesarias para la unicidad de la derivada de toda función C–diferenciable.

En el caso particular en que G y H son espacios vectoriales normados se tiene que $Ghom(G,H) = Hom(G,H) = \mathcal{L}(G,H)$, donde $\mathcal{L}(G,H)$ es el espacio de las funciones lineales continuas de G en H. Además se puede demostrar que C–diferenciabilidad coincide con la diferenciabilidad según Fréchet, razón por la cual en este contexto se puede garantizar la unicidad de la derivada y podemos escribir $\phi(a) = Df(a)$, donde $Df(a)$ es la derivada de Fréchet de f (ver [5]).

En este artículo establecemos la relación que existe entre C–diferenciabilidad y la diferenciabilidad de funciones suaves entre variedades en el contexto de grupos de Lie. Más específicamente, si $G = H$ es un grupo de Lie y $f : G \longrightarrow G$ es C–diferenciable en e, demostraremos que f es diferenciable en e pero que lo contrario no se da.

2. Preliminares

Antes de demostrar el teorema principal presentaremos algunos aspectos del cálculo diferencial en grupos topológicos y una condición equivalente a la C–diferenciabilidad en espacios normados, que será de utilidad en la demostración del teorema principal.

Lema 1. *Sea $f : G \longrightarrow H$ una función C–diferenciable en a y se ϕ una función de pendientes para f en a. Si $\phi(x) = \phi_1(x)\phi_2(x)$, con $\phi_1(x)$ y*

$\phi_2(x)$ *en* $Ghom(G, H)$, *entonces* $\phi_1(a)\phi_2(a)$ *y* $\phi_2(a)\phi_1(a)$ *son* C*–derivadas de* f *en* a.

Demostración. Es claro que $\phi_1(a)\phi_2(a)$ es una derivada de f en a. Ahora, sea $g(x) = f(x)f(a)^{-1}$, $g_1(x) = \phi_1(x)[xa^{-1}]$ y $g_2(x) = \phi_2(x)[xa^{-1}]$ Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} g(x) &= g_1(x)g_2(x) \\ &= g_1(x)g_2(x)g_1(x)^{-1}g_1(x) \\ &= g_1(x)\phi_2(x)[xa^{-1}]g_1(x)^{-1}\phi_1(x)[xa^{-1}] \\ &= \{(ad_{g_1(x)}o\phi_2(x)\cdot\phi_1(x)\}[xa^{-1}]; \end{aligned}$$

por lo tanto $(ad_{g_1(a)}o\phi_2(a))\cdot\phi_1(a) = \phi_2(a)\phi_1(a)$ es otra C–derivada de f en a.

Ejemplo 2. *Sea* G *un grupo topológico y* $f : G \longrightarrow G$ *definida por* $f(x) = x^2$. *Entonces* $f(x)f(a)^{-1} = xxa^{-1}a^{-1} = xa^{-1}axa^{-1}a^{-1} = (1_G\cdot ad_a)[xa^{-1}]$. *Por lo tanto,* $1_G\cdot ad_a$ *y* $ad_a\cdot 1_G$ *son* C*–derivadas de* f *en* a.

Nota 1. *En general se puede demostrar que si*

$$\phi(x) = \phi_1(x)\ldots\phi_n(x), \phi_i(x) \in Ghom(G, H),$$

entonces los ghomomorfismos $\phi_{\sigma(1)}(a)\ldots\phi_{\sigma(n)}(a)$, *donde* σ *recorre todas las permutaciones de* $\{1, \ldots, n\}$, *son* C*–derivadas de* f *en* a.

Ahora supongamos que $G = E$ y $H = F$ son espacios vectoriales normados. Recordemos que $f : E \longrightarrow F$ es diferenciable en $a \in E$ si existe $\lambda \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\frac{\|f(x) - f(a) - \lambda(x-a)\|}{\|x-a\|} \longrightarrow 0$$

cuando $x \to a$. Tenemos el siguiente lema.

Lema 3. $f : E \longrightarrow F$ *es* C*–diferenciable en* $a \in E$ *si existe* $\phi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$ *continua en* a *tal que*

$$f(x) - f(a) = \phi(x)(x-a) + o(x-a),$$

donde $\frac{\|o(x-a)\|}{\|x-a\|} \to 0$, *si* $x \to a$.

Demostración.

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x)-f(a)-\phi(a)(x-a)\|}{\|x-a\|} &= \frac{\|(\phi(x)-\phi(a))(x-a)+o(x-a)\|}{\|x-a\|} \\ &\leq \|\phi(x)-\phi(a)\| + \frac{\|o(x-a)\|}{\|x-a\|} \rightarrow 0\end{aligned}$$

cuando $x \rightarrow a$.

