

# Identificación de Coeficientes en Ecuaciones Parabólicas\*

CARLOS ENRIQUE MEJIA SALAZAR†

## Resumen

Se presenta el Método de Regularización por Convolución (*Mollification*) como procedimiento para regularizar problemas inversos, y se discute su aplicación a un problema unidimensional que consiste en la estimación de un coeficiente de difusión en una ecuación parabólica lineal. La implementación de la regularización por convolución se hace por medio de esquemas estables de diferencias finitas con sentido de marcha en la dirección del espacio. Algunos ejemplos numéricos ilustran las propiedades del método.

## 1. Introducción

El presente trabajo está basado en el artículo [4] que el autor escribió en conjunto con D. Murio. Presenta una modificación al método de regularización hiperbólica utilizado por Ewing y Lin en [2], que lo hace realista y general. La modificación consiste en la combinación de la regularización de Ewing y Lin con el Método de Regularización por Convolución. El resultado es que todos los datos del problema pueden admitirse contaminados por algún error de medición y no solamente los de las fronteras, como es el caso en [2].

---

\*Investigación apoyada parcialmente por Colciencias.

†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Problemas como el estudiado aquí son modelo para problemas complejos que surgen naturalmente en varias disciplinas científicas, como en el estudio de la conducción de calor o en el estudio del flujo en medios porosos, etc. El último de los temas tiene aplicaciones a la explotación de petróleo y al estudio de reservas de aguas subterráneas. Para una visión general sobre las matemáticas en la simulación y explotación de reservas petroleras, recomendamos el libro [1] editado por Ewing.

El trabajo comprende cuatro partes, así: Regularización hiperbólica; Método de Regularización por Convolución; Combinación de los dos anteriores; Observaciones finales.

## 2. Identificación por regularización hiperbólica

En [2] Ewing y Lin proponen una estabilización por perturbación singular para resolver el siguiente problema inverso:

Identificar el coeficiente  $a(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , en

$$\begin{aligned} u_t &= (au_x)_x + f(x, t), & 0 < x < 1, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < 1, & \\ u(0, t) &= \psi(t), & 0 < t, & \\ u_x(0, t) &= \phi(t), & 0 < t. & \end{aligned} \quad (1)$$

La estabilización, llamada por los autores *Regularización Hiperbólica*, consiste en cambiar el problema parabólico (1) por el siguiente problema hiperbólico:

Identificar el coeficiente  $a(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , en

$$\begin{aligned} \gamma^2 u_{tt} + u_t &= (au_x)_x + f(x, t), & 0 < x < 1, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= g(x), & 0 < x < 1, & \\ u(0, t) &= \psi(t), & 0 < t, & \\ u_x(0, t) &= \phi(t), & 0 < t, & \\ u_t(x, 0) &= (a(x)u_x(x, 0))_x + f(x, 0), & 0 < x < 1, & \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\gamma$ , el parámetro de regularización, es una constante positiva.

La estrategia para la solución consiste en un proceso de marcha en la dirección de la variable espacial  $x$  basado en un esquema explícito de diferencias finitas para el problema (2). Más precisamente:

Sean  $M$  y  $N$  enteros positivos,  $h = \frac{1}{M}$ ,  $k = \frac{1}{N}$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ ,  $t_n = nk$ ,  $n = 0, 1, \dots, L$ , donde  $L$  depende de  $h$  y  $k$  en una forma que se explicará posteriormente. Para  $n \geq 0$ , denotamos

$$f_j^n = f(jh, nk), \quad g_j = g(jh) \quad \text{y} \quad a_{j+\frac{1}{2}} = a\left(\left(j + \frac{1}{2}\right)h\right).$$

Además, denotamos por  $U_j^n$  y  $A_{j+\frac{1}{2}}$  las variables discretas del método numérico. Sus valores iniciales para todo  $n \geq 0$ , son:

$$\begin{aligned} U_0^n &= \psi(nk), \\ U_1^n &= \psi(nk) + h\phi(nk), \\ A_{\frac{1}{2}} &= a_{\frac{1}{2}}, \\ A_{\frac{3}{2}} &= \frac{1}{g_2 - g_1} \left\{ A_{\frac{1}{2}} (g_1 - g_0) + h^2 \left( \frac{U_1^1 - g_1}{k} - f_1^0 \right) \right\}. \end{aligned}$$

