Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 61–68, junio–diciembre 1994

# Algebras de Moufang de Dimensión Finita

LORENZO ACOSTA G.*

**Resumen**

En 1991 se definió una nueva clase de álgebras no asociativas comprendida entre las álgebras alternativas y las de Jordan. Estas álgebras, llamadas de Moufang, tienen propiedades muy parecidas a las de las álgebras alternativas, especialmente en lo que tiene que ver con la descomposición de Peirce con respecto a un idempotente. Esta descomposición permite entre otras cosas caracterizar el nilradical de las álgebras de Moufang de dimensión finita y generalizar el conocido teorema principal de Wedderburn.

## 1. Introducción

El objetivo de este artículo es difundir ciertos resultados recientes en el estudio de las álgebras no asociativas. Todos los resultados aquí presentados son extraídos de [1] y de [2], y el lector interesado podrá encontrar en estas referencias sus demostraciones. Debido a que la teoría de las álgebras no asociativas no se enseña en nuestro medio (ni en el pregrado, ni en el posgrado), se incluye aquí un breve resumen de sus fundamentos.

*Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Un álgebra $A$ sobre un cuerpo $K$ es un espacio vectorial sobre $K$ dotado de una aplicación bilineal de $A \times A$ en $A$, llamada producto. Si este producto es asociativo diremos que el álgebra es asociativa, y si es conmutativo diremos que el álgebra es conmutativa. Se usará el término "*álgebra no asociativa*" en el sentido de "*no necesariamente asociativa*".

Las nociones de subálgebra, ideal, cociente, homomorfismo, suma y producto de ideales, son exactamente las mismas que en el caso de las álgebras asociativas.

Los instrumentos más usados en el estudio de las álgebras no asociativas son los siguientes:

1. El conmutador: es la aplicación bilineal $[\ ,\ ] : A \times A \to A$, definida por $[x, y] = xy - yx$.
2. El asociador: es la aplicación trilineal $(\ ,\ ,\ ) : A \times A \times A \to A$, definida por $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$.
3. Los operadores de multiplicación: Cada elemento $a$ del álgebra $A$ define dos operadores lineales $M_a$ y $R_a$ definidos por $L_a(x) = ax$ y $R_a(x) = xa$.

Poniendo aparte las cero–álgebras (todo producto es nulo), las álgebras más sencillas son las simples (sin ideales no triviales) y las semisimples (suma directa de ideales simples). En los casos más estudiados (álgebras asociativas, alternativas, de Jordan conmutativas) las álgebras simples y semisimples de dimensión finita contienen elementos idempotentes, y bajo ciertas hipótesis poco restrictivas, un álgebra de dimensión finita se descompone como la suma directa de un álgebra semisimple y de un nilideal (todo elemento es nilpotente). Por consiguiente, en el estudio de cualquier tipo de álgebras, deben considerarse dos clases de álgebras: las nilálgebras y las álgebras simples y semisimples.

## 2. Algunos tipos de álgebras no asociativas

a. Las álgebras de potencias asociativas: son aquellas en las que toda subálgebra generada por un elemento es asociativa. Se caracterizan por satisfacer la identidad $x^n x^m = x^{n+m}$ para todo par de naturales $n$ y $m$.

**Nota 1.**

*i)* *$xn$ se define inductivamente por $x^1 = x$ y $x^{n+1} = xx^n$.*

*ii)* *Existen muchas álgebras que no son de potencias asociativas. En particular, la gran mayoría de las álgebras genéticas no son de potencias asociativas* (ver [6]).

b. Las álgebras Alternativas: son aquellas en las que toda subálgebra generada por dos elementos es asociativa. Se caracterizan por satisfacer las identidades

(i) $(yx)x = yx^2$ ;

(ii) $x(xy) = x^2y$.

Su nombre viene del hecho que un álgebra es alternativa si y sólo si el asociador es una aplicación alternante. En característica diferente de 3, toda álgebra alternativa y conmutativa es asociativa; sin embargo, en característica 3 existen ejemplos de álgebras alternativas y conmutativas que no son asociativas (Ver [1, 3]). Estas álgebras tienen una generalización inmediata: las álgebras alternativas a derecha o alternativas a izquierda, según satisfagan la identidad (i) o (ii) respectivamente.

