Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 139–147, junio–diciembre 1994

# Una Representación del Número Real

YU TAKEUCHI*

## 1. Introducción

Diariamente usamos las representaciones de los números reales en el sistema decimal; también se habla frecuentemente del sistema binario, o del sistema ternario. Desde hace más de 200 años se conocía que un número real puede ser representado por una fracción continua simple, a pesar de que estas últimas se usan muy poco hoy en día. Por ejemplo, el número $e-2$ en el sistema decimal es:

$$e-2=0.71828\ldots, \qquad \text{(sistema decimal)};$$

ésto puede expresarse en el sistema binario como sigue:

$$e-2=0.10110\ldots, \qquad \text{(sistema binario)}.$$

Usando fracciones continuas simples Euler demostró la siguiente representación del número $e-2$:

$$e-2=\frac{1|}{|1}\frac{1|}{|2}\frac{1|}{|1}\frac{1|}{|1}\frac{1|}{|4}\frac{1|}{|1}\frac{1|}{|1}\frac{1|}{|6}\frac{1|}{|1}\cdots, \quad \text{(fracción continua)}.$$

En el presente trabajo demostraremos que los números reales pueden ser representados por medio de sucesiones crecientes de números naturales.

*Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

## 2. Algoritmo de la representación

Dado un número real $a \in (0,1)$, se definen una sucesión creciente de números naturales $(n(1), n(2), n(3), \ldots)$ y una sucesión decreciente de números positivos $(a(0), a(1), a(2), a(3), \ldots)$ como sigue:

- $a(0) = a$;
- $n(1)$ es el número natural determinado por

$$1 < n(1) \cdot a(0) \leq 1 + a(0) \tag{1}$$

y

$$a(1) = n(1) \cdot a(0) - 1 \tag{2}$$

(ver la fig. 1).

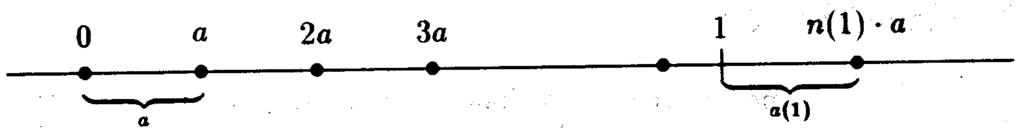


**Figura 1**

Usando la notación [1]

$$\begin{aligned} [\cdots] &= \text{la parte entera de} \ldots, \\ ((\cdots)) &= \text{la parte fraccionaria de} \ldots, \end{aligned}$$

se tiene:

$$n(1) = \left[\frac{1}{a(0)}\right] + 1, \qquad a(1) = ((n(1) \cdot a)). \tag{3}$$

Evidentemente

$$n(1) \geq 2 \qquad \text{y} \qquad 0 < a(1) \leq a(0) = a\,;$$

además, se tiene que $a(1) = a(0)$ si y sólo si

$$a(= a(0)) \text{ es racional y } \frac{1}{a(0)} \in \mathbb{N}.$$

[1]Según la notación empleada en el libro *Análisis Matemático*, de T. M. Apostol.

- *En general, se define, por inducción que*

$$n(k+1) = \left[\!\left[\frac{1}{a(k)}\right]\!\right] + 1 \tag{4}$$

*y*

$$a(k+1) = ((n(k+1)\cdot a(k))) = n(k+1)\cdot a(k) - 1\,. \tag{5}$$

Evidentemente

$$0 < a(k+1) \leq a(k)\,;$$

además,

$$a(k+1) = a(k) \text{ si y sólo si } \frac{1}{a(k)} \in \mathbb{N}\,. \tag{6}$$

Tenemos inmediatamente que

$$\begin{gathered}(2 \leq) n(1) \leq n(2) \leq n(3) \leq \cdots, \qquad n(k) \in \mathbb{N}, \\ a = a(0) \geq a(1) \geq a(2) \geq a(3) \geq \cdots > 0\,.\end{gathered}$$