El esquema de marcha en la dirección de la variable espacial lo definen las siguientes ecuaciones, en las cuales  $j \geq 1$ :

$$\begin{aligned} U_{j+1}^n &= U_j^n + \frac{1}{A_{j+\frac{1}{2}}} \left\{ A_{j-\frac{1}{2}} (U_j^n - U_{j-1}^n) \right. \\ &\quad \left. + h^2 \left( \gamma^2 \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2k} - f_j^n \right) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_{j+1+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{g_{j+2} - g_{j+1}} \left\{ A_{j+\frac{1}{2}} (g_{j+1} - g_j) \right. \\ &\quad \left. + h^2 \left( \frac{U_{j+1}^1 - g_{j+1}}{k} - f_{j+1}^0 \right) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Dos observaciones deben tenerse en cuenta para el análisis de este esquema:

1. Para garantizar la estabilidad y convergencia del método numérico se requiere conocer la condición inicial en tiempo,  $g(x)$ , de forma exacta, y además se necesita que haya constantes  $d_0$  y  $d_1$  tales que

$$0 < d_0 \leq |g'(x)| \leq d_1 \quad \text{para todo } x \in [0, 1].$$

2. El análisis del método en [2] muestra que la regularización hiperbólica restaura la continuidad con respecto a perturbaciones en las condiciones de borde.

Un ejemplo puede ser útil en este momento.

**Ejemplo 1.** (Ewing y Lin, [2]). Identificar  $a(x)$  en

$$\begin{aligned} u_t &= (au_x)_x - (x^2 + 2x) \exp(x + t), & 0 < x < 1, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= \exp(x), & 0 < x < 1, & \\ u(0, t) &= \exp(t), & 0 < t, & \\ u_x(0, t) &= \exp(t), & 0 < t. & \end{aligned} \quad (5)$$

Las soluciones exactas son  $a(x) = 1 + x^2$  y  $u(x, t) = \exp(x + t)$ .

La Tabla 1 relaciona el máximo nivel de error permitido en los datos de frontera,  $\epsilon$ , el máximo nivel de error en la condición inicial,  $\epsilon_1$ , el parámetro de regularización,  $\gamma$  y la norma discreta del error en el coeficiente calculado, definida por

$$|\Delta A|_2 \equiv \left[ \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} |a_{j+\frac{1}{2}} - A_{j+\frac{1}{2}}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

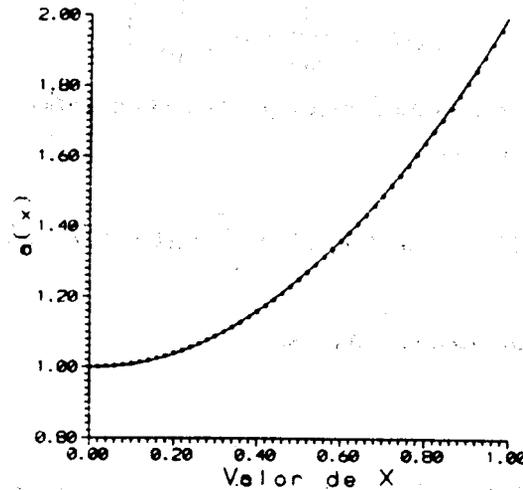
$\epsilon$	$\epsilon_1$	$\gamma$	$ \Delta A _2$
0.0000	0.0000	0.0550	0.0032
0.0030	0.0000	0.1000	0.0612
0.0050	0.0000	0.1000	0.1470
0.0030	0.0000	0.1500	0.0252
0.0050	0.0000	0.1500	0.0494
0.0000	0.0020	0.1500	0.3221
0.0000	0.0020	0.1800	0.3592
0.0030	0.0030	0.1500	1.0047

**Tabla 1:** Norma del Error en Ejemplo 1.

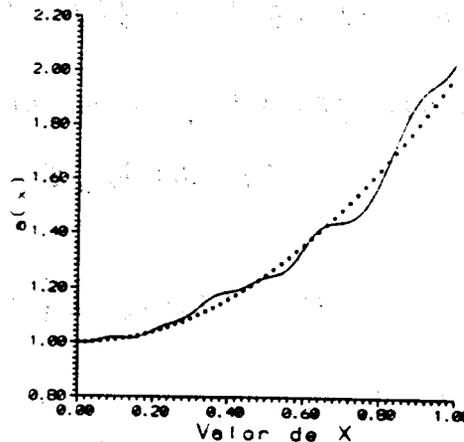
Los datos iniciales con error, para efectos de la experimentación, se obtienen así:  $g_m(x_j) = g_j + \epsilon_j$ , donde  $\epsilon_j$  es una variable aleatoria con distribución normal de varianza  $\sigma^2 = \epsilon_1^2$ . Similarmente para simular los datos de frontera con error.