3. C–Diferenciabilidad en grupos de Lie

Ahora sí estableceremos la relación que existe entre la C–diferenciabilidad y la diferenciabilidad de funciones en grupos de Lie. Para simplificar la exposición supondremos que $G = H$ es un grupo de Lie y que $f : G \longrightarrow G$ es tal que $f(e) = e$. Supondremos que f es C–diferenciable en a y demostraremos que f es diferenciable en e en el sentido de las variedades.
Si $\mathcal{G}$ es el algebra de Lie de G denotaremos mediante $\exp : \mathcal{G} \longrightarrow G$ la función exponencial, y mediante $\log : U(e) \longrightarrow \mathcal{G}$ su inversa en una vecindad $U(e)$ de la unidad e de G. $(U(e), \log)$ servirá de coordenadas locales en e. Sea $f : G \longrightarrow G$ una función C–diferenciable en e tal que $f(e) = e$.
Consideraremos primero el caso en que $\phi(x) \in End(G)$.

Teorema 4. *Si $f : G \longrightarrow G$ es C–diferenciable en e, $f(e) = e$ y $\phi(x) \in End(G)$, entonces f es diferenciable en e, $Df(e) = d\phi(e)$ y la C–derivada de f en e es única.*

Demostración. Condideremos coordenadas exponenciales en $U(e) \subset G$ y encontremos la expresión coordenada de f en estas coordenadas. Se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \log(f(\exp x)) \\ &= \log(\phi(\exp x)[\exp x]) \\ &= \log(\exp[d\phi(\exp x)[x]]) \\ &= d\phi(\exp x)[x]\,.\end{aligned}$$

Como $d\phi(\exp x)$ es continua en 0, se tiene que $\tilde{f}$ es diferenciable en 0 y $D\tilde{f}(0) = d\phi(e)$. En otras palabras, f es diferenciable en e y $Df(e) =$

$d\phi(e) \in End(\mathcal{G})$. Esto demuestra también que $\phi(e)$ es única ya que $Df(e)$ es única.

Veamos ahora el caso en que $\phi(x) \in Gend(G)$.

Teorema 5. *Supongamos que* $\phi(x) = \phi_1(x)...\phi_n(x)$, $\phi_j(x) \in End(G)$. *Entonces* f *es diferenciable en* e *y* $Df(e) = \sum_j d\phi_j(e)$.

Demostración. En este caso

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \log(f(\exp x)) \\ &= \log(\prod \phi_j(x)[\exp x]) \\ &= \log(\prod \exp[d\phi_j(\exp x)[x]]) \\ &= \sum_j d\phi_j(\exp x)[x] + o(x)\,.\end{aligned}$$

Como $\frac{\|o(x)\|}{\|x\|} \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow 0$ (ver [4] Lemma pág. 112), y $\sum_j d\phi_j(\exp x)$ es continua en 0, por el lema 2 obtenemos la diferenciabilidad de $\tilde{f}$ en 0. Además, $Df(e) = \sum_j d\phi_j(e)$.

Para terminar mostremos que no toda función diferenciable es C–diferenciable. Sea $Gend(\mathcal{G})$ el subgrupo aditivo de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ (funciones lineales de $\mathcal{G}$ en $\mathcal{G}$) generado por $End(\mathcal{G})$. Sea $f : G \longrightarrow G$ $Df(e) \in L(\mathcal{G}) - Gend(\mathcal{G})$. Afirmamos que f no es C–diferenciable en e. En efecto, si lo fuera, existiría $\phi : G \longrightarrow Gend(G)$ continua en e y tal que $f(x) = \phi(x)[x]$. Pero por el teorema 2 se tendría que $Df(e) = d\phi(e) \in Ghom(\mathcal{G})$, lo que sería una contradicción.

Este último hecho nos permite clasificar las funciones de G en G diferenciables en e en dos clases: las que son C–diferenciables y las que no lo son. En otras palabras, se puede decir que una función f de G en G es no conmutativamente diferenciable en e si f es diferenciable en e y además $Df(e) \in Ghom(\mathcal{G})$. Más generalmente, se puede hablar de $\mathcal{H}$-diferenciabilidad no conmutativa de una función cuando su derivada en e pertenezca a un subgrupo aditivo $\mathcal{H}$ de $L(\mathcal{G})$. Esta es precisamente la terminología que se utiliza en análisis de funciones en grupos cuánticos (ver [6]), lo que muestra que el cálculo diferencial no conmutativo de los grupos cuánticos podría explicarse en el contexto de la C–diferenciabilidad.

Agradecimientos

El autor manifiesta un muy especial agradecimiento al profesor Jairo Charris, por sus comentarios en las discusiones que sobre el tema han mantenido.

Referencias

[1] KUHN S., *The Derivative a la Carathéodory*, Amer. Math. Month. **98** (1991).

[2] ACOSTA E., DELGADO C., *Frechét vs Carathédory*, Amer. Math. Month. **101** (1994).

[3] CARATHÉODORY C., *Theory of Functions of Complex Variable*, Chelsea, New York, 1954.

[4] WARNER F. W., *Foundations of Differential Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heildelberg, Tokyo, 1983.

[5] ACOSTA E., *Reporte Interno Unidad de Investigación* (1994).

[6] KHRENNIKOV A. Y., *Noncommutative differential calculus and projective tensor products of noncommutative Banach algebras*, Soviet–Physics–Doklady, **36** (1991), 832-834.

e-mail: eacosta@ciencias.campus.unal.edu.co