Decimos que la sucesión $(n(k);\ k = 1,2,3,\ldots)$ es la representación del número real $a$, y se denotará por:

$$a \ : \ (n(1), n(2), n(3), \ldots)\,. \tag{7}$$

**Ejemplo 1.**

(i)

$$\begin{aligned}&a = \tfrac{3}{7}\\ &n(1) = [\![7/3]\!] + 1 = 3\,, \qquad a(1) = \tfrac{3}{7}\cdot 3 - 1 = \tfrac{2}{7}\,,\\ &n(2) = [\![7/2]\!] + 1 = 4\,, \qquad a(2) = \tfrac{2}{7}\cdot 4 - 1 = \tfrac{1}{7}\,,\\ &n(3) = [\![7/1]\!] + 1 = 8\,, \qquad a(3) = \tfrac{1}{7}\cdot 8 - 1 = \tfrac{1}{7}\,.\end{aligned}$$

*Por lo tanto se tiene la representación del número 3/7 como sigue:*

$$\tfrac{3}{7} \ : \ (3, 4, 8, , 8, \ldots)\,.$$

(ii)

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

$$\begin{aligned}
n(1) &= \left[\sqrt{2}\right] + 1 = 2\,, & a(1) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 - 1 = \sqrt{2} - 1\,,\\
n(2) &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right] + 1 = 3\,, & a(2) &= (\sqrt{2} - 1) \cdot 3 - 1 = 3\sqrt{2} - 4\,,\\
n(3) &= \left[\tfrac{1}{3\sqrt{2}-4}\right] + 1 = 5\,, & a(3) &= (3\sqrt{2} - 4) \cdot 5 - 1 = 15\sqrt{2} - 21\,,
\end{aligned}$$

*etc.*

*Así pues, tenemos la siguiente representación del número* $1/\sqrt{2}$ :

$$\tfrac{1}{\sqrt{2}} \;:\; (2, 3, 5, 5, 16, 18, 78, 103, 179, 856, 4569, 15944, \ldots)\,.$$

(iii) $a = \pi - 3$; *tenemos la siguiente representación (fácil de obtenerla usando una calculadora):*

$$\pi - 3 \;:\; (8, 8, 17, 19, 300, 1768, 3793, 7234, 35512, \ldots)\,.$$

*Podemos expresar lo anterior en la siguiente forma:*

$$\pi \;:\; 3 + (8, 8, 17, 300, 1768, 3793, 7234, 35512, \ldots)\,.$$

## 3. Algunas propiedades de la representación

**Propiedad 1.** *El número $a$ es* ***racional*** *si y sólo si las sucesiones* $(n(k);\ k = 1, 2, 3, \ldots)$, $(a(k);\ k = 1, 2, 3, \ldots)$ *son constantes a partir de algún término.*

**Demostración.** Supongamos que $a$ es un número racional, digamos $a = \frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$, $p < q$; entonces:

$$a(1) = \frac{p}{q} \cdot n(1) - 1 = \frac{p_1}{q} \quad \text{con } p_1 \in \mathbb{N},\ p_1 \le p\,.$$

Además, sabemos que $p_1 = p$ si y sólo si $\frac{1}{a} = \frac{1}{a(0)} \in \mathbb{N}$.

1. Si $\frac{1}{a} \in \mathbb{N}$, entonces se tiene:

$$\begin{aligned}
a &= a(1) = a(2) = a(3) = \cdots\,,\\
n(1) &= n(2) = n(3) = \cdots
\end{aligned}$$

2. Si $\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}$, entonces $p_1 < p$. Tenemos:

$$a(2) = \frac{p_1}{q} \cdot n(2) - 1 = \frac{p_2}{q} \qquad \text{con } p_2 \in \mathbb{N},\ p_2 \le p_1 \,.$$

Así sucesivamente,

$$a(3) = \frac{p_3}{q},\ a(4) = \frac{p_4}{q}, \ldots \qquad \text{con } p_3 \in \mathbb{N},\ p_4 \in \mathbb{N}, \ldots$$

y

$$p_1 \ge p_2 \ge p_3 \ge p_4 \ge \cdots > 0\,.$$

Por lo tanto, existe algún $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_j = p_{j+1}\,, \quad \text{o sea } a(j) = a(j+1)\,;$$