Puede verse que la presencia de error en la condición inicial, es decir,  $\epsilon_1 > 0$ , es sencillamente inadmisibile. Se observa también que la regularización es efectiva cuando se presentan perturbaciones en las condiciones de borde solamente, o sea cuando  $\epsilon > 0$  y  $\epsilon_1 = 0$ .

La Figura 1 corresponde a la primera fila de la Tabla 1. La Figura 2 reporta la calidad de la identificación que se obtiene cuando hay errores en los datos de la frontera activa. En ambas figuras,  $M = N = 200$ .



**Figura 1:** Coeficiente reconstruido  $a(x)$  en Ejemplo 1. Regularización hiperbólica: Exacta (\*\*\*) y Calculada (—)



**Figura 2:** Coeficiente reconstruido  $a(x)$  en Ejemplo 1. Regularización hiperbólica: Exacta (\*\*\*) y Calculada (—)

La pregunta es: ¿Será posible modificar este método de manera que también restaure la continuidad con respecto a perturbaciones en la condición inicial  $g(x)$ ? La respuesta es afirmativa y será explicada en las próximas secciones.

### 3. Regularización por convolución

Sea

$$\rho_\delta(t) = \frac{1}{\delta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{\delta^2}\right).$$

La  $\delta$ -Regularización de una función  $f$ , cuyo cuadrado es integrable, está dada por la convolución

$$J_\delta f(t) = (\rho_\delta * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\delta(t-s)f(s)ds,$$

y satisface los siguientes estimados:

#### Proposición 1.

a. Si  $f(t) \in C^2(I)$ ,  $I$  intervalo en  $R$ , entonces existe una constante  $C$  independiente de  $\delta$  tal que

$$\|J_\delta f - f\|_{\infty, I} \leq C\delta \quad \text{y} \quad \|J_\delta f' - f'\|_{\infty, I} \leq C\delta.$$

b. Si  $f_m(t) \in C^0(I)$  y  $\|f - f_m\|_{\infty, I} \leq \epsilon$ , entonces

$$\|J_\delta f - J_\delta f_m\|_{\infty, I} \leq \epsilon$$

y

$$\|(J_\delta f)' - (J_\delta f_m)'\|_{\infty, I} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right) \frac{\epsilon}{\delta}.$$

**Demostración.** Ver [5].

### 4. Regularización hiperbólica y regularización por convolución

En esta sección proponemos una situación más realista que fue discutida ampliamente por Mejía y Murio en [4]. Suponemos que para resolver (1)

sólo conocemos funciones continuas  $g_m(x)$ ,  $\psi_m(t)$  y  $\phi_m(t)$  y una tolerancia positiva  $\epsilon$  que cumplen

$$\|g - g_m\|_\infty \leq \epsilon, \quad \|\psi - \psi_m\|_\infty \leq \epsilon \quad \text{y} \quad \|\phi - \phi_m\|_\infty \leq \epsilon.$$

El problema estabilizado se obtiene por combinación de la regularización hiperbólica y el *método de regularización por convolución*. Es el siguiente: Identificar  $a(x)$ ,  $0 < x < 1$ , en

$$\begin{aligned} \gamma^2 u_{tt} + u_t &= (au_x)_x + f(x, t), & 0 < x < 1, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= J_\delta g_m(x), & 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= J_\delta \psi_m(t), & 0 < t, \\ u_x(0, t) &= J_\delta \phi_m(t), & 0 < t, \\ u_t(x, 0) &= (a(x)J_\delta g_m(x))_x + f(x, 0), & 0 < x < 1, \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\delta$  es el radio de regularización por convolución,  $J_\delta g_m(x)$  es la regularización por convolución en  $x$  de  $g_m(x)$ , y  $J_\delta \psi_m(t)$  y  $J_\delta \phi_m(t)$  son las regularizaciones en  $t$  de  $\psi_m(t)$  y  $\phi_m(t)$  respectivamente.