c. Dada un álgebra asociativa $A$, podemos modificar el producto para obtener un álgebra conmutativa $A^+$ y un álgebra anticonmutativa $A^-$ de la siguiente manera: Para construír $A^+$ definimos $x \circ y = xy + yx$. En esta nueva álgebra se satisface la identidad de Jordan $x \circ (y \circ (x \circ x)) = (x \circ y) \circ (x \circ x)$. Podemos introducir así la noción de álgebra de Jordan conmutativa: Un álgebra $A$ es de Jordan conmutativa si se satisfacen en $A$ las identidades

$$xy = yx; \qquad x(yx^2) = (xy)x^2.$$

Esta noción es inmediatamente generalizable: Un álgebra $A$ es de Jordan (no necesariamente conmutativa), si se satisfacen en $A$ las identidades

$$x(yx) = (xy)x; \qquad x(yx^2) = (xy)x^2.$$

**Nota 2.**

*iii)* *Un álgebra donde se satisface la identidad* $x(yx) = (xy)x$ *se llama flexible.*

*iv)* *En presencia de la flexibilidad las identidades*

$$x(yx^2) = (xy)x^2 \quad y \quad x^2(yx) = (x^2y)x$$

*son equivalentes. Algunos autores no incluyen la flexibilidad en su definición de álgebra de Jordan, por lo que tienen que utilizar estas dos últimas identidades.*

*v)* *Generalmente la construcción de* $A^+$ *se hace definiendo* $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$*, lo que supone que la característica de* $K$ *es diferente de 2, y se hace la teoría de las álgebras de Jordan conmutativas en característica diferente de 2. Esto con el fin de que las potencias en* $A$ *y en* $A^+$ *coincidan. Sin embargo las dos construcciones de* $A^+$ *dan origen a álgebras isomorfas.*

*Para construír* $A^-$ *se define* $[x,y] = xy - yx$*. En esta nueva álgebra se satisfacen las identidades* $[x,x] = 0$ *y* $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$ *(Identidad de Jacobi), que dan origen a las álgebras de Lie. Estas son las álgebras no asociativas mas conocidas y estudiadas.*

d. Algebras de Moufang: En 1935, Ruth Moufang demostró que en toda álgebra alternativa se satisfacen las identidades

$$\begin{aligned} (xyx)z &= x(y(xz)z \\ (xyx) &= ((zx)y)x \\ (xy)(zx) &= x(yz)x \end{aligned}$$

donde se escribe sin ambigedad $xyx$ en virtud de la flexibilidad de las álgebras alternativas. Estas identidades (llamadas desde entonces identidades de Moufang) se revelaron como instrumentos muy efectivos en el estudio de las álgebras alternativas y fueron utilizadas en 1991 por Capua, Micali y Koulibaly para definir una nueva clase de álgebras (ver [4]).

**Definición 1.** *Un álgebra es de Moufang si es flexible y si en ella se satisfacen las tres identidades de Moufang.*

En su artículo, Capua, Micali y Koulibaly establecen que toda álgebra de Moufang es de Jordan y dan ejemplos de álgebras de Jordan que no son de Moufang y de álgebras de Moufang que no son alternativas. Tenemos entonces

$$\text{Alternativa} \Longrightarrow \text{Moufang} \Longrightarrow \text{Jordan}$$

pero las implicaciones recíprocas no son válidas (lo que da un sentido a la definición). Observando las identidades de Moufang, se ve que si un álgebra de Moufang es unitaria entonces es alternativa, lo que quiere decir que las nociones de álgebra alternativa y de álgebra de Moufang coinciden en presencia de la unidad. Esto parece indicar que las álgebras de Moufang son "muy próximas" de las alternativas. Esta proximidad se confirma por un estudio más profundo de la estructura de las álgebras de Moufang.

## 3. Nilálgebras de Moufang

En álgebra no asociativa existen las siguientes nociones de nilpotencia que no son , en general, equivalentes:

a. Un álgebra $A$ es nilpotente si existe un natural $n$ tal que todo producto de $n$ elementos es nulo.

b. Un álgebra $A$ es resoluble si existe un natural $n$ tal que $A^{(n)} = 0$, donde $A^{(n)}$ se define recursivamente por $A^{(1)} = A$ y $A^{(n+1)} = A^{(n)}A^{(n)}$.

c. Un álgebra $A$ es una nilálgebra si para todo elemento $a \in A$ existe un natural $n$ tal que $a^n = 0$.

Se sabe que, en dimensión finita, las tres nociones coinciden para las álgebras alternativas y las de Jordan conmutativas en característica diferente de 2 (ver [5, 7]). Debido a la proximidad de las álgebras de Moufang y las alternativas, era razonable pensar que esta equivalencia se diera también para las álgebras de Moufang de dimensión finita. En efecto, modificando las pruebas de los casos mencionados se puede probar (no sin dificultad, pues hay que desembarazarse de la conmutatividad y de las hipótesis sobre la característica) que las tres nociones coinciden en las álgebras de Moufang de dimensión finita. Esto muestra entre otras cosas que ninguna nilálgebra de Moufang de dimensión finita es simple (por ser nilpotente) (ver [1, 2]).

## 4. Descomposición de Peirce con respecto a un idempotente

Recordemos un hecho bien conocido en las álgebras asociativas: "*toda álgebra asociativa de dimensión finita que tiene elementos no nilpotentes posee un elemento idempotente no nulo*". Esto nos permite concluír que en toda álgebra de potencias asociativas de dimensión finita que tenga elementos no nilpotentes, hay un elemento idempotente no nulo. En efecto, si $x$ es un elemento no nilpotente, la subálgebra generada por $x$ es un álgebra asociativa de dimensión finita con elementos no nilpotentes. Tomemos ahora un álgebra de Moufang $A$, de dimensión finita, en la que no todos sus elementos son nilpotentes. Como las álgebras de Moufang son de potencias asociativas (ver.[4]), $A$ posee un elemento idempotente no nulo $e$. Entonces $A$ puede descomponerse como la suma directa de subespacios vectoriales:

$$A = A_{11} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00},$$

donde

$$\begin{aligned} A_{11} &= \{x \in A \mid ex = xe = x\}, \\ A_{10} &= \{x \in A \mid ex = x, xe = 0\}, \\ A_{01} &= \{x \in A \mid ex = 0, xe = x\}, \\ A_{00} &= \{x \in A \mid ex = xe = 0\}. \end{aligned}$$

Esta descomposición, llamada descomposición de Peirce con respecto a $e$, es una generalización de la que se obtiene para las álgebras alternativas, y mejora en cierto sentido la descomposición de las álgebras de Jordan, donde

$$A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0.$$

Tenemos que $A_{11}$ es una subálgebra (alternativa, pues $e$ es la unidad de $A_{11}$) de $A$ y, si suponemos que $e$ es un idempotente principal (no existe en $A$ otro idempotente no nulo ortogonal a $e$), entonces $A_{00}$ es un nilideal de $A$. Es más, $M \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00}$, resulta ser el el nilradical de $A$. Recordemos que el nilradical $N$ de un álgebra $A$ es el nilideal maximal de $A$ y es tal que $A/N$ es semisimple. Mas aún, un álgebra es semisimple si y sólo si su nilradical es nulo. Por consiguiente, las álgebras de Moufang simples y semisimples de dimensión finita son exactamente las álgebras alternativas simples y semisimples. En efecto, si un álgebra de Moufang es semisimple, su nilradical es nulo y la descomposición de Peirce nos da $A = A_{11}$. Esta caracterización del nilradical de las álgebras de Moufang de dimensión finita, en términos del nilradical de una subálgebra alternativa, nos permite demostrar además el Teorema Principal de Wedderburn para álgebras de Moufang:

**Teorema 2.** *Sea $A$ un álgebra de Moufang de dimensión finita y sea $N$ su nilradical. Si $A/N$ es separable, entonces $A = S \oplus N$, donde $S \approx A/N$ es una subálgebra semisimple de $A$.*

Este teorema muestra entre otras cosas que la "esencia" de las álgebras de Moufang de dimensión finita está en su parte nilpotente, ya que $S$ es un álgebra alternativa.

## Referencias


[1] ACOSTA L. *Sur les algbres de Moufang.* Thse de Doctorat, Montpellier (1992)

[2] ACOSTA L., DA MOTTA FERREIRA J.C., DE CAPUA L.A., MICALI A. *Sur les algbres de Moufang.* Journal de Mathématiques du Maroc, No 1, 1993.

[3] CAPUA L.A., MICALI A. *Sur les algbres alternatives.* Cahiers Mathématiques Montpellier, **39** (1992), 348-370.

[4] CAPUA L.A., KOULIBALY A., MICALI A. *Autour des algbres de Malcev.* Rivista di Matematica pura ed applicata, **8** (1991), 29-40.

[5] SCHAFER R.D. *An introduction to non associative algebras.* Academic Press, New York, 1966.

[6] WRZ–BUSEKROS A. *Algebras in genetics.* Lecture Notes in Biomathematics. **36** Springer, Berlin, 1980.

[7] ZHEVLAKOV A.M., SLIN'KO I.P., SHESTAKOV A.I., SHIRSHOV *Rings that are nearly associative.* Academic Press, New York, 1982.