En consecuencia se debe tener que

$$a(j) = a(j+1) = a(j+2) = \cdots\,,$$
$$n(j+1) = n(j+2) = n(j+3) = \cdots$$

Recíprocamente, supongamos que la sucesión $(n(k);\ k = 1, 2, 3, \ldots)$ es constante a partir de algún término, digamos

$$n(j+1) = n(j+2) = n(j+3) = \cdots$$

De (5) se ve que la sucesión $(a(k);\ k = j,\ j+1,\ j+2, \ldots)$ es una *solución* de la fórmula lineal de recurrencia de primer orden:

$$a(k+1) = n(j+1) \cdot a(k) - 1 \qquad (k = j,\ j+1,\ j+2, \ldots)\,. \tag{8}$$

Como $n(j+1) \ge 2$, entonces la solución de la fórmula (8) diverge a $+\infty$, a excepción del caso

$$a(j) = \frac{1}{n(j+1) - 1}\,. \tag{9}$$

Por otra parte, sabemos que $a(k) < 1$ para todo $k$; por lo tanto, se debe cumplir la condición (9), o sea que $a(j)$ es un número racional. De (5) se concluye que $a = a(0)$ es un número racional.□

De (4) se observa que $\lim_{k\to\infty} n(k) = +\infty$ si y sólo si $\lim_{k\to\infty} a(k) = 0$.

Además, como $(n(k);\ k = 1, 2, 3, \ldots)$ es *creciente*, entonces si esta sucesión no es constante a partir de algún término, se debe tener que $n(k) \to +\infty$. Así, de la propiedad 1 se obtiene:

**Propiedad 2.** *$a$ es **irracional** si y sólo si*

$$\lim_{k\to\infty} n(k) = +\infty \quad y \quad \lim_{k\to\infty} a(k) = 0\,.$$

**Propiedad 3.** *Sea*

$$(n(1), n(2), n(3), \ldots, n(k), \ldots) \tag{10}$$

*una sucesión de números naturales con*

$$2 \le n(1) \le n(2) \le n(3) \le \cdots, \qquad \sup_k n(k) > 2\,; \tag{11}$$

*entonces existe único número real $a \in (0,1)$ tal que la sucesión (10) es la representación de $a$.*

**Demostración.** Si la sucesión (10) es la representación de $a(\in (0,1))$, entonces debe existir una sucesión $(a(k);\ k = 0,1,2,3,\ldots)$ que satisfaga la fórmula lineal de recurrencia de primer orden dada en (5):

$$a(k+1) = n(k+1)\cdot a(k) - 1 \qquad (k = 0,1,2,3,\ldots)\,. \tag{12}$$

Como la Sucesión $(a(k);\ k = 0,1,2,3,\ldots)$ converge, y $n(k+1) \ge 2$ para todo $k$, entonces se debe tener que

$$a = a(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(1)\cdot n(2)\cdots n(k)}. \tag{13}$$

Ahora vamos a demostrar que el número $a$ dado en (13) es el real buscado. Tenemos:

$$a = \frac{1}{n(1)}\cdot\left\{1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(2)\cdot n(3)\cdots n(k)}\right\}. \tag{14}$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(1)-1}{n(2)\cdot n(3)\cdots n(k)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n(2)}\right) + \sum_{k=3}^{\infty}\left\{\frac{1}{n(2)\cdots n(k-1)} - \frac{1}{n(2)\cdots n(k-1)n(k)}\right\} = 1\,;$$

luego

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(1)-1}{n(2)\cdot n(3)\cdots n(k)} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{n(k)-1}{n(2)\cdot n(3)\cdots n(k)} = 1\,,$$

y por lo tanto

$$(n(1)-1)\cdot\left\{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(2)\cdot n(3)\cdots n(k)}\right\} \le n(1)-1+1 = n(1)\,.$$

En consecuencia,

$$(n(1)-1)\cdot a \le \frac{n(1)}{n(1)} = 1\,. \tag{15}$$

Además, evidentemente se tiene que $a\cdot n(1) > 1$; por lo tanto, de (15) se obtiene

$$n(1) = \left[\frac{1}{a}\right] + 1\,. \tag{16}$$

De (12) y (14) tenemos

$$a(1) = n(1)\cdot a(0) - 1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n(2)\cdot n(3)\cdots n(k)}\,.$$

Por un desarrollo igual al anterior se tiene que

$$\begin{aligned} n(2) &= \left[\!\left[\frac{1}{a(1)}\right]\!\right] + 1\,, \\ a(2) &= n(2)\cdot a(1) - 1 = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{n(3)\cdot n(4)\cdots n(k)}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