#### 4.1. El esquema explícito de marcha

Sean  $M, N, h, k, f_j^n, g_j$  y  $a_{j+\frac{1}{2}}$  como en la sección 2. Denotamos  $v(x, t) = u_x(x, t)$  y  $w(x, t) = \gamma u_t(x, t)$ . Para  $n \geq 0$ , hacemos

$$\begin{aligned} G_j &= J_\delta g_m(jh), & j \geq 0, \\ u_j^n &= u(jh, nk), \\ v_{j+\frac{1}{2}}^n &= v((j + \frac{1}{2})h, nk), & j \geq 1, \\ w_j^n &= w(jh, nk), & j \geq 1. \end{aligned}$$

Las variables del método numérico,  $U_j^n, V_{j+\frac{1}{2}}^n, W_j^n$  y  $A_{j+\frac{1}{2}}$ , son funciones discretas definidas en la subdivisión con parámetros  $h$  y  $k$ . Sus valores iniciales se definen para todo  $n$ , pues el sentido de la marcha es en la dirección del eje  $x$ . Estos valores son:

$$\begin{aligned} U_0^n &= J_\delta \psi_m(nk), \\ V_{\frac{1}{2}}^n &= J_\delta \phi_m(nk), \\ W_0^n &= \gamma (J_\delta \psi_m)'(nk), \\ A_{\frac{1}{2}} &= a(\frac{1}{2}h), \\ U_1^n &= U_0^n + hV_{\frac{1}{2}}^n. \end{aligned}$$

El esquema explícito de marcha está dado por las siguientes ecuaciones:

$$U_{j+1}^n = U_j^n + \frac{1}{A_{j+\frac{1}{2}}} \left\{ A_{j-\frac{1}{2}} (U_j^n - U_{j-1}^n) \right. \\ \left. + h^2 \left( \gamma^2 \frac{U_j^{n+1} - 2U_j^n + U_j^{n-1}}{k^2} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2k} - f_j^n \right) \right\} \quad (8)$$

y

$$A_{j+1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{G_{j+2} - G_{j+1}} \left\{ A_{j+\frac{1}{2}} (G_{j+1} - G_j) \right. \\ \left. + h^2 \left( \frac{U_{j+1}^1 - G_{j+1}}{k} - f_{j+1}^0 \right) \right\} \quad (9)$$

las cuales, en términos de las otras variables, son:

$$\frac{A_{j+1+\frac{1}{2}} V_{j+1+\frac{1}{2}}^n - A_{j+\frac{1}{2}} V_{j+\frac{1}{2}}^n}{h} = \frac{\gamma}{k} (W_{j+1}^{n+1} - W_{j+1}^n) + \frac{1}{\gamma} W_{j+1}^n - f_{j+1}^n \quad (10)$$

y

$$\frac{A_{j+1+\frac{1}{2}} (G_{j+2} - G_{j+1}) - A_{j+\frac{1}{2}} (G_{j+1} - G_j)}{h^2} = \frac{1}{\gamma} W_{j+1}^0 - f_{j+1}^0 \quad (11)$$

Los cálculos se hacen en una región triangular en el plano  $(x, t)$ . Si se dispone de una cantidad suficiente  $L + 1$  de valores para los datos de frontera en  $x = 0$ , se pueden aproximar no solo el coeficiente  $a$ , sino también la solución  $u$  de la ecuación diferencial en (1) y sus derivadas con respecto a  $x$  y  $t$  para  $0 < x < 1$  y  $0 < t < T$ . Suponemos entonces que  $(L + 1)k = \eta T$ , donde  $\eta$  es una constante.

#### 4.2. Análisis de error

Ahora presentamos el principal estimado de estabilidad del artículo de Ewing y Lin para el problema con regularización hiperbólica y regularización por convolución. Debe anotarse que ahora también se restaura la continuidad con respecto a los datos iniciales para  $t = 0$ . Empezamos con la definición de las funciones de error

$$\begin{aligned} \Delta V_{j+\frac{1}{2}}^n &= v_{j+\frac{1}{2}}^n - V_{j+\frac{1}{2}}^n, \\ \Delta W_j^n &= w_j^n - W_j^n, \\ \Delta A_{j+\frac{1}{2}} &= a_{j+\frac{1}{2}} - A_{j+\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

y con las suposiciones que son necesarias para el análisis.

