Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 107–121, junio–diciembre 1994

Serie de Taylor No Conmutativa

OSWALDO LEZAMA*
ORLANDO VILLAMAYOR†

Resumen

Se define la serie de Taylor de un k–álgebra A no necesariamente conmutativa y se usa para calcular la homología y la cohomología de Hochschild de álgebra tensorial de un k–módulo libre de dimensión finita (k es un anillo conmutativo con unidad). Se define además ciertas derivaciones y para ellas se establece el isomorfismo $\mathrm{Der}_k(A, M) \approxeq \mathrm{Hom}_A(\Omega(A \mid k), M)$.

1. La serie de Taylor

El propósito de esta sección es definir la serie de Taylor y extender algunas de las propiedades estudiadas en [3] al caso de álgebras no necesariamente conmutativas. En adelante, salvo que se advierta lo contrario, los anillos considerados no son conmutativos ni tienen elemento unidad. Sin embargo, los módulos sobre anillos con unidad son unitarios, además, los homomorfismos de tales anillos respetan el elemento unidad. En lo posible mantenemos la notación de [3].

*Profesor del Departamento Matemáticas y Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

†Profesor de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

Sea k un anillo conmutativo con unidad y A una k–álgebra con elemento unidad. denotamos por A^e el álgebra envolvente de A, i.e., $A^e = A \otimes_k A^{op}$; consideramos sobre A una estructura natural de A^e–módulos a izquierda dada por el producto $(a \otimes b) \cdot x = axb$, $a, b, x \in A$. La multiplicación π definida por

$$\begin{array}{ccc} A^e & \xrightarrow{\pi} & A \\ a \otimes b & \longmapsto & ab \end{array}$$

es un homomorfismo de A^e–módulos a izquierda con núcleo denotado por I. En lo que sigue también será útil considerar las estructuras de A–módulos a izquierda sobre A^e y A, donde esta última es inducida por el k–homomorfismo de álgebras $A \longrightarrow A^e$, $a \longmapsto a \otimes 1$, $a \in A$.

Lema 1. *Sean A e I como antes. Entonces*

(i) *I como A–módulo (y por tanto, como A^e–módulo) está generado por los elementos de la forma $1 \otimes x - x \otimes 1$, $x \in A$.*

(ii) *Si A es libre dobre k con base $X = \{1, x_i\}_{i \in I}$, entonces I es libre sobre A con base $X' = \{1 \otimes x_i - x_i \otimes 1\}_{i \in I}$.*

(iii) *Si $\{Z_j\}_{j \in J}$ es un conjunto de generadores de A como k–álgebra, entonces cada elemento de I es una A–combinación lineal de potencias de elementos de $\{1 \otimes Z_j - Z_j \otimes 1\}_{j \in J}$.*

Demostración.

(i) Sean $\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \in I$; entonces $\sum_{i=1}^{r} a_i b_i = 0$ y

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{r} (a_i \otimes b_i)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{r} a_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1).$$

(ii) Veamos inicialmente que A^e es libre sobre A con base $X'' = \{1 \otimes 1, 1 \otimes x_i\}_{i \in I}$. Sea $\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i \in A^e$; entonces $\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{r} a_i(1 \otimes b_i)$; expresando a b_i como una k–combinación de elementos de X, se obtiene que X'' genera a A^e sobre A. Sean $a_0, \ldots, a_n \in A$ y consideremos una combinación lineal nula con elementos de X'', $a_0(1 \otimes 1) + a_1, (1 \otimes 1) + \cdots + a_n(1 \otimes 1) = 0$; cada elememto a_i puede expresarse como una combinación lineal de elementos de X, $a_i = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} x'_1 + \cdots + \alpha_{mi} x'_m$, $\alpha_{ji} \in k$. Puesto que $X \otimes X = \{x \otimes y : x, y \in X\}$ es una k base de A^e, entonces $\alpha_{ji} = 0$ para cada i y j, i.e., $a_i = 0$ para cada i. Esto completa la prueba de que X'' es una A–base de A^e.