En general, supongamos que

$$a(j-1) = \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{n(j)\cdot n(j+1)\cdots n(k)}\,; \tag{18}$$

entonces se demuestra, por un desarrollo igual al anterior, que

$$\begin{aligned} n(j) &= \left[\!\left[\frac{1}{a(j-1)}\right]\!\right] + 1\,, \\ a(j) &= n(j)\cdot a(j-1) - 1 \\ &= \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{n(j+1)\cdot n(j+2)\cdots n(k)}\,. \end{aligned} \tag{19}$$

Por lo tanto, la sucesión (10) es la representación del número real $a$ dado por *(13)*.

**Propiedad 4.** *Dado $a \in (0,1)$, sea $(n(k);\ k = 1,2,3,\dots)$ la sucesión que representa el número $a$, si $r_k$ es el número racional tal que*

$$r_k \ : \ (n(1), n(2), \dots, \underbrace{n(k), n(k), n(k), \dots}_{\text{constante}});$$

*entonces,*

$$\lim_{k\to\infty} r_k = a\,. \tag{20}$$

En efecto,

$$r_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n(1)\cdot n(2)\cdots n(j)} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(1)\cdot n(2)\cdots n(k)\cdot n(k)^{j-k}}\,,$$

luego

$$\left| r_k - \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n(1)\cdot n(2)\cdots n(j)} \right| \le \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^k} \overset{(k\to\infty)}{\longrightarrow} 0\,.$$

Por (13) se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} r_k \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n(1)\cdot n(2)\cdots n(k)} = a\,.$$

**Ejemplo 2.** *Sabemos que* $e-2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2\cdot 3\cdots k}$; *por lo tanto se tiene la siguiente representación del número $e-2$:*

$$e-2 \ : \ (2,3,4,\dots,k,\dots)\,.$$

*Como $(2,3,4,\dots) \longrightarrow +\infty$, entonces $e-2$ es irracional; por lo tanto el número $e$ es* ***irracional.***

*De la misma forma se obtiene:*

$$\begin{aligned} \operatorname{senh} 1 \ &: \ 1 + (6, 20, 42, \dots, 2k(2k+1), \dots)\,, \\ \cosh 1 \ &: \ 1 + (6, 12, 30, \dots, 2k(2k-1), \dots)\,; \end{aligned}$$

*se observa que* senh 1 *y* cosh 1 *son* ***números irracionales.***

Comparación de varias representaciones

## I Nueva representación

- $a(0) = a$;
- $n(1) = \left[\!\left[\dfrac{1}{a(0)}\right]\!\right] + 1,\ a(1) = n(1) \cdot a(0) - 1$;
- $n(k+1) = \left[\!\left[\dfrac{1}{a(k)}\right]\!\right] + 1,\ a(k+1) = n(k+1) \cdot a(k) - 1$;

  $a : (n(1), n(2), n(3), \ldots$, creciente, $\geq 2$.

  $$a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(1) \cdot n(2) \cdots n(k)}.$$

## II Sistema de Base $p$.

- $a(0) = a$
- $n(1) = [\![p \cdot a(0)]\!],\ a(1) = a(0) - \dfrac{n(1)}{p}$;
- $n(k+1) = [\![p^{k+1} \cdot a(k)]\!],\ a(k+1) = a(k) - \dfrac{n(k+1)}{(p)^{k+1}}$;

  $a : 0.n(1)n(2)n(3)\ldots,\ n(k) = 0, 1, 2, \ldots, p-1$;
- $a = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(k)}{(p)^k} = \frac{n(1)}{p} + \cdots + \frac{n(k)}{(p)^k} + a(k)$.

## III Fracción continua simple

- $a(0) = \dfrac{1}{a}$;
- $n(1) = [\![a(0)]\!],\ a(1) = \dfrac{1}{a(0) - n(1)}$,
- $n(k+1)\,[\![a(k)]\!],\ a(k+1)\dfrac{1}{a(k) - n(k+1)}$;
- $a : \dfrac{1 \mid}{\mid n(1)+}\dfrac{1 \mid}{\mid n(2)+}\dfrac{1 \mid}{\mid n(3)+}\cdots$