**Suposición 2.**  $g(x) \in C^2([0, 1])$  y hay constantes positivas  $M_0$  y  $M_1$  tales que

$$\begin{aligned} M_0 &\leq \inf_{x \in [0,1]} |g'(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |g'(x)| \leq M_1, \\ M_0 &\leq \inf_{x \in [0,1]} |J_\delta g'(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |J_\delta g'(x)| \leq M_1, \\ M_0 &\leq \inf_{x \in [0,1]} |(J_\delta g_m)'(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |(J_\delta g_m)'(x)| \leq M_1. \end{aligned}$$

**Suposición 3.** Existen constantes positivas  $M_2$  y  $M_3$  tales que

$$\begin{aligned} M_2 &\leq \min_j A_{j+\frac{1}{2}} \leq \max_j A_{j+\frac{1}{2}} \leq M_3, \\ \max_j |W_j^0| &\leq M_3. \end{aligned}$$

**Suposición 4.** Regularidad de la solución  $u$  del problema parabólico (1):  $u(x, t) \in C^2([0, 1] \times [0, T])$ .

La suposición 2 es la herramienta que nos posibilita utilizar los resultados de [2] en este caso más general. Las demás suposiciones, las mismas del artículo citado, son las usuales para esta clase de problemas de identificación.

El principal resultado está basado en las siguientes normas:

$$\begin{aligned} \|\Delta V_{j+\frac{1}{2}}\|^2 &= \sum_{n=1}^{L-j} |\Delta V_{j+\frac{1}{2}}^n|^2, \\ \|\Delta W_j\|^2 &= \sum_{n=0}^{L-j} |\Delta W_j^n|^2, \end{aligned}$$

y

$$\|\Delta_j^\delta\|_k^2 = \|\Delta V_{j+\frac{1}{2}}\|^2 k + \|\Delta W_j\|^2 k + |\Delta A_{j+\frac{1}{2}}|^2. \quad (12)$$

La cota para el error en el siguiente teorema depende de  $h, k, \gamma$  y  $\|\Delta_0^\delta\|_k$ . Este último es el error en  $x = 0$  y es el que refleja la dependencia de  $\epsilon$  y  $\delta$  del error total. Lo consideraremos en más detalle:

**Proposición 5.**

$$\|\Delta_0^\delta\|_k^2 \leq |\Delta A_{\frac{1}{2}}|^2 + M_6 T \left( (\delta + \epsilon + h)^2 + \gamma \left( \delta + \frac{\epsilon}{\delta} \right)^2 \right), \quad (13)$$

donde  $M_6$  es una constante independiente de  $\delta, \epsilon$ , y  $\gamma$ .

**Demóstración.** La prueba es una consideración de los dos primeros términos del error (12) y se basa en la consistencia y la estabilidad de la regularización por convolución de los datos de frontera.

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta V_{\frac{1}{2}}\|^2 k + \|\Delta W_0\|^2 k \\
 &= \sum_{n=1}^L \left| \Delta V_{\frac{1}{2}}^n \right|^2 k + \sum_{n=0}^L \left| \Delta W_0^n \right|^2 k \\
 &= \sum_{n=1}^L \left| v_{\frac{1}{2}}^n - V_{\frac{1}{2}}^n \right|^2 k + \sum_{n=0}^L \left| w_0^n - W_0^n \right|^2 k \\
 &= \sum_{n=1}^L \left| \phi(nk) + O(h) - J_\delta \phi_m(nk) \right|^2 k \\
 &\quad + \sum_{n=0}^L \left| \psi'(nk) - (J_\delta \psi_m)'(nk) \right|^2 \gamma k.
 \end{aligned}$$

La Proposición 1 proporciona los siguientes estimados para esta suma:

$$\begin{aligned}
 & \|\Delta V_{\frac{1}{2}}\|^2 k + \|\Delta W_0\|^2 k \\
 &\leq k \sum_{n=1}^L (C\delta + \epsilon + O(h))^2 + \gamma k \sum_{n=0}^L \left( C\delta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\epsilon}{\delta} \right)^2 \\
 &\leq kL(C\delta + \epsilon + O(h))^2 + \gamma k(L+1) \left( C\delta + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\epsilon}{\delta} \right)^2 \\
 &\leq M_6 T \left( (\delta + \epsilon + h)^2 + \gamma \left( \delta + \frac{\epsilon}{\delta} \right)^2 \right),
 \end{aligned}$$

y de aquí se concluye (13).  $\square$

La continuidad con respecto a los datos se presenta en el siguiente teorema.