Razonando como en (i) y teniendo en cuenta que X genera a A, se obtiene que X' genera a I. Consideremos ahora una combinación lineal nula de elementos de X' con coeficientes de A, $a_i(1 \otimes x_1 - x_1 \otimes 1) + \cdots + a_n(1 \otimes x_n - x_n \otimes 1) = 0$. Entonces, $a_1(1 \otimes x_1) + \cdots + a_n(1 \otimes x_n) - (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)(1 \otimes 1) = 0$, pero como x'' es una base de A^e, entonces $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq n$.

(iii) Para cada $x \in A$ definimos $T(x) = 1 \otimes x - x \otimes 1$, y obtenemos una función T de A en I. Nótese que T es k–lineal y cumple las siguientes condiciones:

$$T(\alpha \cdot 1) = 0, \qquad \alpha \in k; \tag{1}$$

$$T(xy) = xT(y) + yT(x) + T(y)T(x), \qquad x, y \in A. \tag{2}$$

La afirmación (iii) es ahora consecuencia directa de (2); esto completa la prueba del lema. □

Las ideas expuestas en la prueba del lema anterior conducen a la siguiente definición.

Definición 2. *sea k un anillo conmutativo con unidad y A una k–álgebra con unidad. Supóngase que B es un anillo con estructura de módulo a izquierda sobre A. Una aplicación k–lineal $F : A \longrightarrow B$ es una k–serie de Taylor con valores en B si F cumple las condiciones (1) y (2) del lema 1.*

Teorema 3. *La Función T definida en la prueba del lema 1 es una k serie de Taylor con valores en I. Además , si $F : A \longrightarrow B$ es una k-serie de Taylor con valores en B, entonces existe una única función $F^* : I \longrightarrow B$ tal que*

(i) *F^* es un homomorfismo de A–módulos.*

(ii) *F^* es un $Z(A)$–homomorfismo de álgebras ($Z(A)$ denota el centro del anillo A).*

(iii) *$F^* \circ T = F$.*

Demostración. La función $F' : A \to B$ definida por $F'(a,b) = aF(b)$ es bilineal y k–balanceada; se induce entonces una función $F^* : A \otimes A \to B$ definida por $F^*(a \otimes b) = aF(b)$, que es un A–homomorfismo de módulos; la restricción de F^* a I la denotamos también por F^*; para cada x en A se tiene, $F^* \circ T(x) = F^*(1 \otimes x - x \otimes 1) = F(x)T$, ya que $F(1) = 0$. F^* es única ya que I como A–módulo está generado por los elementos de la forma $T(x)$, $x \in A$. Sólo resta probar que F^* es un $Z(A)$–homomorfismo de álgebras. Como F^* es $Z(A)$–lineal, basta demostar que

$$
\begin{aligned}
F^*(T(x)T(y)) &= F^*(T(x))\,F^*(T(y)), \qquad x, y \in A. \\
&= F^*(1 \otimes yx - y \otimes x - x \otimes y + xy \otimes 1) \\
&= F(xy) - yF(x) - xF(y) \\
&= yF(x) + xF(y) + F(x)F(y) - yF(x) - xF(y) \\
&= F(x)F(y) \\
&= F^*(T(x))\,F^*(T(y)). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Mediante computación directa se obtiene la siguiente propiedad.

Lema 4. *Sean A, B y k como antes. Supóngase que A como k–módulo está generado por $\{x_i\}_{i \in H}$, y sea $F : A \to B$ un aplicación k–lineal. F es una k–serie de Taylor con valores en B si y solo si F cumple (1), y (2) se cumple para cada par de generadores x_i, x_j.*

La fórmula (2) admite la siguiente generalización a varios términos: Para cada $n \geq 1$ y cualesquiera elementos $x_0, \ldots, x_n \in A$ se tiene

$$
\begin{aligned}
&T(x_0 \cdots x_n) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{j_1 < \cdots < j_i} x_{j_i} \cdots x_{j_1} T(x_0 \cdots \hat{x}_{j_1} \cdots \hat{x}_{j_i} \cdots x_n) \\
&\quad + T(x_n) \cdots T(x_0),
\end{aligned} \tag{3}
$$

