Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 81–106, junio–diciembre 1994

Subgrupos del Grupo $ST(3)$ y Medida de Subespacios del Plano Proyectivo*

BERENICE GUERRERO†

Resumen

En [3] se encontró que algunas familias de subespacios del espacio proyectivo $\mathcal{P}_n$ no admiten una medida invariante respecto del grupo triangular $ST(n+1)$. En este artículo determinamos los subgrupos a cuatro parámetros del grupo $ST(3)$ respecto de los cuales la medida de esas familias en el plano proyectivo existe. También estudiamos la existencia de medidas invariantes de otros subespacios del plano proyectivo, respecto de esos subgrupos.

1. Introducción

Por los resultados encontrados en [3] se conocen subespacios del plano proyectivo $\mathcal{P}_2$ no medibles respecto del grupo triangular $ST(3)$. El propósito de este artículo es estudiar si esos subespacios tienen medida invariante respecto de alguno de los subgrupos a cuatro parmetros del grupo $ST(3)$. Nos referimos a los siguientes teoremas probados en [3].

Teorema 1. *Los subespacio lineales del espacio proyectivo $\mathcal{P}_n$ de dimensión $h < n$ no tienen una medida invariante respecto del grupo $ST(n+1)$.*

*Este trabajo fue parcialmente financiado por COLCIENCIAS.
†Profesora Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Teorema 2. *La familia de subespacios de $\mathcal{P}_n$ compuesta por espacio lineal y punto, independientes, tiene medida invariante respecto del grupo triangular $ST(n+1)$, si sólo si el espacio lineal es un hiperplano.*

Teorema 3. *La familia de subespacios de $\mathcal{P}_n$ compuesta por subespacio lineal S y punto con $P \in S$, no admite una medida invariante respecto del grupo $ST(n+1)$.*

Por [8] conocemos otros subespacios no medibles respecto del grupo proyectivo y posiblemente medibles respecto del grupo triangular $ST(3)$. Nos referimos a los siguientes resultados,

Teorema 4. *La familia compuesta por $r < n+1$ puntos independientes del espacio proyectivo $\mathcal{P}_n$ no es medible.*

Teorema 5. *La familia de $r \leq n$ hiperplanos independientes del espacio proyectivo $\mathcal{P}_n$ no es medible.*

No se conoce un método directo para hallar los subgrupos de un grupo respecto de los cuales ciertos subespacios admitan medida invariante. La forma de abordar el problema consiste en hallar previamente los subgrupos del grupo y luego estudiar uno a uno su comportamiento respecto a la existencia o no de medida de cada uno de los subespacios.

2. Preliminares

Uno de los conceptos fundamentales para el estudio de los grupos de Lie y sus representaciones es el concepto de medida invariante. Puesto que la estructura de grupo siempre está presente en los grupos de Lie, esta medida debe ser compatible con la estructura de grupo. Entonces el concepto apropiado es la llamada medida de Haar, la cual puede definirse usando las formas diferenciales sobre el grupo.

En particular, si G es un grupo de Lie de dimensión n, una n–forma sobre G define una medida sobre G, la medida de Haar. Si G es un espacio homogéneo esta n–forma es esencialmente la única medida invariante por la acción del grupo, [4].

La Geometría Integral clsica [6] se propone definir medidas para conjuntos de elementos geométricos (variedades o subespacios lineales) con la propiedad de ser invariantes por la acción de un grupo de Lie. Esos conjuntos son espacios homogneos, es decir, variedades sobre las cuales el grupo de Lie actúa transitivamente.

Si G es un grupo de Lie y K es un subgrupo cerrado de G, G/K es el espacio homogéneo de las co–clases a izquierda ξK de K en G, y G es un grupo de transformaciones que actúa sobre G/K por la acción

$$G \times G/K \rightarrow G/K \qquad \text{definida por } (g, \xi K) \rightarrow g\xi K.$$

Si G actúa transitivamente sobre una variedad M y si K denota el subgrupo de G que deja fijo un elemento de la variedad M (subgrupo isotrópico del elemento), entonces K es un subgrupo cerrado de G, y el espacio homogneo G/K es homeomorfo a la variedad M. La variedad M es medible si sólo si G/K es medible, y las medidas $\mu(M)$ y $\mu(G/K)$ coinciden [1].

Algunos resultados que necesitamos sobre medida en espacios homogneos son adapataciones de los resultados de Stoka para grupos medibles [7]. Ellos son:

2.1 *Si un espacio homogneo tiene medida invariante respecto de un grupo y de uno de sus subgrupos, las mtricas del espacio, invariantes respecto de los grupos, coinciden.*

2.2 *Si una variedad homognea no admite una medida invariante respecto de un subgrupo transitivo, entonces la variedad no admite medida invariante respecto del grupo.*

2.3 *Si un grupo tiene dos subgrupos respecto de los cuales un espacio homogneo admite medida invariante, la condición necesaria y suficiente para que este espacio sea medible respecto del grupo es que las métricas del espacio, invariantes respecto de cada uno de los subgrupos, coincidan.*

La métrica de un espacio homogéneo está determinada por el elemento de volumen del espacio, así: si $X_1, \ldots, X_m$ es una base del espacio tangente del espacio homogéneo en la identidad, $T_I(G/K)$, y $w_1, \ldots, w_m$

son 1–formas sobre $T_I(G/K)$ determinadas por la relación $w_i(X_j) = \delta_{ij}$, entonces el producto $w = w_1 \wedge \ldots \wedge w_m$ es una m–forma sobre G/K.

Las condiciones necesarias y suficientes para que esta m–forma sea G–invariante, única y defina una medida sobre el espacio homogéneo G/K están dadas en [6] por el siguiente teorema :

Teorema 6. *Sea G es un grupo de Lie de dimensión n, y K un subgrupo cerrado de G de dimensión k. Si $w_1 \wedge w_2 \ldots \wedge w_{n-k}$ es una $m = (n - k)$ forma G–invariante sobre G/K, entonces una condición necesaria y suficiente para que la $m = (n-k)$ forma sea una medida sobre el espacio homogéneo G/K es que su diferencial sea cero:*

$$d(w_1 \wedge w_2 \ldots \wedge w_{n-k}) = 0 \ .$$

Las variedades M sobre las cuales actúa transitivamente el grupo de Lie son variedades integrales de un sistema pfaffiano completamente integrable. Es decir, variedades integrales de un campo de direcciones F.

Se llama campo de direcciones (respectivamente sistema Pfafiano) sobre una variedad diferenciable P un subconjunto F del fibrado tangente TP (respectivamente un subconjunto Γ del fibrado cotangente T^*P), tal que para todo $x \in P$ la fibra $F_x = F \cap TP$ (respectivamente $\Gamma_x = \Gamma \cap T_x^*P$) sea un subespacio vectorial de T_xP (respectivamente de T_x^*P).