**Teorema 6.** (Ewing y Lin [2]). Si se cumplen las Suposiciones 2-4 y  $h$  y  $k$  satisfacen

$$\frac{\gamma h}{k} < \min \{M_2, M_7, 1\} \quad \text{y} \quad \frac{k}{h} \leq M_8$$

para constantes no nulas  $M_7$  y  $M_8$ , entonces existen constantes  $M_9$  y  $M_{10}$  tales que

$$\begin{aligned} & \|\Delta_{j+1}^\delta\|_k^2 \\ & \leq \left( \|\Delta_0^\delta\|_k^2 + O(k) + O(h) + \gamma^2 \right) (M_9 + hC(h, k, \gamma) \exp(C(h, k, \gamma))), \end{aligned}$$

donde  $C(h, k, \gamma) = M_{10}(\frac{1}{\gamma} + 1 + O(h) + O(k))$ .

**Demostración.** Ver [2].  $\square$

**Nota 1.** El error  $\|\Delta_j^\delta\|_k$  no incluye explícitamente una componente con el error en  $U_j^n$ . En la siguiente subsección se muestra que también es posible aproximar a  $u(x, t)$  como lo sugiere el esquema de marcha.

### 4.3. Resultados numéricos

Ahora pasamos a discutir la implementación del esquema propuesto. En todos los ejemplos utilizaremos los siguientes parámetros:  $M = N = 200$ ,  $h = k = \frac{1}{M}$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, M$ ,  $T = 1 = Mk$ ,  $\eta = 3$ ,  $L = 3M$ ,  $t_n = nk$ ,  $n = 0, 1, \dots, 3M$ . Así como en la sección 2, la aproximación obtenida probablemente por una medición de la condición inicial en tiempo se simula así:

$$g_m(x_j) = g(x_j) + \epsilon_j,$$

donde  $\epsilon_j$  es una variable aleatoria con distribución normal de varianza  $\sigma^2 = \epsilon^2$ .

Los valores discretos de las condiciones de borde  $\psi_m(t_n)$  y  $\phi_m(t_n)$  se obtienen de forma similar. Utilizamos el mismo nivel máximo de error  $\epsilon$  tanto para condiciones de borde como para la condición inicial.

Para ilustrar la estabilidad y precisión del nuevo método numérico se usan diferentes valores para el nivel máximo de perturbaciones  $\epsilon$ , y valores apropiados para los parámetros de regularización  $\gamma$  y  $\delta$ . Los errores en  $a(x)$  y  $u(x, t)$  se miden con las normas discretas

$$|\Delta A|_2 \equiv \left[ \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} |a_{j+\frac{1}{2}} - A_{j+\frac{1}{2}}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

y

$$|\Delta U|_2 \equiv \left[ \frac{1}{M^2} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{n=1}^M |u(jh, nk) - U_j^n|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (15)$$

respectivamente.

El primer experimento que presentamos se realiza en el Ejemplo 1 de la sección 2. Las figuras 3 y 4 muestran la calidad de la aproximación del coeficiente  $a(x)$  y de la solución  $u(x, t)$  de la ecuación diferencial. Se utiliza un nivel máximo de perturbación  $\epsilon = 0.005$ , tanto en condiciones de borde como en la condición inicial. Los parámetros de regularización son  $\gamma = 0.1$  y  $\delta = 0.03$ . La Tabla 2 reporta otros ensayos con el mismo ejemplo. En todos se aprecia la estabilidad del método.