donde el símbolo $\wedge$ indica supresión del término correspondiente. La prueba de (3) se hace por inducción sobre n y mediante aplicación de (2). En efecto,

$$
\begin{aligned}
&T(x_{n+1})T(x_n) \cdots T(x_0) = \\
&= \Big[T(x_1 \cdots x_{n+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} x_{j_i}\cdots x_{j_1} T(x_0\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1})\Bigg] T(x_0) \\
= {} & T(x_1\cdots x_{n+1})T(x_0) \\
& - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} x_{j_i}\cdots x_{j_1} T(x_0\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1})T(x_0) \\
= {} & T(x_0\cdots x_{n+1}) - x_0 T(x_1\cdots x_{n+1}) - x_1\cdots x_{n+1}T(x_0) \\
& - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} x_{j_i}\cdots x_{j_1} \{T(x_0\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1}) \\
& - x_0 T(x_1\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1}) - x_1\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1}T(x_0)\} \\
= {} & T(x_0\cdots x_{n+1}) \\
& - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} x_{j_i}\cdots x_{j_1} T(x_0\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1}) \\
& + \left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} 1\right) x_1\cdots x_{n+1}T(x_0) \\
= {} & T(x_0\cdots x_{n+1}) \\
& - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} x_{j_i}\cdots x_{j_1} T(x_0\cdots \hat{x}_{j_1}\cdots \hat{x}_{j_i}\cdots x_{n+1}),
\end{aligned}
$$

ya que

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} \sum_{j_1<\cdots<j_i} 1 = (-1)\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\, 1 = (-1)(1+(-1)^n) = 0.$$

2. Derivaciones

En esta sección definimos y estudiamos ciertas derivaciones y se establece, al igual que en el caso clásico, su relación con los módulos de diferenciales. Sea k un anillo conmutativo con unidad, A una álgebra con unidad (no nesesariamente conmutativa) y M un A–módulo a izquierda; una *derivación* de A en M es una función aditiva $d : A \to M$ que cumple las siguientes condiciones:

$$d(xy) = xd(x) + yd(x), \quad x, y \in A \tag{4}$$

$$d(\alpha \cdot 1) = 0, \quad \alpha \in k \tag{5}$$

De (4) y (5) resulta que d es k–lineal. El conjunto de derivadas de A en M se denota por $\mathrm{Der}_k(A,M)$ y tiene una estructura natural de grupo abeliano. De otro lado, sea $\Omega(A \mid k)$ el A–módulo cociente $I \;/\; I^{(2)}$, donde I es el ideal izquierdo definido en la sección anterior e $I^{(2)}$ es el A–submódulo de I generado por los elementos de la forma $T(x)T(y)$, $x, y \in A$. Se tiene el siguiente isomorfismo de grupos abelianos.

Teorema 5. $\mathrm{Der}_k(A,M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega(A \mid k), M)$.

Demostración. Dada una derivación $d \in \mathrm{Der}_k(A,M)$, se induce una función bilineal y k–balanceada de AxA en M que a $(x,y) \in A$ asigna $x\ dy$; con esta función se construye un A–homomorfismo de módulos izquierdos $\bar{d} : A \otimes A^{op} \to M$, dado por $\bar{d}(x \otimes y) = x\ dy$. Denotamos también por $\bar{d}$ la restricción de $\bar{d}$ a I. Nótese que $\bar{d}\left(I^{(2)}\right) = 0$; se induce entonces un A–homomorfismo $\bar{\bar{d}}$: $\Omega(A \mid k) \to M$, $\bar{\bar{d}}\ (\overline{x \otimes y}) = xdy$, $\overline{x \otimes y} = x \otimes y + I^{(2)}$, $x \otimes y \in I$. Obsérvese que la aplicación $\bar{T} : A \to \Omega(A \mid k)$ dada por $\bar{T}(x) = \overline{T(x)}$ es una derivación de A en $\Omega(A \mid k)$ y además $\bar{d} = \bar{\bar{d}} \circ \bar{T}$.