A todo campo de direcciones F sobre la variedad P se puede asociar canónicamente un sistema pfaffiano F^o, llamado el anulador de F, cuya fibra en un punto x es

$$F_x^o = \{w \in T_x^*P | w(v) = 0 \text{ para todo } \ v \in F_x\}.$$

De la misma forma, a todo sistema Pfaffiano Γ sobre P se le puede asociar conónicamente un campo de direcciones, el núcleo de Γ, cuya fibra esta dada por

$$\mathrm{Ker}_x\Gamma = \{v \in T_xP | w(v) = 0 \text{ para todo } w \in \Gamma_x\}.$$

Se llama integral de un campo de direcciones F sobre la variedad P todo par (M, ϕ) formado por una variedad diferenciable conexa M y una inmersión ϕ de M en P tal que

$$T_x\phi(T_xM) \subset F_{\phi(x)}.$$

Variedad integral del campo F es toda subvariedad inmersa conexa M de P tal que el par (M,i) sea una integral de F, con $i_M : M \to P$ la inclusión canónica. Y se llama variedad integral de un sistema pfaffiano Γ toda integral del núcleo de Γ.

Para cada subespacio del plano proyectivo y para cada subgrupo de cuatro parámetros de $ST(3)$, determinamos el espacio homogéneo correspondiente, el sistema Pfaffiano que lo determina, las 1-formas sobre él y verificamos las condiciones de existencia de la medida invariante del subespacio respecto del subgrupo. En caso de existir esa medida, damos una expresión geométrica de su métrica.

3. Subgrupos del grupo $ST(3)$

El grupo $ST(3)$, es el grupo de matrices triangulares 3×3 con determinante uno. Cuando este grupo actúa sobre el plano proyectivo $\mathcal{P}_2$ lo podemos representar por las transformaciones

$$x_k = \sum_{i=k}^{2} a_{ki} x_i, \qquad k = 0,1,2 \text{ con } |(a_{ki})| = 1. \tag{1}$$

Tomando coordenadas no homogéneas (x,y) en el plano, podemos expresar las ecuaciones (1) por las funciones

$$\begin{aligned} x &= \phi_1(x,y,a,b,c,e,h,r), \\ y &= \phi_2(x,y,a,b,c,e,h,r)), \end{aligned}$$

con $a_{11} = a, a_{12} = b, a_{13} = c, a_{22} = e, a_{23} = h, a_{33} = r$, la condición $aer = 1$ y con la identidad del grupo I, dada cuando $a = e = 1, b = c = h = 0$.

Dadas las funciones ϕ_1, ϕ_2, definidas por las ecuaciones (1), las transformaciones infinitesimales del grupo $ST(3)$ son los campos invariantes a izquierda dados por

$$\begin{aligned} X_1 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial a}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial a}\right)_I q = 2xp + yp, \\ X_2 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial b}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial b}\right)_I q = yp, \\ X_3 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial c}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial c}\right)_I q = p, \\ X_4 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial e}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial e}\right)_I q = xp + 2yp, \\ X_5 f &= \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial h}\right)_I p + \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial h}\right)_I q = q, \end{aligned} \tag{2}$$

con $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. Los campos vectoriales X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 son linealmente independientes, y son una base del algebra de Lie del grupo $ST(3)$ con el corchete dado por las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{ll} [X_1, X_2] = -X_2, & [X_1, X_3] = -2X_3, \\ [X_1, X_4] = 0, & [X_1, X_5] = -X_5, \\ [X_2, X_3] = 0, & [X_2, X_4] = -X_2, \\ [X_2, X_5] = -X_3, & [X_3, X_4] = X_3, \\ [X_3, X_5] = 0, & [X_4, X_5] = -2X_5. \end{array} \tag{3}$$

Los campos invariantes a izquierda $\{X_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, con la estructura definida por los corchetes (3), determinan completamente el grupo $ST(3)$; luego los subgrupos a r parámetros de $ST(3)$ están determinados por las subálgebras de Lie r–dimensionales del álgebra de los campos invariantes a izquierda [7].

Es decir, dadas las tranformaciones infinitesimales (2) $\{X_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, con la estructura (3); un subgrupo a cuatro parámetros de $ST(3)$ está generado por cuatro campos de vectores linealmente independientes, cada uno de los cuales es una combinación lineal de los X_i, tales que el corchete es una combinación lineal de ellos. Luego los campos

$$Y_1 = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k X_k, \quad Y_2 = \sum_{k=1}^{5} \beta_k X_k,$$
$$Y_3 = \sum_{k=1}^{5} \eta_k X_k, \quad Y_4 = \sum_{k=1}^{5} \rho_k X_k,$$

determinan un subgrupo de $ST(3)$ si sólo si, el corchete de esos campos $[Y_i, Y_j]$ para $i, j = 1, 2, 3, 4$, es una combinación lineal con coeficientes constantes de los Y_k con $k = 1, 2, 3, 4$.

Encontrar estos subgrupos es bastante dispendiosos, y, puesto que éste no es el propósito de este artículo, nos limitamos a presentar los subgrupos obtenidos[1] con el fin de realizar el estudio de cada uno de ellos.

En [1] se encontraron los siguientes subgrupos a cuatro parámetros del grupo $ST(3)$, los cuales damos en términos de las transformaciones infinitesimales del grupo $ST(3)$.

[1]Artículo próximo a aparecer

$$
\begin{array}{rcl}
G_1 & = & \{X_2, X_3, X_4, \alpha X_1 + \beta X_5\} \\
& = & \{yp, pq, (2\alpha + \beta)xp + (\alpha + 2\beta)yq\}\,, \\
G_2 & = & \{X_1, X_3, X_4, X_5\} \\
& = & \{2xp + yq, p, xp + 2yq, q\}\,, \\
G_3 & = & \{X_2, X_3, X_4, X_5\} \\
& = & \{yp, p, xp + 2yq, q\}\,, \\
G_4 & = & \{X_1, X_2, X_3, X_4\} \\
& & \{2xp + yq, yp, p, xp + 2yq\}\,,
\end{array} \tag{4}
$$

con $p = \frac{\partial f}{\partial x}$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}$. A continuación determinamos la existencia de medida invariante por la acción de los grupos G_1, G_2, G_3 y G_4, de algunos subespacios del plano proyectivo, como conjunto de puntos, conjunto de rectas, familias de subespacios compuestos (rectas más punto, rectas paralelas, pares de rectas, pares de puntos, pares de recta y punto), etc. En caso de existir esa medida, damos una expresión geométrica de la métrica respectiva.

4. Grupo G_1

El grupo de Lie $G_1 = \{X_2, X_3, X_5, \alpha X_1 + \beta X_4\} = \{yp, p, q, (2\alpha + \beta)xp + (\alpha + 2\beta)yq\}$ es el grupo de las transformaciones triangulares de la forma

$$
x' = \frac{a^\alpha}{r}x + \frac{b}{r}y + \frac{c}{r}, \qquad y' = \frac{a^\beta}{r}y + \frac{h}{r}, \tag{5}
$$

con $a^{\alpha+\beta}r = 1$ y α, β const.

Las formas invariantes a izquierda del grupo G_1 están dadas por las entradas de la ecuación matricial

$$
\Omega = g^{-1}dg,
$$

donde $g \in G_1$ es la matriz de la transformación (5), g^{-1} es la inversa de g y dg la diferencial. En función de los parámetros del grupo esas formas resultan

$$
\begin{array}{ll}
w_1 = \frac{\alpha}{a}da, & w_2 = \frac{1}{a^\alpha}(db - b\frac{\beta}{a}da), \\
w_3 = \frac{dc}{a^\alpha} - \frac{b}{a^{\alpha+\beta}}dh + (bh - ca^\beta)dr, & w_4 = \frac{\beta}{a}da = \frac{\beta}{\alpha}w_1, \\
w_5 = \frac{1}{a^\beta}(dh - h/rdr), & w_6 = \frac{1}{r}dr,
\end{array} \tag{6}
$$

con $(1+\frac{\beta}{\alpha})w_1 + w_6 = 0$, α, β const.