$\epsilon$	$\gamma$	$\delta$	$ \Delta A _2$	$ \Delta U _2$
0.000	0.050	0.000	0.002	0.000
0.003	0.100	0.020	0.058	0.014
0.005	0.100	0.030	0.054	0.014

Tabla 2: Normas de Error en Ejemplo 1

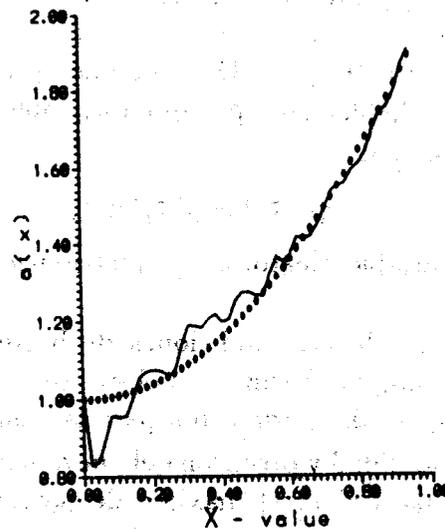


Figura 3: Coeficiente reconstruido  $a(x)$  en Ejemplo 1. Regularización hiperbólica y Regularización por Convolución: Exacta (\*\*\*) y Calculada (—)

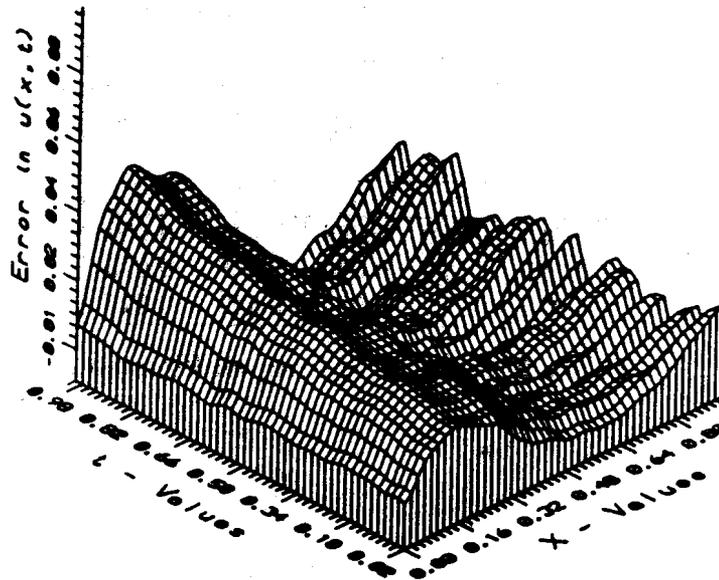


Figura 4: Error en  $u(x,t)$  en Ejemplo 1. Regularización hiperbólica y Regularización por Convolución: Exacta (\*\*\*) y Calculada (—)

Ejemplo 2. (Ewing y Lin, [2]). Reconstrucción de un coeficiente  $a(x)$  que solamente es diferenciable en subintervalos.

Identificar  $a(x)$  en

$$\begin{aligned}
 u_t &= (au_x)_x + f(x+t), & 0 < x < 1, & 0 < t, \\
 u(x,0) &= \exp(x), & 0 < x < 1, & \\
 u(0,t) &= \exp(t), & 0 < t, & \\
 u_x(0,t) &= \exp(t), & 0 < t, &
 \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp(x+t), & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ -\left(\frac{3}{2} + 3x\right) \exp(x+t), & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right) \exp(x+t), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{4} \exp(x+t), & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

El coeficiente exacto es la función

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ 3x - \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{3}{4}, & \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

La Tabla 3 y la Figura 5 ilustran la estabilidad y precisión de la reconstrucción de este coeficiente, que es un verdadero reto. Los parámetros para la figura son  $\gamma = 0.12$ ,  $\epsilon = 0.005$  y  $\delta = 0.03$ . De nuevo hay perturbaciones en los datos para  $t = 0$  y en las condiciones de borde.

$\epsilon$	$\gamma$	$\delta$	$ \Delta A _2$	$ \Delta U _2$
0.000	0.080	0.000	0.004	0.000
0.003	0.120	0.030	0.026	0.013
0.005	0.120	0.030	0.029	0.017

Tabla 3: Normas de Error en Ejemplo 2.