La discusión anterior permite definir una aplicación

$$\begin{array}{cccc} \alpha : & \mathrm{Der}(A,M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\Omega(A \mid k), M) \\ & d & \longmapsto & \bar{\bar{d}}\ . \end{array}$$

Fácilmente se prueba que α es un homomorfismo de grupos. De manera recíproca, si h es un A–homomorfismo de $\Omega(A \mid k)$ en M, entonces $h \circ \bar{T}$ es un derivación de A en M. En efecto, si $x \cdot y \in A$, entonces $h \circ \bar{T}(xy) = h\left(x\bar{T}(y) + y\bar{T}(x)\right) = xh \circ \bar{T}(y) + yh \circ \bar{T}(x)$. Se induce una función $\beta : \mathrm{Hom}_A(\Omega(A \mid k), M) \to \mathrm{Der}_k(A,M)$ dada por $\beta(h) = h \circ \bar{T}$ y tal que $\beta \circ \alpha = 1$. Para completar la prueba del teorema debemos mostrar que $\beta \circ \alpha = 1$. Sea $h \in \mathrm{Hom}_A(\Omega(A \mid k), M)$ y $x \otimes y \in I$; entonces $\overline{\overline{h \circ \bar{T}}}\ (\overline{x \otimes y}) = x\left(h \circ \bar{T}\right) y = h\left(\overline{xT(y)}\right) = h(\overline{x \otimes y})$, ya que $xy \otimes 1 = 0$; esto muestra que $\overline{\overline{h \circ \bar{T}}} = h$, i. e., $\alpha \circ \beta(h) = h$.

De la prueba anterior se obtiene de manera directa la siguiente propiedad universal de $\Omega(A \mid k)$.

Corolario 6. *Para cada A–módulo izquierdo M y cada derivación d de A en M existe un único A–homomorfismo $\bar{\bar{\bar{d}}}: \Omega(A \mid k) \longrightarrow M$ tal que $d = \bar{\bar{\bar{d}}} \circ \bar{T}$.*

Observación 7.

(i) *Si A es una k–álgebra conmutativa entonces $I^{(2)} = I^2$ y el isomorfismo del Teorema 2 es un A–isomorfismo. El A–módulo $\Omega(A \mid k)$ se conoce como el módulo de diferenciales de A sobre k (ver por ejemplo [2]).*

(ii) *Sea $d : A \to M$ una derivación y sean x, y, z elementos de A. Entonces $d(x(yz)) = d((xy)z)$, de donde se obtiene la siguiente igualdad:*

$$(zx - xz)\,dy + (zy - yz)\,dx = 0. \tag{6}$$

De otra parte, para la serie de Taylor T se tiene también que $T(x(yz)) = T((xy)z)$; desarrollando ambos miembros de esta igualdad encontramos que

$$\begin{aligned}
&(zx - xz)T(y) + (zy - yz)T(x) + [(T(z)x - xT(z))T(y) \\
&+(T(z)y - yT(z))T(x)] = \\
&= (z + T(z))xT(y) + (z + T(z))yT(x) - x(z + T(z))T(y) \\
&\quad -y(z + T(z))T(x) \\
&= [(1 \otimes z)(x \otimes 1) - (x \otimes 1)(1 \otimes z)]T(y) + [(1 \otimes z)(y \otimes 1) \\
&\quad -(y \otimes 1)(1 \otimes z)]T(x) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nótese que la expresión del corchete [ ] está en $I^{(2)}$: En efecto, puesto que $xT(z)T(y)$, $yT(z)T(x) \in I^{(2)}$, basta observar que

$$\begin{aligned}
T(z)xT(y) + T(z)yT(x) &= \\
&= T(z)[T(xy) - T(y)T(x)] \\
&= T(z)T(xy) - T(z)T(y)T(x) \\
&= T(z)T(xy) - \{T(yz) - yT(z) - zT(y)\}T(x) \in I^{(2)}.
\end{aligned}$$

3. Homología y Cohomología de Hochschild del Algebra Tensorial

El propósito de esta sección es calcular la homología, la cohomología de Hochschild del álgebra tensorial de un módulo libre de dimensión finita mediante el uso de la serie de Taylor no conmutativa. Para comenzar recordaremos la definición de homología y la de cohomología de Hochschild de una k–álgebra asociativa A con unidad (como siempre k denota un anillo conmutativo con unidad). Para cada $n \geq 1$ denotamos por $A^{\otimes^n}$el producto tensorial sobre k de las n copias de A y por A^e el álgebra envolvente de A; $A^{\otimes^n}$tiene una estructura natural de A^e–módulo a izquierda, dada por

$$(a \otimes b) \cdot (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = aa_1 \otimes \cdots \otimes a_n b\,. \tag{7}$$

Para $n = 1$ el producto en (7) coincide con el definido en la primera sección. Para cada $n \geq 1$ la función dada por

$$\begin{array}{rccc} b' : & A^{\otimes^{n+1}} & \longrightarrow & A^{\otimes^n} \\ & a_0 \otimes \cdots \otimes a_n & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_n \end{array}$$

es un morfismo de A^e–módulos; además, $(b')^2 = 0$, con lo cual se obtiene el complejo

$$\cdots \xrightarrow{b'} A^{\otimes^{n+1}} \xrightarrow{b'} A^{\otimes^n} \xrightarrow{b'} \cdots \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A\,; \tag{8}$$

(8) es acíclico, ya que tiene una retracción homotópica definida para cada $n \geq 1$ por

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_o : & A^{\otimes^n} & \longrightarrow & A^{\otimes^{n+1}} \\ & x & \longmapsto & 1 \otimes x\,; \end{array}$$

Tensorizando $\left(A^{\otimes^*}, b'\right)$ por un A^e–módulo derecho M se obtiene el complejo

$$\begin{array}{l} \cdots \xrightarrow{1\otimes b'} M \otimes_{A^e} A^{\otimes^{n+1}} \xrightarrow{1\otimes b'} M \otimes_{A^e} A^{\otimes^n} \xrightarrow{1\otimes b'} \cdots \\ \qquad \cdots \xrightarrow{1\otimes b'} M \otimes_{A^e} A \otimes A \xrightarrow{1\otimes b'} M \otimes_{A^e} A, \end{array}$$

el cual puede ser presentado en la forma simplificada (9) mediante las identificaciones dadas por el diagrama (10):

$$\cdots \xrightarrow{b} M \otimes_k A^{\otimes^n} \xrightarrow{b} M \otimes_k A^{\otimes^{n-1}} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} M \otimes_k A \xrightarrow{b} M; \quad (9)$$

$$\begin{tikzcd} M \otimes_{A^e} A^{\otimes^{n+2}} \arrow[r, "1\otimes b'"] \arrow[d, "\alpha_n"'] & M \otimes_{A^e} A^{\otimes^{n+1}} \arrow[d, "\alpha_{n-1}"] \\ M \otimes_k A^{\otimes^n} \arrow[r, "b"'] & M \otimes_k A^{\otimes^{n-1}} \end{tikzcd} , \quad (10)$$

donde $b = \alpha_{n-1} \circ (1 \otimes b') \circ \alpha_n^{-1}$ y el isomorfismo α_n viene dado por $\alpha_n(m \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) = m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ (para definir α_n basta hacerlo sobre los elementos de la forma $m \otimes 1 \otimes x \otimes 1$, $x \in A^n$; en efecto, $m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} = m\,(a_0 \otimes a_{n+1}) \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)$. Nótese que b está dado por

$$\begin{aligned} & b\,(m \otimes a_1 \otimes \cdots a_n) = \\ &= m\,(a_1 \otimes 1) \otimes a_2 \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^n m\,(1 \otimes a_n) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}\,. \end{aligned} \quad (11)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} & b(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \\ &= \alpha_{n-1} \circ (1 \otimes b)(1 \otimes m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) \\ &= \alpha_{n-1}(m \otimes b'(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)) \\ &= \alpha_{n-1}\Bigg(m \otimes \Bigg[(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1) \\ & \quad +(-1)^n 1 \otimes a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n \\ & \quad + \sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots a_n \otimes 1\Bigg]\Bigg) \\ &= \alpha_{n-1}(m(a_1 \otimes 1) \otimes (1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)) \\ & \quad +(-1)\alpha_{n-1}(m(1 \otimes a_1) \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes 1) \\ & \quad +\alpha_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m \otimes 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= m(a_1 \otimes 1) \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\
&\quad + (-1)^n m(1 \otimes a_n) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Tomando en (9) $M = A$ se obtiene el *complejo de Hochschild de A* que se denota por $\left(A \otimes A^{\otimes^*}, b\right)$; su homología se conoce como la *Homología de Hochschild de A* y se denota por $HH_*(A)$. En esta situación, b se calcula por

$$
\begin{aligned}
& b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\
&\quad\quad + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(La estructura de A como A^e–módulo a derecha esta dada por $x(a \otimes b) = bxa$). Nótese que si A es k–proyectivo entonces $A \otimes A^{\otimes^n} \otimes A$ es A^e–proyectivo, con lo cual $HH_*(A) = \mathrm{Tor}_*^{A^e}(A, A)$.

Supongamos ahora que M es un A^e–módulo a izquierda; aplicando $\mathrm{Hom}_{A^e}(\,,$ $M)$ a $(A^{\otimes^*}, b')$ se obtiene la cocadena compleja

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b',M)} \mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes A \otimes A, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b',M)} \cdots \\
&\quad \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b',M)} \cdots \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b',M)} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^n}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b',M)} \\
&\quad\quad \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^{n+1}}, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(b',M)} \cdots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Podemos utilizar una identificación similar a (10) y presentar la cocadena anterior en una forma más sencilla:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^{\otimes^{n+1}}, M\right) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}\,g(b',M)} & \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^{\otimes^{n+2}}, M\right) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \beta_{n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \beta_n} \\
\mathrm{Hom}_k\left(A^{\otimes^{n-1}}, M\right) & \xrightarrow[h]{} & \mathrm{Hom}_k\left(A^{\otimes^n}, M\right).
\end{array}
$$

El isomorfismo β_n está definido de tal forma que si $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A^{\otimes^{n+2}}, M\right)$ y $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in A$, entonces $\beta_n(f)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = f(1 \otimes a_1 \otimes \cdots$

$\otimes a_n \otimes 1)$ (si $t \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes^n}, M)$ y $a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \in A^{\otimes^{n+2}}$ entonces $\beta_n^{-1}(t)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) = (a_0 \otimes a_{n+1})\, t\,(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$); h está entonces definido como $h = \beta_n \circ \mathrm{Hom}(b', M) \circ \beta_{n-1}^{-1}$; si $g \in \mathrm{Hom}_k\left(A^{\otimes^{n-1}}, M\right)$y $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \in A^{\otimes^n}$, entonces

$$
\begin{aligned}
h(g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = & \\
= \; & (a_1 \otimes 1)\, g(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
& + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots a_n) \\
& + (-1)^n (1 \otimes a_n)\, g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) \,.
\end{aligned} \tag{14}
$$

La cocadena compleja (13) toma la forma

$$
\begin{aligned}
M \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_k(A, M) \xrightarrow{h} \cdots \xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_k\left(A^{\otimes^{n-1}}, M\right) \\
\xrightarrow{h} \mathrm{Hom}_k\left(A^{\otimes^n}, M\right) \xrightarrow{h} \cdots
\end{aligned} \tag{15}
$$

Para $M = A$ la homología de (3.9) se conoce como la *cohomología de Hochschild de* A y se denota por $HH^*(A)$. En este caso (14) toma la forma

$$
\begin{aligned}
& h(g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = \\
& = \; a_1 g(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\
& \quad + (-1)^n g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1})\, a_n \,.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Nótese que si A es k–proyectivo, $HH^*(A) = \mathrm{Ext}^*_{A^e}(A, A)$.

Pasamos ahora a calcular la homología y cohomología de Hochschild del álgebra tensorial de un k–módulo libre V con base finita $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. El álgebra tensorial de V será denotada por $T(V)$. si I y T son como en la primera sección, entonces se tiene el siguiente lema preliminar:

Lema 8.

(i) $\{T(x_i)_{i=1}^n\}$ *es una* $T(V)^e$*–base de* I;

(ii) $\left\{\overline{T(x_i)}\right\}_{i=1}^{n}$ *es un conjunto de generadores de* $\Omega(T(V) \mid k)$ *como* $T(V)$*-módulo.*

Demostración.

(i) Veamos inicialmente que los elementos $T(x_1), \ldots, T(x_n)$ generan a I como $T(V)^e$–módulo. Sea $\sum a_i \otimes b_i \in I$; entonces $\sum a_i \otimes b_i = \sum (a_i \otimes b_i)(T(b_i))$, y la prueba se reduce a mostrar que cada elemento de la forma $T(b)$, $b \in T(V)$, es una $T(V)^e$–combinación lineal de los elementos de $T(x_1), \ldots, T(x_n)$. puesto que T es lineal, podemos asumir que b es un monomio de $T(V)$, digamos $b = u_1 \cdots u_m$, $u_i \in V$; aplicando (2) e inducción encontramos que $T(b)$ es una $T(V)^e$–combinación lineal de los elementos $T(u_1), \ldots, T(u_n)$. Finalmente, podemos expresar cada u_i como una k–linealidad de T.

Supóngase ahora que

$$\left(\sum_{i=1}^{l_1} a_{1i} \otimes b_{1i}\right) T(x_1) + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{l_1} a_{ni} \otimes b_{ni}\right) T(x_n) = 0\,,$$

con $a_{ji}, b_{ji} \in T(V)$. De aquí resulta

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l_i} a_{1i} x_1 \otimes b_{1i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l_n} a_{ni} x_n \otimes b_{ni} = \\ &\sum_{i=1}^{l_i} a_{1i} x_1 \otimes b_{1i} + \cdots + \sum_{i=1}^{l_n} a_{ni} \otimes x_n b_{ni}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Expresando cada a_{ij} como suma ascendente de sus componentes homogéneas se tiene

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=0}^{t(1,1)} m_j^{(1,1)}\right) \otimes x_1 b_{11} + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{t(1,l_1)} m_i^{(1,l_1)}\right) \otimes x_1 b_{1l_1} + \cdots + \\ &\left(\sum_{i=0}^{t(n,1)} m_i^{(n,1)}\right) \otimes x_n b_{n1} + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{t(n,l_n)} m_i^{(n,l_n)}\right) \otimes x_n b_{nl_n} = \\ &\left(\sum_{i=0}^{t(1,1)} m_i^{(1,1)}\right) x_1 \otimes b_{11} + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{t(1,l_1)} m_i^{(1,l_1)}\right) x_{1\otimes} b_{1l_1} + \cdots + \\ &\left(\sum_{i=0}^{t(n,1)} m_i^{(n,1)}\right) x_n \otimes b_{n1} + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{t(n,l_n)} m_i^{(n,l_n)}\right) x_n \otimes b_{nl_n}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Escogemos la componente homogénea de mayor grado; sin pérdida de generalidad podemos asumir que ésta es $m_{t(n,l_n)}^{(n,l_n)}$. Podemos agrupar los términos de miembro derecho de la igualdad anterior que contienen x_n y obtener

$$\begin{aligned} m_{t(n,1)}^{(n,1)} x_n \otimes b_{n1} + \cdots + m_{t(n,l_n)}^{(n,l_n)} x_n \otimes b_{nl_n} &= \\ \left(m_{t(n,1)}^{(n,1)} \otimes b_{n1} + \cdots + m_{t(n,l_n)}^{(n,l_n)} \otimes b_{nl_n} \right) (x_n \otimes 1) &= 0 . \end{aligned}$$

Desarrollando cada componente m en términos de la base $x_1, \ldots, x_n$ podemos concluir que

$$m_{t(n,1)}^{(n,1)} \otimes b_{n1} + \cdots + m_{t(n,l_n)}^{(n,l_n)} \otimes b_{nl_n} = 0 .$$

Utilizando esta conclusión podemos simplificar (18) y repetir el proceso. Al cabo de un número finito de pasos se encuentra que $\sum_{i=1}^{l_i} a_{ji} \otimes b_{ji} = 0$ para cada $1 \leq j \leq n$, lo cual queríamos demostrar.

(ii) Puesto que $\overline{T(x)T(y)} = 0$ para cada $x,\ y \in T(V)$, podemos adoptar la prueba de la primera parte de (i) y concluir que los elememtos $\overline{T(x_1)}, \ldots, \overline{T(x_n)}$ generan $\Omega(T(V) \mid k)$ como $T(V)$–módulo. □

Teorema 9. *Sea $T(V)$ el álgebra tensorial de un k-módulo libre V con base finita $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Entonces*

(i)

$$HH_r(T(V)) = \begin{cases} T(V)/[T(V), T(V)] \cong k[x_1, \ldots, x_n], & si\ r = 0, \\ \left\{ (p_1, \ldots p_n) \in T(v)^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x_i p_i - p_i x_i) = 0 \right\}, & si\ r = 1, \\ 0, & si\ r \geq 2, \end{cases}$$

(ii)

$$HH^r(T(V)) = \begin{cases} k, & si\ r = 0, \\ T(V)^n / \{(ax_1 - x_1 a, \ldots, ax_n - x_n a) \mid a \in A\}, & si\ r = 1, \\ 0, & si\ r \geq 2. \end{cases}$$

Demostración.

(i) Según la hipótesis, $HH_*(T(V)) = \mathrm{Tor}_*^{T(V)^e}(T(V), T(V))$; por lo tanto basta considerar la siguiente resolución $T(V)^e$–proyectiva de $T(V)$:

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{b_2} T(V)^e \xrightarrow{b_1} T(V) \longrightarrow 0 , \tag{19}$$

donde F es un $T(V)^e$ módulo libre con base $\{e_1,\dots,e_n\}$, $b_2(e_i) = T(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, y b_1 es el producto. La exactitud de (19) es consecuencia del lema 4 (i). Tensoriazando (19) a izquierda por $T(V)$ resulta

$$0 \longrightarrow T(V)^n \xrightarrow{b} T(V) \longrightarrow 0\,,$$

donde $b(p_1,\dots,p_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_ip_i - p_ix_i)$, $p_i \in T(V)$, $1 \leq i \leq n$.
Claramente $Im(b) = [T(V),X] = k$-módulo generado por los elementos de la forma $[a,x]$, $a \in T(V)$, $x \in X$ (nótese que b no es en general un $T(V)$-homomorfismo). Veamos que $[T(V),X] = [T(V),T(V)]$. En efecto, en vista de la k-lineal de $[\ ,\ ]$ y mediante inducción cualquier conmutador $[p,q]$, $p,q \in T(V)$, puede reducirse a uno de la forma $[p,xx']$, $x,x' \in X$. Pero $[p,xx'] = [px,x'] + [x'p,x] \in [T(V),X]$. Lo anterior muestra que $HH_0(T(V)) = T(V)/[T(V),T(V)] \approx k[x_1,\dots,x_n]$. De otra parte, $HH_1(T(V)) = \ker(b) = \{(p_1,\dots,p_n) \mid \sum_{i=1}^{n}(x_ip_i - p_ix_i) = 0,\}$ Esto comprueba la prueba de (i).

(ii) Puesto que $T(V)$ es proyectivo sobre k, $HH^*(T(V)) = \mathrm{Ext}^*_{T(V)^e}(T(V),T(V))$. Aplicamos entonces $\mathrm{Hom}_{T(V)^e}(\ ,T(V)^e)$ a (19) y obtenemos

$$0 \longrightarrow T(V) \xrightarrow{b} T(V)^n \longrightarrow 0\,,$$

donde $b(a) = (ax_1 - x_1a,\dots,ax_n - x_na)$, $a \in T(V)$. Así, $HH^0(T(V)) = \ker(b) = k$; $HH^1(T(V)) = T(V)^n/Im(b)$, con $Im(b) = \{(ax_1 - x_1a,\dots, ax_n - x_na) \mid a \in T(V)\}$.
Esto completa la prueba del teorema 9. □

Observación 10. *Nótese que los cálculos realizados en el teorema 9 coinciden con los que ya se conocían en la literatura clásica,* [1].

Referencias

[1] LODAY J.L. *Cyclic Homology*, Springer Verlag, Berlin, 1992.

[2] MATSUMURA H. *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.