Si consideramos las 1–formas linealmente independientes w_1, w_2, w_3, w_5 entonces la 4–forma $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_5$ es el elemento de volumen, invariante a izquierda, del grupo.

Las ecuaciones de estructura del grupo G_1 están dadas por las igualdades que resultan de la ecuación matricial $d\Omega = -\Omega \wedge \Omega$, donde $d\Omega$ es la diferencial de Ω. Ellas son

$$\begin{aligned} dw_1 &= 0, & dw_2 &= (\tfrac{\beta}{\alpha} - 1)w_1 \wedge w_2, \\ dw_3 &= -(2+\tfrac{\beta}{\alpha})w_1 \wedge w_3 - w_2 \wedge w_5, & dw_4 &= 0, \\ dw_5 &= -(1+\tfrac{2\beta}{\alpha})w_1 \wedge w_5 \end{aligned} \tag{7}$$

con α, β const.

Con lo anterior tenemos los elementos matemáticos necesarias para determinar la medibilidad de algunos subespacio del plano proyectivo, sobre los cuales actúa transitivamente el grupo G_1.

Sea P **el conjunto de puntos** del plano proyectivo y sea $(0,0)$ un elemento del conjunto. El grupo isotrópico de este elemento es el subgrupo K del grupo G_1 cuyos parámetros satisfacen la condición $c/r = \text{const}$ y $h/r = \text{const}$.

Si diferenciamos y reeeplazamos en (7) encontramos que el espacio de puntos P es la variedad integral del sistema

$$w_3 = 0, \qquad w_5 = 0.$$

En el espacio homogéneo G/K isomorfo a P la 2–forma $w_3 \wedge w_5$ determina una medida invariante respecto del grupo G_1 si sólo si la diferencial

$$d(w_3 \wedge w_5) = -3\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) w_1 \wedge w_3 \wedge w_5$$

es cero. Es decir, sobre P está definida una medida si sólo si $\alpha = -\beta$ y $\alpha \neq 0$. Si este es el caso, la medida está definida por la expresión

$$dP = dx \wedge dy, \tag{8}$$

donde (x, y) son las coordenadas no homogéneas en el subespacio P.

Sea R **el conjunto de rectas** del plano proyectivo. El grupo G_1 es transitivo sobre este espacio. Entonces tomamos un elemento de R y calculamos el grupo isotrópico de ese elemento.

Sea $r = \{(x,y) \mid x = 0\}$ un elemento del subespacio de rectas R. El subgrupo de G_1 que la deja invariante debe satisfacer las condiciones

$$(b/a^n) = \text{const}, \qquad a^k(bh - ca^n) = \text{const},$$

sobre los parámetros. Es decir, el conjunto de rectas es la variedad integral del sistema

$$w_2 = 0, \qquad w_3 = 0.$$

Entonces el elemento de volumen $w_2 \wedge w_3$ define la medida G_1-invariante del conjunto de rectas si su diferencial es cero. Usando las constantes de estructura (7) encontramos que la diferencial

$$d(w_2 \wedge w_3) = -3w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \neq 0.$$

Luego el espacio de rectas R no admite una medida invariante respecto del grupo G_1.

Consideremos el **subespacio de rectas paralelas** $R_1//R_2$. Tomando las rectas paralelas $r_1 = \{(x,y)|x = 0\} \in R_1$ y $r_2 = \{(x,y)|x = 1\} \in R_2$, el grupo isotrópico de este elemento, es el subgrupo de G_1 que verfica las siguientes condiciones sobre los parámetros:

$$\frac{b}{a^\beta} = \text{const}, \quad a^\alpha(bh - ca^\beta) = \text{const}, \quad a^{2\alpha+\beta} = \text{const},$$

y por (6) el espacio de rectas paralelas es la variedad integral del sistema

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = 0.$$

Por (7) $d(w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = 0$, luego el elemento de volumen $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$ determina la medida invariante respecto del grupo G_1 para el conjunto de rectas paralelas.

Con el fin de dar una expresión geómetrica de la métrica, tomamos las ecuaciones de las rectas en coordenadas normales, (p_1, θ) y (p_2, θ) de r_1 y r_2 respectivamente. Comparando las ecuaciones de las rectas en coordenadas normales con las ecuaciones en coordenadas cartesianas encontramos las siguientes igualdades:

$$\frac{b}{a^{\beta}} = -\tan\theta, \qquad a^{\alpha}(bh - ca^{\beta}) = -\frac{p_1}{\cos\theta}, \qquad a^{2\alpha+\beta} = \frac{p_2 - p_1}{\cos\theta}.$$

Diferenciando esas expresiones y multiplicando exteriormente se llega a la expresión,

$$a^{5\alpha+\beta}\frac{2\alpha+\beta}{\alpha}w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 = \frac{d\theta \wedge dp_1 \wedge dp_2}{\cos^4\theta}.$$

Notemos dR_i la densidad canónica de rectas, es decir, $dR_i = dp_i \wedge d\theta_i$, y $\delta = |p_2 - p_1|$ la distancia entre las rectas paralelas, entonces la métrica para pares de rectas paralelas resulta

$$d(R_1//R_2) = \frac{\alpha}{2\alpha+\beta}\frac{dR_1 \wedge dp_2}{\delta^{\frac{5\alpha+\beta}{2\alpha+\beta}}\cos^{\frac{3(\alpha+\beta)}{2\alpha+\beta}}\theta}. \tag{9}$$

Si $2\alpha = -\beta$ la medida no está definida.

Consideremos el **subespacio formado por pares de rectas** $(R_1 + R_2)$ del plano proyectivo. Este subespacio depende de cuatro parámetros y puesto que el grupo G_1 actúa transitivamente sobre él, existe la medida para el subespacio de recta $R_1 + R_2$, invariante respecto de G_1. Su métrica es la densidad cinemática del grupo G_1, es decir, su elemento de volumen $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_5$.

Con el fin de encontrar una expresión geométrica para la métrica, tomamos un par de rectas $r_1 = \{(x, y) \mid x = 0\}$ y $r_2 = \{(x, y) \mid x = y\}$ del plano proyectivo en coordenadas no homogéneas. La acción del grupo G_1 sobre ellas las transforma en las rectas

$$\begin{aligned} r_1' &= \{(x,y)|x' = \frac{b}{a^{\beta}}y' - a^{\alpha}(bh - ca^{\beta})\}, \\ r_2' &= \{(x,y)|x' = \frac{a^{\alpha}+b}{a^{\beta}}y' - a^{\alpha}(bh - ca^{\beta} + a^{\alpha}h)\}. \end{aligned}$$

Si (p_1, θ_1) y (p_2, θ_2) son las coordenadas normales para las rectas r_1 y r_2 respectivamente, al comparar las ecuaciones de r_1 y r_2 con las obtenidas para r_1' y r_2' obtenemos

$$\begin{aligned} \tfrac{b}{a^{\beta}} &= -\tan\theta_1, & a^{\alpha}(bh - ca^{\beta}) &= -\tfrac{p_1}{\cos\theta_1}, \\ \tfrac{a^{\alpha}+b}{a^{\beta}} &= -\tan\theta_2, & a^{\alpha}(bh - ca^{\beta} + a^{\alpha}h) &= -\tfrac{p_2}{\cos\theta_2}. \end{aligned}$$

Diferenciando y multiplicando exteriormente las expresiones anteriores obtenemos:

$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha}a^{6\alpha}w_1\wedge w_2\wedge w_3\wedge w_5=\frac{d\theta_1\wedge dp_1\wedge d\theta_2\wedge dp_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}.$$

Como es constumbre llamamos $dR_i = dp_i \wedge d\theta_i$ la densidad en coordenadas normales para rectas; entonces una expresión geométrica de la métrica del subespacio de pares de rectas resulta

$$d(R_1+R_2)=\frac{\alpha}{\beta-\alpha}\frac{dR_1\wedge dR_2}{a^{6\alpha}\cos^3\theta_1\cos^3\theta_2},\quad \text{con}\quad a^{\alpha-\beta}=\frac{\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cos\theta_1\cos\theta_2}. \tag{10}$$

En el caso $\alpha=\beta$ la medida para pares de rectas no está definida.

Consideremos el **conjunto formado por pares de puntos** P_1+P_2 del plano proyectivo. El grupo G_1 actúa transitivamente sobre este conjunto, y puesto que depende de cuatro parámetros, la medida invariante existe y su densidad es el elemento de volumen del grupo G_1, es decir, $w_1\wedge w_2\wedge w_3\wedge w_5$.

Para encontrar una expresión geométrica de la métrica de este conjunto, tomamos un par de puntos $(0,0)$ y $(0,1)$. El grupo G_1 los transforma en los puntos $P_1'(c/r,h/r)$ y $P_2'((b+c)/r,(a^\beta+h)/r))$, respectivamente. Comparamos las coordenadas no homogéneas (x_1,y_1) y (x_2,y_2) de los puntos P_1 y P_2 con las coordenadas de sus imágenes, y obtenemos,

$$x_1=\frac{c}{r},\qquad y_1=\frac{h}{r},\qquad x_2=\frac{b+c}{r},\qquad y_2=\frac{a^\beta+h}{r},$$

de donde por multiplicación exterior de sus diferenciales encontramos

$$w_1\wedge w_2\wedge w_3\wedge w_5=\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}a^{-6(\beta+\alpha)}dx_1\wedge dy_1dx_2\wedge dy_2.$$

Reemplazamos a por $a=(y_2-y_1)^{1/(2\beta+\alpha)}$ y escribimos $dP_i=dx_i\wedge dy_i$ para obtener la métrica para el subespacio de pares de puntos:

$$d(P_1+P_2)=\frac{\alpha}{2\beta+\alpha}\frac{dP_1\wedge dP_2}{(y_2-y_1)^{\frac{6(\beta+\alpha)}{2\beta+\alpha}}}. \tag{11}$$

Observamos que esta medida no está definida cuando $2\beta=-\alpha$.

Consideremos el **subespacio formado por pares $R+P$ de recta y punto, con $P \in R$.** Este subespacio depende de tres parámetros, y el grupo G_1 actúa transitivamente sobre él.

Tomando un elemento de este conjunto, por ejemplo la recta $r = \{(x,y) \mid x = 0\}$ y el punto $P_o(0,0)$, con $P_o \in r$; encontramos que ellos son transformados por G_1 en el punto $P'(c/r, h/r)$ y la recta $r' = \{(x,y) | x' = b/a^\beta y' - a^\alpha(bh - ca^\beta)\}$. Este elemento permanece invariante por la acción de G_1 si,

$$d(c/r) = 0, \quad d(h/r) = 0, \quad d(b/a^\beta) = 0, \quad d(a^\alpha(bh - ca^\beta)) = 0,$$

luego el conjunto de pares de punto y recta con $P \in R$ es la variedad integral del sistema

$$w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad w_5 = 0.$$

Por (7) la diferencial del producto $w_2 \wedge w_3 \wedge w_5$ es

$$d(w_2 \wedge w_3 \wedge w_5) = \frac{2(2\alpha+\beta)}{\alpha} w_1 \wedge w_3 \wedge w_2 \wedge w_5,$$

luego la medida invariante respecto del grupo G_1 existe para el subespacio $R+P$ con $P \in R$, si sólo sí$\alpha \neq 0$ y $2\alpha = -\beta$.

En el caso $\alpha \neq 0$ y $2\alpha = -\beta$, podemos encontrar una expresión geométrica para la métrica así: tomamos coordenadas (x,y) para los puntos y (p,θ) para las rectas y comparando con P' y r' obtenemos de (6) las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
dx &= d(c/r) = w_3 + ba^{\alpha+\beta} w_5, \\
dy &= d(h/r) = a^{\alpha+2\beta} w_5, \\
d(\tan\theta) &= d\left(\frac{b}{a^\beta}\right) = a^{\alpha-\beta} w_2, \\
d\left(\frac{p}{\cos\theta}\right) &= -d[a^\alpha(bh - ca^\beta)] = a^{2\alpha+\beta} w_3 - ha^{2\alpha} w_2;
\end{aligned}$$

luego el elemento de volumen para el subespacio de pares de recta y punto con $P \in R$ toma la forma geométrica

$$d(P+R) = \frac{dP \wedge d\theta}{\cos^2\theta}, \qquad \text{donde } dP = dx \wedge dy \tag{12}$$

Sea $P+R$ **el subespacio formado por pares de recta** R **y punto** P **con** $P \notin R$. El grupo G_1 actúa transitivamente sobre este subespacio; entonces la medida invariante está definida por el elemento de volumen $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_5$ del grupo G_1.

Con el fin de dar esta métrica en términos de las coordenadas (x,y) de los puntos P y (p,θ) de las rectas, tomamos un elemento del cojunto, por ejemplo el punto $(0,0)$ y la recta $\{(x,y)|x=1\}$. El grupo G_1 lo tranforma en el par

$$(x,y)=\left(\frac{c}{r},\frac{h}{r}\right)$$

y

$$\cos\theta x'+\sin\theta y'-p=a^{\beta}x'-by'+a^{\alpha}(bh-ca^{\beta}-a^{\alpha+\beta})=0,$$

de donde,

$$\begin{aligned}
dx &= d(c/r)=a^{\alpha+\beta}(a^{\alpha}w_3+bw_5),\\
dy &= d(h/r)=a^{\alpha+2\beta}w_5,\\
d(\tan\theta) &= d\left(\frac{b}{a^{\beta}}\right)=a^{\alpha-\beta}w_2,\\
d\left(\frac{p}{\cos\theta}\right) &= -d[a^{\alpha}(bh-ca^{\beta}-a^{\alpha+\beta})]=a^{\beta+2\alpha}[\frac{\beta}{\alpha}w_1-w_3].
\end{aligned}$$

Luego

$$dx\wedge dy=a^{3(\alpha+\beta)}w_3\wedge w_5,\qquad \frac{dp\wedge d\theta}{\cos^3\theta}=-a^3\alpha\frac{2\alpha+\beta}{\alpha}w_2\wedge w_1-a^{3\alpha}w_2\wedge w_3.$$

Si reemplazamos los parámetros en las ecuaciones de estructura (6) y multiplicamos exteriormente término a término encontramos

$$\frac{dx\wedge dy\wedge dp\wedge d\theta}{\cos^3\theta}=a^{6\alpha+3\beta}\frac{2\alpha+\beta}{\alpha}w_1\wedge w_2\wedge w_3\wedge w_5.$$

Llamamos $dP=dx\wedge dy$ y $dR=dp\wedge d\theta$, y reemplazamos $a^{2\alpha+\beta}=\frac{y\sin\theta-x\cos\theta+p}{\cos\theta}$ para obtener

$$d(P+R)=\frac{\alpha}{2\alpha+\beta}\,\frac{dP\wedge dR}{(y\sin\theta-x\cos\theta+p)^3},$$

la expresión geométrica para la métrica del subespacio $P+R$ con $P\notin R$. Cuando $2\alpha=-\beta$ la medida no está definida.

5. Grupo G_2

El grupo de Lie $G_2 = \{X_1, X_3, X_4, X_5\} = \{p, q, xp + yq, 2xp + yq\}$ es el grupo de las transformaciones triangulares de la forma

$$x' = \frac{a}{r}x + \frac{c}{r}, \qquad y' = \frac{e}{r}y + \frac{h}{r}, \quad \text{con} \quad aer = 1$$

Las formas invariantes a izquierda del grupo G_2 están dadas por las entradas de la ecuación matricial $\Omega = g^{-1}dg$ con $g \in G_2$, las cuales podemos expresar por las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{da}{a}, & w_2 &= \tfrac{dc}{a} - cedr, \\ w_3 &= \tfrac{de}{e}, & w_4 &= \tfrac{dh}{e} - \tfrac{h}{er}dr, \\ w_5 &= \tfrac{dr}{r}, \end{aligned} \tag{13}$$

con $w_1 + w_3 + w_5 = 0$.

Si consideramos las 1–formas linealmente independientes w_1, w_2, w_3, w_4 entonces la 4–forma $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4$ es el elemento de volumen invariante a izquierda del grupo G_2.

Las ecuaciones de estructura determinadas por las diferenciales $d\Omega$ de las 1–formas resultan,

$$\begin{aligned} dw_1 &= 0, & dw_2 &= -2w_1 \wedge w_2 + w_2 \wedge w_3, \\ dw_3 &= 0, & dw_4 &= -2w_3 \wedge w_4 - w_1 \wedge w_4, \end{aligned} \tag{14}$$

con $w_5 = -(w_1 + w_3)$.

Analizamos algunos subespacios del plano proyectivo sobre los cuales el grupo G_2 actúa y determinamos la medibilidad de ellos respecto del grupo.

Sea P **el conjunto de puntos** del plano proyectivo y sea $(0,0)$ un elemento del conjunto. El grupo isotrópico de ese punto es el subgrupo de G_2 cuyos parámetros satisfacen la condición $c/r = \text{const}$ y $h/r = \text{const}$. Por (13) el espacio de puntos P es la variedad integral del sistema $w_2 = 0$, $w_4 = 0$. Por (14),

$$d(w_2 \wedge w_4) = -3w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 - 3w_1 \wedge w_2 \wedge w_4, \tag{15}$$

y puesto que las 1–formas que intervienen son linealmente independientes, la diferencial (15) es diferente de cero. Es decir, la 2–forma $w_2 \wedge w_4$ no define una medida sobre el espacio homogéneo P. Luego el conjunto de puntos no tiene medida invariante respecto del grupo G_2.

Sea R **el conjunto de rectas** del espacio proyectivo. El grupo G_2 a la recta de ecuación $\alpha x + \beta y - \gamma = 0$ la transforma en la recta de ecuación

$$\frac{\alpha r}{a}x' + \frac{\beta r}{e}y' - \left(\frac{c\alpha}{a} + \frac{h\beta}{e} + \gamma\right) = 0;$$

entonces el grupo no actúa transitivamente sobre el conjunto de rectas, puesto que a las rectas de ecuación $x = k$, con k constante, las envía en rectas de la forma $x = c + k$. Entonces el espacio de rectas R no tiene definida una medida invariante respecto del grupo G_2.

Consideremos el **subespacio de rectas paralelas** $R_1//R_2$. El grupo G_2 transforma rectas paralelas en rectas paralelas, es decir actúa transitivamente sobre este subespacio. A las rectas paralelas $r_1 = \{x = y\} \in R_1$ y $r_2 = \{x = y + 1\} \in R_2$, el grupo G_2 las transforma en el par de rectas

$$x' = \frac{a}{e}y' + \frac{ce - ah}{er} \quad \text{y} \quad x' = \frac{a}{e}y' + \frac{ae + ce - ah}{er}.$$

Entonces por (13) el conjunto de rectas paralelas es una variedad integral del sistema pfaffiano

$$2w_1 + w_3 = 0, \qquad w_2 - w_4 = 0, \qquad w_1 - w_3 = 0\,.$$

Por (14) la diferencial $d[(2w_1 - w_3) \wedge (w_2 - w_4) \wedge (w_1 - w_3)] \neq 0$, entonces el conjunto de rectas paralelas no tiene una medida invariante respecta del grupo G_2.

Consideremos el **subespacio formado por pares de rectas.** Por no ser transitivo el grupo G_2 sobre el conjunto de rectas tampoco es transitivo sobre el conjunto de pares de rectas. Entonces la medida invariante respecto del grupo G_2 para el subespacio de pares de rectas no está definida.

Consideremos el **conjunto formado por pares de puntos** $P_1 + P_2$ del plano proyectivo. El grupo G_2 actúa transitivamente sobre este conjunto, y puesto que grupo y subespacio dependen de igual número de parámetros, la medida invariante existe y su densidad es el elemento de volumen del grupo G_2, es decir, $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4$.

Para encontrar una expresión geométrica de la métrica de este conjunto, tomamos un par de puntos $(0,0)$ y $(1,1)$, los cuales son transformados por el grupo G_2 en los puntos

$$\left(\frac{c}{r}, \frac{h}{r}\right), \qquad \left(\frac{a+c}{r}, \frac{e+h}{r}\right),$$

respectivamente. Comparamos las coordenadas no homogéneas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de los puntos con las coordenadas de sus imagenes, para obtener

$$x_1 = \frac{c}{r}, \qquad y_1 = \frac{h}{r}, \qquad x_2 = \frac{a+c}{r}, \qquad y_2 = \frac{e+h}{r}.$$

De donde multiplicando exteriormente sus diferenciales encontramos

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = \left(\frac{ae}{r}\right)^2 w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4.$$

Reemplazamos e/r por $(y_2 - y_1)$ y a/r por $(x_2 - x_1)$, y escribimos $dP_i = dx_i \wedge dy_i$, para obtener una expresión de la métrica para el subespacio de pares de puntos,

$$d(P_1 + P_2) = \frac{dP_1 \wedge dP_2}{(y_2 - y_1)^2(x_2 - x_1)^2}. \tag{16}$$

Consideremos el **subespacio formado por pares $R + P$ de recta y punto**. El grupo G_2 no actúa transitivamente sobre pares de recta y punto porque no actúa transitivamente sobre el conjunto de rectas. Luego la medida respecto del grupo G_2 para el espacio de pares de punto y recta con el punto en la recta o el punto exterior a la recta, no está definida.

6. Grupo G_3

El grupo de Lie $G_3 = \{X_2, X_3, X_4, X_5\} = \{p, q, yp, xp + 2yq\}$, es el grupo de las transformaciones de la forma

$$x' = \frac{1}{r}x + \frac{b}{r}y + \frac{c}{r}, \qquad y' = \frac{e}{r}y + \frac{h}{r}, \qquad \text{con } re = 1.$$

Las formas invariantes a izquierda están dadas por las entradas de la ecuación matricial $\Omega = g^{-1}dg$ con $g \in G_3$, las cuales podemos expresar por las igualdades siguientes:

$$\begin{aligned} w_1 &= db - \tfrac{b}{e}de, & w_2 &= dc - \tfrac{b}{e}dh + (bh - ec)dr, \\ w_3 &= \tfrac{de}{e}, & w_4 &= \tfrac{dh}{e} - hdr, \\ w_5 &= \tfrac{dr}{r}, \end{aligned} \tag{17}$$

con $w_3 + w_5 = 0$.

Las 1-formas linealmente independientes w_1, w_2, w_3, w_4 determinan el elemento de volumen invariante a izquierda del grupo G_3, $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4$, y las ecuaciones de estructura del grupo G_3 son

$$\begin{aligned} dw_1 &= -w_1 \wedge w_3, & dw_2 &= w_1 \wedge w_4 + w_2 \wedge w_3, \\ dw_3 &= 0, \quad dw_4 = -2w_3 \wedge w_4, & dw_5 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

El grupo G_3 actúa transitivamente sobre los subespacios formados por conjunto de puntos, conjunto de rectas, pares de rectas paralelas, pares de rectas, pares de recta y punto. Para ellos analizamos la existencia de la medida invariante respecto del grupo.

Sea P **el conjunto de puntos** del plano proyectivo y sea $(0,0)$ un elemento del conjunto. El grupo isotrópico de ese punto es el subgrupo de G_3 cuyos parámetros satisfacen la condición: $d(c/r) = 0$, y $d(h/r) = 0$. Por (17) esto significa que el espacio de puntos P es la variedad integral del sistema $w_2 = 0$, $w_4 = 0$. Usando (18) encontramos

$$d(w_2 \wedge w_4) = -2w_2 \wedge w_3 \wedge w_4,$$

y puesto que las 1-formas que intervienen son linealmente independientes, esa diferencial es diferente de cero. Luego no está definida una medida invariante para el conjunto de puntos repecto del grupo G_3.

Sea R **el conjunto de rectas** del espacio proyectivo. La acción del grupo G_3 sobre una recta de ecuación $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ determina la recta de ecuación

$$e\alpha x' + (\beta - \alpha b)y' + e\alpha(bh - ec) - e\beta h + \gamma = 0. \tag{19}$$

Luego si tomamos la recta de ecuación $x = 0$, su imagen por G_3 es la recta de ecuación $ex' - by' + e(bh - ec) = 0$. Entonces, la recta escogida permanece invariante por la acción del grupo G_3 si se satisface

$$d(b/e) = 0, d(ce - bh) = 0\,.$$

Reemplazando en (17), ésto significa que el conjunto de rectas es la variedad integral del sistema

$$w_1 = 0,\ w_2 = 0\,.$$

Por (17) la diferencial $d(w_1 \wedge w_2) = 0$, luego la 2–forma $w_1 \wedge w_2$ determina la medida invariante del espacio de rectas R respecto del grupo G_3. Comparando la ecuación de la recta en coordenadas normales (p, θ) con su ecuación en coordenadas no homogéneas obtenemos

$$\frac{b}{e} = -\tan\theta, \quad ce - bh = -\frac{p}{\cos\theta},$$

de donde por diferenciación y reemplazos en (17) obtenemos,

$$\frac{w_1}{e} = \sec^2\theta d\theta, \qquad (ew_2 - hw_1) = \frac{\cos\theta dp - p\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Multiplicando miembro a miembro obtenemos la expresión geométrica

$$dR = w_1 \wedge w_2 = \frac{dp \wedge d\theta}{\cos^3\theta} \tag{20}$$

para la métrica del subespacio de rectas en el plano proyectivo.

Consideremos el **subespacio de rectas paralelas** $R_1//R_2$. Tomando las rectas paralelas de ecuaciones $x = 0$ y $x = 1$, el grupo G_3 las transforma en las rectas paralelas

$$ex' - by' + e(bh - ec) = 0 \quad \text{y} \quad ex' - by' + e(bh - ec) - 1 = 0. \tag{21}$$

Por (17) el conjunto de rectas paralelas es una variedad integral del sistema pfaffiano, $w_1 = 0, w_2 = 0, w_3 = 0$, y puesto que la diferencial $d(w_1 \wedge w_2 \wedge w_3) = 0$, la 3–forma $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3$ define una medida invariante por la acción del grupo G_3.

Para dar una expresión geómetrica de la métrica, comparamos las ecuaciones de las rectas paralelas en coordenadas normales, $\cos\theta_i x + \sin\theta_i y +$

$p_i = 0$, $i = 1,2$ donde $\theta_1 = \theta_2$ con las ecuaciones en coordenadas no homogéneas (21) y encontramos las siguientes igualdades:

$$\frac{b}{e} = -\tan\theta, \quad bh - ce = -\frac{p_1}{\cos\theta}, \quad e = \frac{p_2 - p_1}{\cos\theta}.$$

Diferenciamos miembro a miembro y reemplazamos las diferenciales en (17) para obtener

$$ew_1 \wedge w_2 \wedge w_3 = \frac{d\theta \wedge dp_1 \wedge dp_2}{\cos^4\theta}.$$

Luego si $dR_i = d\theta_i \wedge dp_i$ y $\delta = |p_2 - p_1|$ es la distancia entre las rectas paralelas; entonces la métrica para rectas paralelas resulta

$$d(R_1//R_2) = \frac{dR_1 \wedge dp_2}{\delta\cos^3\theta}. \tag{22}$$

Consideremos el **subespacio formado por pares de rectas** $(R_1 + R_2)$ del plano proyectivo. El grupo G_3 actúa transitivamente sobre el subespacio de pares de rectas, y puesto que tanto el grupo como el subespacio de pares de rectas dependen de cuatro parámetros, la medida invariante para pares de rectas está definida y su densidad es el elemento de volumen $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4$ del grupo.

Para dar una expresión geométrica de la métrica, tomamos un par de rectas, $r_1 = \{(x,y) \mid x = 0\}$ y $r_2 = \{(x,y) \mid x = y\}$, las cuales son transformadas por el grupo G_3 en el par de rectas

$$ex' - by' + e(bh - ec) = 0 \quad \text{y} \quad ex' - (1+b)y' + e(bh - ec + h) = 0. \tag{23}$$

Comparamos estas ecuaciones con las ecuaciones de las rectas r_i en coordenadas normales, $\cos\theta_i x + \sin\theta_i y + p_i = 0$, $i = 1,2$ y encontramos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
\frac{b}{e} &= -\tan\theta_1, \quad \frac{1+b}{e} = -\tan\theta_2,\\
bh - ce &= \frac{p_1}{\cos\theta_1},\\
h &= \frac{p_2}{\cos\theta_2} - \frac{p_1}{\cos\theta_1}.
\end{aligned}$$

De donde, después de hallar la diferencial en términos de las 1–formas (17) y de multiplicar exteriormente, obtenemos

$$d(R_1 + R_2) = \frac{dR_1 \wedge dR_2}{\cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2} \quad \text{con} \quad dR_i = dp_i \wedge d\theta_i,\ i = 1, 2. \qquad (24)$$

Consideremos el **subespacio de pares de puntos $P_1 + P_2$** del plano proyectivo. Puesto que el grupo G_3 actúa transitivamente sobre este conjunto de cuatro parámetros, la medida para pares de puntos existe, y su densidad está dada por el elemento de volumen, $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4$ del grupo.

Para encontrar una expresión geométrica de esa densidad, tomamos un par de puntos $(0,0)$ y $(0,1)$, los cuales son transformados por el grupo G_3 en los puntos

$$\left(\frac{c}{r}, \frac{h}{r}\right), \qquad \left(\frac{b+c}{r}, \frac{e+h}{r}\right),$$

respectivamente. Comparando estas coordenadas con las de sus coordenadas no homogéneas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), obtenemos

$$x_1 = \frac{c}{r}, \quad y_1 = \frac{h}{r}, \quad x_2 = \frac{b+c}{r}, \quad y_2 = \frac{e+h}{r}.$$

Si diferenciamos miembro a miembro,

$$dx_1 \wedge dy_1 \wedge dx_2 \wedge dy_2 = 2e^6 w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 = 2e^6 d(P_1 + P_2).$$

Reemplazamos $e = (y_2 - y_1)^2$ y escribimos $dP_i = dx_i \wedge dy_i$, $i = 1, 2$, para obtener

$$d(P_1 + P_2) = \frac{dP_1 \wedge dP_2}{2(y_2 - y_1)^3}. \qquad (25)$$

Consideremos el **subespacio formado por pares $R + P$ de recta y punto, con $P \in R$.** Tomando el elemento (r, p) con $r = \{(x, y) | x = 0\}$ y $p(0,0)$, con $p \in r$, encontramos que su imagen por G_3 es el par

$$\left(\frac{c}{r}, \frac{h}{r}\right), \quad ex' - by' + e(bh - ec) = 0.$$

Diferenciamos y reemplazamos en (17) para encontrar que el subespacio $R + P$, $P \in R$, es la variedad integral del sistema

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad w_4 = 0.$$

[illegible] la diferencial $d(w_1 \wedge w_2 \wedge w_4) = -2w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 \neq 0$. Luego el subespacio formado por pares $R + P$ de recta y punto con $P \in R$ no tiene una medida invariante respecto del grupo G_3.

Si tomamos **el subespacio formado por pares $P + R$, de recta R y punto P con $P \notin R$**, puesto que el grupo G_3 actúa transitivamente sobre este subespacio de cuatro parámetros, la medida invariante para pares $R + P, P \notin R$, existe y su métrica $d(P + R)$ es, salvo una constante, el elemento de volumen $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_5$ del grupo.

Con el fin de encontrar una expresión geométrica de esa métrica, tomamos el elemento $(0,0), x = 1$, del conjunto $P + R$. Por la acción del grupo G_3 sobre el subespacio, ese elemento se transforma en el par

$$(x, y) = \left(\frac{c}{r}, \frac{h}{r}\right) \qquad \text{y} \qquad ex' - by' + e(bh - ec) - 1 = 0.$$

Entonces, si escribimos la recta en coordenadas normales e igualamos las coordenadas y sus deferenciales, obtenemos

$$dx \wedge dy = e^3(w_2 \wedge w_4), \qquad \frac{dp \wedge d\theta}{\cos^3\theta} = -w_1 \wedge (w_2 + w_3).$$

Multiplicando miembro a miembro,

$$\frac{dx \wedge dy \wedge dp \wedge d\theta}{\cos^3\theta} = e^3 w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 = e^3 d(P + R).$$

Escibimos $dP = dx \wedge dy$, $dR = dp \wedge d\theta$ y reemplazamos $e = \frac{y \sin\theta - x\cos\theta + p}{\cos\theta}$ para obtener

$$d(P + R) = \frac{dP \wedge dR}{(y \sin\theta - x\cos\theta + p)^3}, \qquad \text{para } P \notin R. \tag{26}$$

7. Grupo G_4

El grupo de Lie $G_4 = \{X_1, X_2, X_2, X_4\} = \{p, yp, xp + 2yq, 2xp + yq\}$ es el grupo de las transformaciones de la forma

$$x' = \frac{a}{r}x + \frac{b}{r}y + \frac{c}{r}, \qquad y' = \frac{e}{r}y, \qquad \text{con } aer = 1. \tag{27}$$

Las formas invariantes a izquierda del grupo de transformaciones G_4 están dadas por la ecuación matricial $\Omega = g^{-1}dg$, con $g \in G_4$, donde g es una matriz del grupo de tranformaciones (27). Esas 1–formas las podemos expresar por las igualdades siguientes:

$$\begin{array}{ll} w_1 = \frac{da}{a}, & w_2 = \frac{db}{a} - \frac{b}{ae}de, \\ w_3 = \frac{de}{a} - cedr, & w_4 = \frac{de}{e}, \\ w_5 = \frac{dr}{r}, & \end{array} \tag{28}$$

con $w_1 + w_4 + w_5 = 0$.

El elemento de volumen invariante a izquierda del grupo G_4 es entonces la 4– forma

$$w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 = \frac{da \wedge db \wedge dc \wedge de}{a^3 e},$$

y las ecuaciones de estructura determinadas por las diferenciales de las 1–formas resultan

$$\begin{array}{ll} dw_1 = 0, & dw_2 = -w_1 \wedge w_2 - w_2 \wedge w_4, \\ dw_3 = -w_1 \wedge w_3 + w_3 \wedge w_4, & dw_4 = 0, \\ dw_5 = 0, & \end{array} \tag{29}$$

con $w_5 = -(w_1 + w_4)$.

Se pude demostrar fácilmente que el grupo G_4 actúa transitivamente sobre conjunto de rectas, subespacios compuestos por pares de rectas paralelas, pares de rectas. Entonces procedemos a determinar la existencia de la medida invariante de esos subespacios respecto del grupo G_4.

Sea P **el conjunto de puntos** del plano proyectivo. La acción del grupo G_4 no es transitiva sobre el conjunto de puntos, porque a los puntos sobre rectas $y = k$, k constante, los transforma en puntos sobre rectas paraleleas $y = k(e/r)$.

La acción del grupo G_4 tampoco es transitiva sobre el subespacio de pares de punto y recta por no ser transitiva para conjunto de puntos. Es decir, la medida para conjunto de puntos y para subespacios compuestos de recta y punto no está definida respecto del grupo G_4.

Sea R **el conjunto de rectas** del espacio proyectivo. Sea $x = 0$ un elemento de R, entonces el subgrupo isotrópico de este elemento es el subgrupo de G_4 cuyos parámetros satisfacen las condiciones

$$\frac{b}{e} = \text{const}, \quad \frac{c}{r} = \text{const} .$$

Reemplazando en (28) esto significa que el conjunto de rectas es la variedad integral del sistema

$$w_2 = 0, \qquad w_3 = 0.$$

Por (28) la diferencial $d(w_2 \wedge w_3) = -3w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \neq 0$, luego el espacio de rectas R no admite una medida invariante respecto del grupo G_4.

Consideremos el **subespacio de rectas paralelas** $R_1//R_2$. Las rectas paralelas $x = 0,\ x = 1$, son transformadas por el grupo G_4 en las rectas paralelas de ecuaciónes

$$x' - by' + \frac{ce}{r} = 0, \qquad ex' - by' - \frac{ea + ec}{r} = 0.$$

Entonces este par de rectas permanece invariante por la acción del grupo si los parámetros satisfacen $d(b/e) = 0,\ d(c/r) = 0,\ d(a/r) = 0$, es decir, el conjunto de rectas paraleleas es la variedad integral del sistema

$$w_2 = 0, \quad w_3 = 0, \quad 2w_1 + w_4 = 0.$$

Puesto que la diferencial $d(w_2 \wedge w_3 \wedge (2w_1 + w_4)) = -4w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4 \neq 0$, entonces el conjunto de rectas paralelas no tiene definida una medida invariante respecta del grupo G_4.

Consideremos el **subespacio formado por pares de rectas** $(R_1 + R_2)$ del plano proyectivo. Puesto que el conjunto de pares de rectas depende de cuatro parámetros y el grupo G_4 es transitivo sobre ese subespacio, la métrica para pares de rectas $d(R_1 + R_2)$ es igual, salvo una constante, al elemento de volumen $w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4$ del grupo.

Con el fin de dar esta métrica en términos de las coordenadas normales de las rectas, observamos que el grupo G_4 transforma el par de rectas $x = 1, x = y$ en el par de rectas

$$ex' - by' - \frac{ae + ce}{r} = 0; \qquad ex' - (a + b)y' - \frac{ce}{r} = 0.$$

Comparamos estas ecuaciones con las ecuaciones en coordenadas normales $\cos\theta_i x' + \sin\theta_i y' + p_i = 0$, $i = 1, 2$, para obtener

$$\begin{aligned} \tfrac{b}{e} &= -\tan\theta, & \tfrac{a+c}{r} &= \tfrac{p_1}{\cos\theta_1}, \\ \tfrac{a+b}{e} &= -\tan\theta_2, & \tfrac{c}{r} &= \tfrac{p_2}{\cos\theta_2}. \end{aligned} \tag{30}$$

El producto exterior de las diferenciales de las igualdades anteriores y (29) nos llevan a la igualdad

$$\frac{d\theta_1 \wedge dp_1 \wedge d\theta_2 \wedge dp_2}{\cos^3\theta_1 \cos^3\theta_2} = a^6 w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4.$$

Reemplazando el valor de a obtenido de las igualdades (30) y llamando $dR_i = dp_i \wedge d\theta_i$, obtenemos la expresión

$$d(R_1 + R_2) = \frac{\cos\theta_1 \cos\theta_2 dR_1 \wedge dR_2}{\sin^2(\theta_1 - \theta_2)(p_1\cos\theta_2 - p_2\cos\theta_1)^2} \tag{31}$$

para la métrica invariante respecto del grupo G_4 del subespacio de pares de rectas.

8. Conclusiones

Por el teorema 1 los subespacio lineales formado por conjunto de puntos o por conjunto de rectas, no admiten una medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Nosotros hemos probado:

Teorema 7. *Existe un subgrupo a cuatro parámentos del grupo $ST(3)$, el grupo G_1, cuando $\alpha + \beta = 0$ y $\alpha \neq 0$, respecto del cual el espacio de puntos admite medida invariante, con métrica en coordenadas no homogéneas dada por* (8)

Teorema 8. *Existe un subgrupo G_3 a cuatro parámetros del grupo $ST(3)$ respecto del cual el espacio de rectas admite medida invariante con métrica en coordenadas normales dada por* (20).

Por el teorema 2 la familia de subespacios compuestos por la suma $P + R$, con $P \in R$, no tiene medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Aquí hemos encontrado que

Teorema 9. *Existe un subgrupo de $ST(3)$ a cuatro parámetros, el grupo G_1 cuando $2\alpha + \beta = 0$ y $\alpha \neq 0$, respecto del cual el subespacio recta y punto, $P + R$ con $P \in R$, tiene medida invariante, definida por la métrica* (12).

Por el teorema 3 el subespacio compuesto por punto y recta $P + R$, con $P \notin R$, tiene medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Hemos encontrado que también existe la medida invariante de este subepacio respecto de los subgrupos, G_1 y G_3 de $ST(3)$. Entonces, por **2.1**,

Teorema 10. *El subespacio compuesto por punto y recta $P + R$, con $P \notin R$, tiene medida invariante respecto de los grupos $ST(3)$, G_1 cuando $\alpha + \beta = 0$ y respecto del grupo G_3 con métrica invariante dada por* (26).

La medibilidad para subespacios compuestos por hiperplanos no independientes respecto del grupo $ST(3)$ no se deduce de ninguno de los teorema de la introducción. Sin embargo, de (9), (22) y **2.3** podemos concluir,

Teorema 11. *El subespacio compuesto por pares de rectas paralelas no tiene medida invariante repecto del grupo $ST(3)$. Existen dos subgrupos de $ST(3)$ a cuatro parámetros, G_1 con $2\alpha + \beta \neq 0$ y G_3, respecto de los cuales la medida invariante está definida por las métricas* (9) *y* (22), *repectivamente.*

Por el teorema 4 el subespacio de pares de puntos puede tener medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Sin embargo, de (11), (16), (25) y **2.3**, podemos concluir:

Teorema 12. *El subespacio de pares de puntos no admite una medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Existen tres subgrupos del grupo $ST(3)$ a cuatro parámetros, G_1 cuando $2\alpha + \beta$, G_2, y G_3, respecto de los cuales el subespacio de pares de rectas tiene medida invariante definidas por las métricas* (11), (16) *y* (25) *respectivamente.*

Por el teorema 5 el subespacio de pares de rectas puede tener medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Por (9), (24), (31) y **2.3** podemos concluir:

Teorema 13. *El subespacio de pares de rectas no tiene medida invariante respecto del grupo $ST(3)$. Existen tres subgrupos del grupo $ST(3)$ a cuatro parámetros, G_1 cuando $\beta \neq \alpha \neq 0$, G_3 y G_4, respecto de los cuales el espacio de pares de rectas admite medida invariante definida por las métricas* (10), (24) *y* (31), *respectivamente.*

Referencias

[1] BROTHERS J.E. *Integral geometry in homogeneous spaces.* Trans. Am. Math. Soc. **124** (1966), 480–517.

[2] GELFAND I.M., GIDINKIN S.G., GRAEV M.I. *Integral geometry in affine and projective spaces.* J. Soviet Math. **18** (1982), 53–226.

[3] GUERRERO B. *Geometría Integral de los grupos $ST(n+1)$ y $ST_1(n+1)$ en el espacio proyectivo $\mathcal{P}_n$.* Rev. Colombiana de Mat. **24** (1990), 129–144.

[4] HELGASON S. *Groups and Geometry analysis.* Ed. Accademic press, New York, 1984.

[5] LIBERMANN P. *Geometrie Symplectique bases theoriques de la mecanique.* Publications Mathematiques de l'universite Paris VII, 1988.

[6] SANTALO L.A. *Integral geometry and geometric probalility.* Ed. Addison–Wesley Reading, New York, 1976.

[7] STOKA M. *Geométrie Intégrale.* Ed. Gauthier Villars Editeur, Paris, 1968.

[8] STOKA M. *Gométrie Intégrale dans L'espace projectif $\mathcal{P}_n$.* Conferenze del Seminario di matematica dell'università di Barivol. **172** (1979), 1–9.