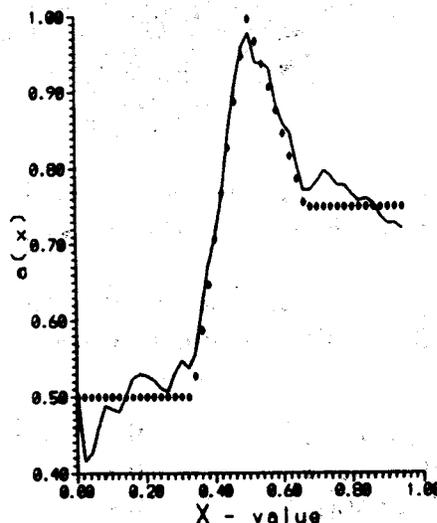


Figura 5: Coeficiente reconstruido  $a(x)$  en Ejemplo 2. Regularización hiperbólica y Regularización por Convolución: Exacta (\*\*\*) y Calculada (—)

## 5. Observaciones finales

La decisiva participación del Método de Regularización por Convolución en la regularización del problema (1) lleva a pensar en la posibilidad de utilizar esta técnica sin combinarla con otra para la solución de problemas

semejantes. A esta conclusión se llega también al revisar las distintas aplicaciones del método a la solución de problemas inversos. La referencia [5] hace una reseña muy completa de dichas aplicaciones.

Nuestros resultados en esta dirección son halagüenos. Una parte de ellos fueron reportados recientemente en [3] y son una generalización de los presentados en este artículo en varios aspectos. Nosotros resaltamos la posibilidad de estimar la condición inicial en tiempo y la posibilidad que tiene el coeficiente de difusión de depender tanto de  $x$  como de  $t$ .

El problema tratado en [3] es el siguiente:

Identificar  $a(x, t)$ ,  $(x, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$  y  $u(x, 0)$ ,  $x \in (0, 1)$  en

$$\begin{aligned} u_t &= (au_x)_x + f(x, t), & (x, t) \in D, \\ u(0, t) &= \psi(t), & 0 < t, \\ u_x(0, t) &= \phi(t), & 0 < t, \\ a(x_0, t) &= \sigma^0(t), & 0 < t, \\ a(x_1, t) &= \sigma^1(t), & 0 < t, \end{aligned} \tag{17}$$

donde  $0 < x_0 < x_1 \ll 1$  y las funciones  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\sigma^0(t)$  y  $\sigma^1(t)$  no se conocen exactamente. En su lugar conocemos a  $\psi_m(t)$ ,  $\phi_m(t)$ ,  $\sigma_m^0(t)$  y  $\sigma_m^1(t)$ , las aproximaciones obtenidas por mediciones de las funciones-dato exactas  $\psi(t)$ ,  $\phi(t)$ ,  $\sigma^0(t)$  y  $\sigma^1(t)$ . Se suponen válidas las siguientes estimaciones:  $\|\psi - \psi_m\|_{\infty, I} \leq \epsilon$ ,  $\|\phi - \phi_m\|_{\infty, I} \leq \epsilon$  y  $\|\sigma^i - \sigma_m^i\|_{\infty, I} \leq \epsilon$ ,  $i = 0, 1$ , donde  $\epsilon$  es una constante positiva.

El método numérico que propusimos para la solución de (17) es una implementación del Método de Regularización por Convolución por medio de un esquema explícito de diferencias finitas. El artículo [3] incluye análisis de error y resultados numéricos que ilustran la calidad de los resultados que se obtienen.

Nos preocupan otras generalizaciones, muy en especial el paso a dimensiones más altas. El campo de las aplicaciones ofrece además una gran variedad de problemas que sería bueno tratar de resolver.

## Referencias

- [1] EWING R.E. editor, *The Mathematics of Reservoir Simulation*, SIAM, Philadelphia, 1983.

- [2] EWING R., LIN T. Parameter identification problems in single-phase and two-phase flow, *International Series of Numerical Mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel, **91** (1989), 85-108.
- [3] MEJÍA C.E. Identificación de coeficientes por el método de Mollificación por convolución, en *Memorias Escuela de Verano en Geometría Diferencial, Análisis Numérico y Ecuaciones Diferenciales Parciales*, Medellín, 1994.
- [4] MEJÍA, C.E.; MURIO, D.A. Mollified Hyperbolic Method for Coefficient Identification Problems, *Computers and Mathematics with Applications*. **26**, No. 5 (1993), 1-12.
- [5] MURIO, D.A. *The Mollification Method and the Numerical Solution of Ill-Posed Problems*, John Wiley and Sons, New York, 1993.

Postgrado de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín.