Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 149–166, junio–diciembre 1994

Representaciones 1–Dimensionales de Grupos Cuánticos Multiparamétricos*

MARGARITA MARIA TORO V.[†]

Resumen

Se defininen las deformaciones multiparamétricas de los grupos cuánticos en un parámetro $\mathbf{C}_q[\mathbf{SL}(n)]$ y $\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(n)]$. Se estudian algunas propiedades relevantes de estos grupos cuánticos y se clasifican sus representaciones 1–dimensionales.

1. Introducción

El objetivo de este artículo es estudiar las representaciones 1–dimensionales de algunos grupos cuánticos. Para hacer la exposición apropiada para los no expertos presentaremos, como motivación al tema, ejemplos simples y muy conocidos de grupos cuánticos, y luego pasaremos a presentar el resultado central. La organización es la siguiente: en la primera sección hacemos un pequeño recuento histórico y describimos ejemplos de las primeras estructuras a las cuales se les dió el nombre de grupos cuánticos. En la siguiente sección usamos el método de Sudbery para construir $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{Q}}[\mathbf{M(n)}]$, y a partir de esta biálgebra construímos los grupos cuánticos multiparamétricos $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{Q}}[\mathbf{G}]$ para $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n)$ y $\mathbf{G} = \mathbf{SL}(n)$,

*Investigación apoyada parcialmente por COLCIENCIAS.
[†]Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

para q un complejo no nulo y no raíz de la unidad y $\mathfrak{J}$ una matriz compleja $n \times n$ multiplicativamente antisimétrica. Es importante anotar que existen otras formas de construir dichos grupos cuánticos, una de las cuales utiliza la técnica de deformar mediante 2–cociclos los grupos cuánticos clásicos en un parámetro $\mathbf{C}_q\,[\mathbf{G}]$, para cualquier grupo de Lie $\mathbf{G}$ semisimple, conexo y simplemente conexo. Esta última construcción es más general y es particularmente útil para clasificar los espectros primo y primitivo de las álgebras $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{J}}\,[\mathbf{G}]$. Para más información ver [4, 12]. En la última sección clasificamos las representaciones 1–dimensionales de las álgebras $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{J}}\,[\mathbf{G}]$ para $\mathbf{G} = \mathbf{M}(n)$, $\mathbf{GL}(n)$ ó $\mathbf{G} = \mathbf{SL}(n)$.

2. Recuento Histórico y Ejemplos

Las álgebras universales envolventes cuánticas aparecieron como resultado de investigaciones en los aspectos algebraicos de sistemas cuánticos integrables en el marco del problema inverso de dispersión cuántica. El primer ejemplo fue hallado por Kulish y Reshetikhin y se denotó $U_q\,(sl\,(2))$, pues está estrechamente ligado al álgebra universal envolvente del álgebra de Lie $sl(2)$. Rápidamente su construcción se generalizó y se encontraron nuevas estructuras algebraicas vistas como deformación de las álgebras universales envolventes de álgebras de Lie. Además se logró establecer que el lenguaje apropiado para describir estas nuevas estructuras era el de las algebras de Hopf, que había sido introducido por Heinz Hopf en 1941 en sus trabajos sobre homología y cohomología de grupos topológicos. Al estudiar algebraicamente estas nuevas construcciones se encontró una estructura de Algebra de Hopf para $U_q\,(sl\,(2))$ que no es conmutativa ni co–conmutativa. Este hecho generó un gran interés dentro de los algebristas, quienes llevaban varios decenios estudiando este tipo de estructuras, pero que carecían de un buen número de ejemplos interesantes, especialmente ejemplos provenientes de otras ramas del conocimiento. En una conferencia en Berkeley (1986), Drinfel'd se refirió a estas estructuras como "grupos cuánticos" y el término se difundió rápidamente de manera informal, aunque puede causar confusión por el hecho de que estas estructuras no son grupos sino álgebras de Hopf y el término "cuántico" se usa para resaltar el hecho de que ciertos "grupos cuánticos" pueden considerarse deformaciones por un parámetro q de estructuras algebraicas clásicas de tal forma que para $q = 1$ se reproduce el objeto original.(Ver [2, 5] ó [6]).

Actualmente se está haciendo mucha investigación tendiente a definir de forma precisa y rigurosa el término "grupo cuántico". El estudio de los grupos cuánticos tiene un gran auge en el momento, no sólo desde el punto de vista del álgebra no–conmutativa, sino también en muchas áreas donde tiene aplicaciones, como en mecánica cuántica, mecánica estadística, teoría de nudos y trenzas, teoría de campos conformales y geometría no–conmutativa.

2.1. Ejemplos

Sea q un número complejo no nulo y cosideremos la $\mathbf{C}$–álgebra asociativa generada por $\{a, b, c, d\}$ con relaciones

$$\begin{array}{ll} ba = q^{-2}ab, & dc = q^{-2}cd, \\ ca = q^{-2}ac, & db = q^{-2}bd, \\ cb = bc, & da = ad - (q^2 - q^{-2})bc, \end{array}$$

que denotaremos $\mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)]$. Esta álgebra tiene estructura de co–álgebra determinada por el coproducto

$$\Delta : \mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)] \longrightarrow \mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)] \otimes \mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)]$$

definido por

$$\begin{array}{ll} \Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, & \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \\ \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, & \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d, \end{array}$$

y la counidad

$$\epsilon : \mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)] \longrightarrow \mathbf{C}$$

definida por

$$\epsilon(a) = 1, \quad \epsilon(b) = 0, \quad \epsilon(c) = 0, \quad \epsilon(d) = 1.$$

Pero aunque $\mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)]$ posea una estructura de co–álgebra, no es posible definir en ella una antípoda que permita obtener una estructura de álgebra de Hopf.

La siguiente proposición hace un recuento de algunas propiedades relevantes del álgebra $\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]$, que si bien no es un grupo cuántico, pues no posee antípoda, es el eslabón primordial para la construcción de los grupos cuánticos $\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(2)]$ y $\mathbf{C}_q[\mathbf{SL}(2)]$.

Proposición 1.

a. *El álgebra $\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]$ es un dominio Noetheriano, con base de Poincaré-Birkhoff-Witt dada por $\{a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3}d^{n_4} \mid n_i \in \mathbf{N}\}$.*

b. *Las relaciones para $\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]$ pueden ser descritas por la ecuación matricial $R_qX_1X_2 = X_2X_1R_q$, donde*

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad X_1 = X \otimes I, \qquad X_2 = I \otimes X,$$

y la R-matriz R_q está dada por

$$R_q = \begin{bmatrix} q^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 - q^{-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{bmatrix}.$$

c. *La R-matriz R_q satisface la ecuación de trenza*

$$R_{12}R_{23}R_{12} = R_{23}R_{12}R_{23}\,,$$

donde

$$R_{12} = R_q \otimes I, \qquad R_{23} = I \otimes R_q.$$

d. *$\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]$ es una biálgebra con la misma estructura de coálgebra de $\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]$.*

Proposición 2. *El determinante cuántico,definido como $det_q = ad - q^2bc$, es un elemento central tal que el centro del álgebra $\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]$ está generado por dicho elemento, es decir*

$$Z(\mathbf{C}_q[\mathbf{M}(2)]) = \mathbf{C}[det_q].$$

Además,

$$\Delta(det_q) = \Delta(det_q) \otimes \Delta(det_q).$$

Demostración. Se puede probar directamente, por ejemplo

$$\begin{aligned}
a\det_q &= a(ad - q^2bc)\\
&= a(ad) - q^2(ab)c\\
&= a(da + (q^2 - q^{-2})bc) - q^2(q^2ba)c\\
&= (ad)a + (q^2 - q^{-2})(ab)c - q^4b(ac)\\
&= (da + (q^2 - q^{-2})bc)a + (q^2 - q^{-2})(q^2ba)c - q^4b(q^2ca)\\
&= (da + (q^2 - q^{-2})bc)a + (q^4 - 1)b(ac) - q^6bca\\
&= (da + (q^2 - q^{-2})bc)a + (q^4 - 1)b(q^2ca) - q^6bca\\
&= da + (q^2 - q^{-2})bc + (q^6 - q^2)bc - q^6bc)a\\
&= (da + q^2bc)a\\
&= \det_q a,
\end{aligned}$$

y de manera similar para b, c y d. Para una prueba completa ver [8]. Usando el determinate cuántico definimos las bi-álgebras

$$\mathbf{C}_q\,[\mathbf{GL}(2)] = \mathbf{C}_q\,[\mathbf{M}(2)]\left[\left(\det_q\right)^{-1}\right]$$

y

$$\mathbf{C}_q\,[\mathbf{SL}(2)] = \frac{\mathbf{C_q}\,[\mathbf{M(2)}]}{\langle \mathbf{det_q} - \mathbf{1}\rangle}.$$

En ellas definimos el anti-homomorfismo S como

$$\begin{aligned}
S(a) &= \det{}^{-1}d, & S(b) &= \det{}^{-1}b,\\
S(c) &= \det{}^{-1}c, & S(d) &= \det{}^{-1}a,
\end{aligned}$$

y se prueba directamente que S satisface las condiciones para ser antípoda. Si usamos notación matricial, con $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y el símbolo $\hat{\otimes}$ para denotar la multiplicación de matrices en la cual el producto entre elementos es el producto tensorial, tenemos el siguiente teorema:

Proposición 3. *El álgebra* $\mathbf{C}_q\,[\mathbf{GL}(2)]$ *(respectivamente* $\mathbf{C}_q\,[\mathbf{SL}(2)]$*) es un álgebra de Hopf, con la estructura de coálgebra dada por*

$$\Delta(X) = X\hat{\otimes}X, \qquad \epsilon(X) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S(X) = (det_q)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} d & -q^{-2}b \\ -q^2c & a \end{bmatrix}.$$

Los grupos cuánticos $\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(2)]$ y $\mathbf{C}_q[\mathbf{SL}(2)]$ fueron dos de los primeros ejemplos hallados de este tipo de estructura, están estrechamente relacionados con el grupo cuántico $U_q(sl(2))$ y han sido ampliamente estudiados. Es importante anotar que toda la construcción puede repetirse en forma análoga si se considera en general $\mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ para cualquier número natural n (ver [9]).

3. El álgebra $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$

En esta sección usamos el método de Sudbery (ver [11]), para definir la bi-álgebra $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$, y a partir de esta álgebra (que no es un grupo cuántico pues carece de antípoda), definimos los grupos cuánticos multiparamétricos $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{SL}(n)]$ y $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]$. Aunque existen diferentes formas de construir dichos grupos cuánticos, este enfoque provee las pruebas de propiedades importantes del álgebra $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$, tales como la existencia de un operador de Yang–Baxter y la existencia de comódulos a derecha y a izquierda, asi como una descripción explícita de los determinantes cuánticos de menores.

3.1. Construcción

Sea $MA(n)$ el conjunto de las matrices complejas multiplicativamente antisimétricas. Para $\Im = (\Im_{ij}) \in MA(n)$ defina las siguientes $\mathbf{C}$–álgebras, generadas por el conjunto de variables $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$:

$V = \mathbf{C}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ el álgebra libre generada por $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

$\mathbf{\Lambda}_c = \mathbf{C}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ con relaciones

$$y_j y_i = -\Im_{ij}^{-2} q^2 y_i y_j \quad \text{si } 1 \leq i < j \leq n \text{ y } y_i^2 = 0 \text{ para todo } i.$$

$\mathbf{S}_c = \mathbf{C}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ con relaciones

$$y_j y_i = \Im_{ij}^2 q^{-2} y_i y_j \quad \text{si } 1 \leq i < j \leq n.$$

$\mathbf{\Lambda}_r = \mathbf{C}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ con relaciones

$$y_j y_i = -\Im_{ij}^2 q^2 y_i y_j \quad \text{si } 1 \leq i < j \leq n \text{ y } y_i^2 = 0 \text{ para todo } i.$$

$\mathbf{S}_r = \mathbf{C}[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ con relaciones

$$y_j y_i = \Im_{ij}^{-2} q^{-2} y_i y_j \quad \text{si } 1 \leq i < j \leq n.$$

Nota 1. *Si en la definición de $\mathbf{\Lambda}_c$ y $\mathbf{S}_c$ reemplazamos la matriz $\Im = (\Im_{ij})$ por la matrix $\Im^t = (\Im_{ij})^t = (\Im_{ij}^{-1})$, obtenemos exactamente $\mathbf{\Lambda}_r$ y $\mathbf{S}_r$, respectivamente.*

Recordemos la siguiente definición:

Definición 4. *Sea V un K–espacio vectorial de dimensión finita, $E = End_K V$, y sea $\delta_0 : V^* \to E^* \otimes V^*$ el dual del producto natural $E \otimes V \to V$. Decimos que A es un álgebra coordenada de V si A es el cociente del álgebra tensorial $T(V^*)$ por un ideal J. Decimos que el álgebra $\mathcal{M}$ es (la) biálgebra de elementos–matrices determinadas por las álgebras coordenadas $A_1, \ldots, A_r$ si $\mathcal{M}$ satisface las siguientes propiedades:*

i. *Existe un homomorfismo $\delta_i : A_i \to \mathcal{M} \otimes A_i$, para $1 \leq i \leq r$, tal que $\delta_i / V^* = \delta_0$.*

ii. *$\mathcal{M}$ es universal con respecto a esta propiedad.*

Teorema 5. *La biálgebra de elementos-matrices determinada por $\mathbf{\Lambda}_c$ y $\mathbf{S}_c$ y denotada $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$ es la $\mathbf{C}$–álgebra generada por las variables $\{x_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ sujetas a las relaciones*

$$x_{jk} x_{il} = \Im_{ij}^{-2} \Im_{lk}^{2} q^{-2} x_{il} x_{jk}, \qquad \text{si } k = l \text{ y } i < j,$$

$$x_{jk} x_{il} = \Im_{ij}^{-2} \Im_{lk}^{2} q^{-2} x_{il} x_{jk}, \qquad \text{si } k > l \text{ y } i = j,$$

$$x_{jk} x_{il} = \Im_{ij}^{-2} \Im_{lk}^{2} x_{il} x_{jk}, \qquad \text{si } k < l \text{ y } i < j,$$

$$x_{jk} x_{il} = \Im_{ij}^{-2} \Im_{lk}^{2} x_{il} x_{jk} - \Im_{ij}^{-2}(q^2 - q^{-2}) x_{ik} x_{jl}, \qquad \text{si } k > l \text{ y } i < j, \tag{1}$$

y cuya estructura de co–álgebra está determinada por

$$\Delta(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} \otimes x_{kj}, \qquad \epsilon(x_{ij}) = \delta_{ij}.$$

Demostración. Aplicamos la construcción en [11, Teorema 5] a nuestro caso. Definimos para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$q_{ij} = \begin{cases} \Im_{ij}^{2} q^{-2} & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ \Im_{ij}^{-2} q^{2} & \text{si } i > j, \end{cases} \quad \text{y} \quad q'_{ij} = \begin{cases} \Im_{ij}^{-2} q^{-2} & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j,, \\ \Im_{ij}^{2} q^{2} & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Obtenemos para $i < j$ y $k < l$,

$$x_{kj}x_{ki} = q_{ij}x_{ki}x_{kj}, \qquad x_{lj}x_{li} = q_{ij}x_{li}x_{lj}, \qquad \text{(condición fila)}$$

$$x_{li}x_{ki} = q^{-4}q_{kl}^{-1}x_{ki}x_{li}, \qquad x_{lj}x_{kj} = q^{-4}q_{kl}^{-1}x_{kj}x_{lj}, \qquad \text{(condición columna)}$$

$$x_{li}x_{kj} = q^{-4}q_{kl}^{-1}q_{ij}^{-1}x_{kj}x_{li}, \qquad (\nearrow \text{ condición})$$

$$x_{lj}x_{ki} = q_{kl}^{-1}q_{ij}x_{ki}x_{lj} + (1 - q^{4})q^{-4}q_{kl}^{-1}x_{kj}x_{li}, \qquad (\nwarrow \text{ condición}),$$

como

$$q^{-4}q_{kl}^{-1} = \Im_{kl}^{-2}q^{-2}, \quad q^{-4}q_{kl}^{-1}q_{ij}^{-1} = \Im_{kl}^{-2}\Im_{ji}^{-2}, \quad q_{kl}^{-1}q_{ij} = \Im_{kl}^{-2}\Im_{ij}^{2},$$

$$(1 - q^{4})q^{-4}q_{kl}^{-1} = -(q^{2} - q^{-2})\Im_{kl}^{-2}.$$

Reescribiendo estas relaciones en términos de q y $\Im$ y reordenando los índices obtenemos las relaciones para $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$.

Corolario 6. *Tenemos los siguientes homomorfismos de álgebras:*

$$\begin{array}{rccc} \delta_c : & \Lambda_c & \longrightarrow & \mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}] \otimes \Lambda_c \\ & y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \lambda_c : & \mathbf{S}_c & \longrightarrow & \mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}] \otimes \mathbf{S}_c \\ & y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j, \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \delta_r : & \mathbf{\Lambda}_r & \rightarrow & \mathbf{\Lambda}_r \otimes \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}}[\mathbf{M(n)}] \\ & y_j & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_{ij}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \lambda_r : & \mathbf{S}_r & \longrightarrow & \mathbf{S}_r \otimes \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}}[\mathbf{M(n)}] \\ & y_j & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes x_{ij}. \end{array}$$

Demostración. El hecho de que $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}}[\mathbf{M(n)}]$ es la biálgebra de matrices–elementos determinada por $\mathbf{\Lambda}_c$ y $\mathbf{S}_c$ implica que el homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rcl} V & \longrightarrow & E \otimes V \\ y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j \end{array}$$

se puede extender a $\mathbf{\Lambda}_c$ y a $\mathbf{S}_c$; por tanto, δ_c y λ_c son homomorfismos de álgebras bien definidos.

Para probar que δ_r y λ_r son en efecto homomorfismos de álgebra, basta notar que si repetimos la construcción en el teorema usando $\mathbf{\Lambda}_r$ y $\mathbf{S}_r$, obtenemos el álgebra $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}^T}[\mathbf{M(n)}]$ y homomorfismos de álgebra

$$\begin{array}{rlcl} \delta' : & \mathbf{\Lambda}_r & \longrightarrow & \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}^T}[\mathbf{M(n)}] \otimes \mathbf{\Lambda}_r \\ & y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j, \end{array}$$

$$\begin{array}{rlcl} \lambda' : & \mathbf{S}_r & \longrightarrow & \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}^T}[\mathbf{M(n)}] \otimes \mathbf{S}_r \\ & y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j. \end{array}$$

Pero

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}^T}[\mathbf{M(n)}] & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}}[\mathbf{M(n)}] \\ x_{ij} & \longmapsto & x_{ji}, \end{array}$$

por tanto definimos δ_r como

$$\begin{array}{rlclcl} \delta_r : & \mathbf{\Lambda}_r & \xrightarrow{\delta'} & \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}^T}[\mathbf{M(n)}] \otimes \mathbf{\Lambda}_r & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{\Lambda}_r \otimes \mathbf{C}_q^{\mathfrak{Z}}[\mathbf{M(n)}] \\ & y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} y_j \otimes x_{ji}. \end{array}$$

El mismo argumento es cierto para λ_r.

Comentario 1. *Por el teorema anterior* $\mathbf{\Lambda}_r$ *y* $\mathbf{S}_r$ *son comódulos a derecha. Es fácil probar que, en general, no son comódulos a izquierda. Similarmente,* $\mathbf{\Lambda}_c$ *y* $\mathbf{S}_c$ *son comódulos a izquierda pero no necesariamente a derecha. Esta situación contrasta con el caso en un parámetro, en el cual* $\mathbf{\Lambda}_r$ *y* $\mathbf{S}_r$ *son simultáneamente comódulos a derecha y a izquierda.*

3.2. Propiedades

Es interesante enunciar algunas propiedades importantes de $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M}(\mathbf{n})]$ para tener una idea de la estructura del álgebra que estamos estudiando. Todas han sido probadas en la literatura (ver por ejemplo [11, Teorema 3] ó [1]).

Proposición 7.

a. *Los monomios* $\{\mathbf{X}^K, K \in M_n(N)\}$ *forman una base de Poincaré–Birkhoff–Witt para* $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M}(\mathbf{n})]$.

b. $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M}(\mathbf{n})]$ *es un dominio entero Noetheriano.*

Proposición 8. *El operador de Yang–Baxter para* $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M}(\mathbf{n})]$ *está dado por*

$$R = \sum_{i}^{n} q^{-2} e_{ii} \otimes e_{ii} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{n} \Im_{ij}^{-2} e_{ji} \otimes e_{ij} + \sum_{i<j}^{n} (q^{-2} - q^2) e_{jj} \otimes e_{ii}.$$

3.3. Determinantes de menores cuánticos

En esta sección usamos el comódulo a izquierda $\mathbf{\Lambda}_c$ y el comódulo a derecha $\mathbf{\Lambda}_r$ para describir los determinantes de menores cuánticos en $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M}(\mathbf{n})]$. Estos juegan un papel fundamental en la definición de la antípoda en las álgebras de Hopf que queremos definir.

Sea $P(n,r)$ el conjunto de todos los posibles subconjuntos $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, con $i_1 < i_2 < \cdots < i_r, r \leq n$. Para $I, J \in P(n,r)$ sea $[I,J]$ el conjunto de todas las biyecciones $\sigma : I \to J$, y para $I \in P(n,r)$ sea $y_I = y_{i_1} \ldots y_{i_r}$ y $X_{I,\sigma I} = x_{i_1,\sigma i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_r,\sigma i_r}$, para $\sigma \in [I,J]$. Notaremos $N = \{1, 2, \cdots n\}$ y $\hat{i} = N - \{i\}$.

Definición 9. *Para $I, J \in P(n,r)$, el elemento $D_{I,J} \in \mathbf{C}_q^{\mathfrak{q}}[\mathbf{M(n)}]$ está definido por las condiciones*

$$\begin{array}{rccl} \delta_c : & \Lambda_c & \longrightarrow & \mathbf{C}_q^{\mathfrak{q}}[\mathbf{M(n)}] \otimes \Lambda_c \\ & y_I & \longmapsto & \sum\limits_{J \in P(n,r)} D_{I,J} \otimes y_J, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} \delta_r : & \Lambda_r & \longrightarrow & \Lambda_r \otimes \mathbf{C}_q^{\mathfrak{q}}[\mathbf{M(n)}] \\ & y_J & \longmapsto & \sum\limits_{I \in P(n,r)} y_J 3 \otimes D_{I,J}, \end{array}$$

y lo llamamos el determinante cuántico del menor (I, J).

Lema 10. *Para $I, J \in P(n,r)$, los elementos $D_{I,J}$ satisfacen las siguientes propiedades:*

a. $D_{I,J} = \sum\limits_{\sigma \in [I,J]} k_\sigma X_{I,\sigma I} = \sum\limits_{\sigma' \in [J,I]} k'_{\sigma'} X_{\sigma' J,J}$, donde $k_\sigma, k'_\sigma \in \mathbf{C}^*$.

b. $\Delta(D_{I,J}) = \sum\limits_{K \in P(n,r)} D_{I,K} \otimes D_{K,J}$.

c. $\epsilon(D_{I,J}) = \delta_{I,J}$, donde $\delta_{I,J} = \begin{cases} 1 & si\ I = J, \\ 0 & si I \neq J. \end{cases}$

Demostración. Igual que en [9].

3.4. Las álgebras $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{q}}[\mathbf{GL}(n)]$ y $\mathbf{C}_q^{\mathfrak{q}}[\mathbf{SL}(n)]$

En particular para $N = \{1, 2, \cdots n\}$, hay un solo elemento D, tal que

$$\delta_c(y_N) = D \otimes y_N, \qquad \text{y} \qquad \delta_r(y_N) = y_N \otimes D.$$

A este elemento D lo llamamos el determinante cuántico multiparamétrico y lo denotamos por $\det_q^{\mathfrak{q}}$.
Por cómputos directos obtenemos:

Proposición 11. *El determinante cuántico $D = \det_q^{\mathfrak{q}}$ satisface las siguientes propiedades:*

i. Explícitamente,

$$D = \det{}^{\Im}_{q} \sum_{\sigma \in S_n} (-q^2)^{l(\sigma)} |\Im_\sigma| x_{1,\sigma(1)} \cdot x_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot x_{n,\sigma(n)}, \qquad (2)$$

donde $I_\sigma = \{(i,j) \;/\; i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ es el conjuntode inversiones de σ, $l(\sigma) = \# I_\sigma$ y $|\Im_\sigma| = \prod_{(i,j) \in I_\sigma} \Im_{ij}^{-2}$.

ii. Es un elemento normal en $\mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{M(n)}]$. Más aún, si suponemos que $\Im$ satisface la condición $\prod_{i=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$ y $\prod_{j=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces es un elemento central.

iii. $\Delta(\det^{\Im}_q) = \det^{\Im}_q \otimes det^{\Im}_q$ y $\epsilon(\det^{\Im}_q) = 1$.

Demostración. Por cómputo directo se prueba *i.* y *iii.* Usando (1) obtenemos

$$x_{il} \cdot \det{}^{\Im}_{q} = \left(\prod_{j=1}^{n} \Im_{ij} \Im_{jl} \right)^2 \det{}^{\Im}_{q} \cdot x_{il}. \qquad (3)$$

Por tanto es un elemento normal que claramente es central si suponemos que $\Im$ satisface la condición $\prod_{i=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $\in 1 \leq j \leq n$ y $\prod_{j=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Dadas las propiedades de $\det^{\Im}_q$ existe la localización $\mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{M(n)}]\left[(\det^{\Im}_q)^{-1}\right]$ para cualquier matriz multiplicativamente antisimétrica $\Im$, y podemos definir

$$\mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{GL(n)}] = \mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{M(n)}]\left[(\det{}^{\Im}_q)^{-1}\right].$$

Además, si $\Im$ satisface $\prod_{i=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$ y $\prod_{j=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, definimos

$$\mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{SL(n)}] = \frac{\mathbf{C}^{\Im}_{\mathbf{q}}[\mathbf{M(n)}]}{\left\langle \det{}^{\Im}_{\mathbf{q}} - \mathbf{1} \right\rangle}.$$

Proposición 12. *Las álgebras $\mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{GL(n)}]$ y $\mathbf{C}^{\Im}_q[\mathbf{SL(n)}]$ son álgebras de Hopf, isomórficas como cóalgebras a $\mathbf{C}_q[\mathbf{GL(n)}]$ y $\mathbf{C}_q[\mathbf{SL(n)}]$, respectivamente.*

Demostración. Como $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]$ hereda la estructura de bi–álgebra a partir de $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$, para obtener una estructura de álgebra de Hopf basta definir la antípoda. Si definimos para $1 \leq i,j \leq n$,

$$S(x_{ij}) = D_{\hat{j}\hat{i}},$$

donde $D_{\hat{j}\hat{i}}$ es el determinante cuántico del menor j,i, se puede probar por cómputos directos y usando las propiedades descritas en el Lema 10, que en efecto $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]$ es un álgebra de Hopf naturalmente isomórfica como co–álgebra a $\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(n)]$. La misma construcción se tiene para $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{SL(n)}]$. Ver [1] para más detalles.

Nota 2. *Si bien* $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]$ *es isomórfica como co–álgebra a* $\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(n)]$, *en general no es isomórfica como álgebra (ver* [12]*).*

4. Representaciones 1–dimensionales

En esta sección clasificaremos las representaciones 1–dimensionales de las álgebra de $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{G}]$, para $\mathbf{G} = \mathbf{M(n)}, \mathbf{GL}(n)$ ó $\mathbf{SL}(n)$. Este es un resultado original y constituye la parte central del presente artículo, pues muestra, mediante un método simple, un resultado que permite clarificar un poco la estructura de estos grupos cuánticos. Supongamos que la matriz multiplicativamente antisimétrica $\Im \in MA(n)$ y q satisfacen la condición $\Im_{ij}q \neq 1$ para todo $1 \leq i,j \leq n$; decimos entonces que $\Im$ y q son independientes. La clasificación de las representaciones 1–dimensionales es particularmente importante, pues se puede probar que toda representación de dimensión finita es 1–dimensional, pero ese resultado está fuera del alcance de este artículo (ver [12]).

Proposición 13. *Si* $\Im$ *y* q *son independientes y* ψ *es una representación 1–dimensional no trivial de* $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$, *entonces existe una permutación* $\sigma \in S_n$ *tal que:*

a. *Si* $\psi(x_{ik}) \neq 0$ *entonces* $k = \sigma(i)$.

b. *Si* $\psi(x_{i,\sigma(i)}) \neq 0$ *y* $\psi(x_{j,\sigma(j)}) \neq 0$ *entonces*

   1. $i < j \Longrightarrow \sigma(i) < \sigma(j)$

y

2. $\Im_{ij} = \Im_{\sigma(i),\sigma(j)}$.

Demostración. Supongamos que ψ es una representación 1–dimensional no trivial de $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}]$ dada por

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}] & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & x_{ij} & \longmapsto & w_{ij}, \end{array}$$

donde $W = [w_{ij}]$ es la matriz que determina a ψ. Usando la co–acción δ_c definimos el homomorfismo de álgebras ψ_c en Λ_c como

$$\begin{array}{rccccc} \psi_c: & \Lambda_c & \xrightarrow{\delta_c} & \mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{M(n)}] \otimes \Lambda_c & \xrightarrow{id\otimes\psi} & \Lambda_c \\ & y_i & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \otimes y_j & \longmapsto & \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j. \end{array}$$

Para $1 \leq i \leq n$ tenemos que $y_i^2 = 0$; por tanto,

$$\begin{aligned} 0 = \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j\right)^2 &= \sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}}^{n} w_{ij} w_{ik} y_j y_k \\ &= \sum_{j<k}^{n} w_{ij} w_{ik} y_j y_k + \sum_{j>k}^{n} w_{ij} w_{ik} \underbrace{y_j y_k}_{\Im_{ij} q y_k y_j}, \end{aligned}$$

luego

$$0 = \sum_{j<k}^{n} w_{ij} w_{ik} (1 - \Im_{jk}^{-2} q^2) y_j y_k.$$

Pero supusimos que $\Im_{jk}^{-1} q \neq 1$, entonces $w_{ij} w_{ik} = 0$ si $j \neq k$. Esto significa que dos elementos en la misma fila de W no pueden ser simultáneamente diferentes de 0. Con el mismo argumento, pero usando δ_r, obtenemos que $w_{ij} w_{lj} = 0$ si $i \neq l$, es decir, dos elementos en la misma columna de W no pueden ser diferentes de 0 simultáneamente.

Por tanto tenemos una permutación $\sigma \in S_n$ tal que para todo i, k, si $k \neq \sigma(i)$ entonces $w_{ik} = 0$. Además la expresión del homomorfismo ψ_c se convierte en

$$\begin{array}{rccc} \psi_c: & \Lambda_c & \rightarrow & \Lambda_c \\ & y_i & \longmapsto & w_{i,\sigma(i)} y_{\sigma(i)}. \end{array}$$

Si $i < j$, $w_{i,\sigma(i)} \neq 0$ y $w_{j,\sigma(j)} \neq 0$, entonces, como en $\mathbf{\Lambda}_c$ tenemos la relación

$$y_j y_i = -\Im_{ij}^{-2} q^2 y_i y_j,$$

se deduce que

$$\psi_c(y_j y_i) = -\Im_{ij}^{-2} q^2 \psi_c(y_i y_j)$$

si y sólo si

$$w_{j,\sigma(j)} w_{i,\sigma(i)} y_{\sigma(j)} y_{\sigma(i)} = -\Im_{ij}^{-2} q^2 w_{i,\sigma(i)} w_{j,\sigma(j)} y_{\sigma(i)} y_{\sigma(j)}.$$

Luego en $\mathbf{\Lambda}_c$ obtenemos

$$y_{\sigma(j)} y_{\sigma(i)} = -\Im_{ij}^{-2} q^2 y_{\sigma(i)} y_{\sigma(j)},$$

por tanto

$$\sigma(i) < \sigma(j) \text{ y } \Im_{ij} = \Im_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

Para $\mathbf{G} = \mathbf{GL}(n)$ ó $\mathbf{SL}(n)$ sean $R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{G}]\right)$ y $R(\mathbf{C}_q[\mathbf{G}])$ los conjuntos de representaciones 1–dimensionales de $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{G}]$ y $\mathbf{C}_q[\mathbf{G}]$, respectivamente, considerados con su usual estructura de grupo.

Teorema 14. *Si $\Im$ y q son independientes, entonces*

i. Para toda $\Im \in MA(n)$ se tiene el isomorfismo de grupos

$$R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]\right) \cong (\mathbf{C}^*)^n \cong R(\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(n)]).$$

ii. Para toda $\Im \in MA(n)$ tal que $\prod_{i=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$, y $\prod_{j=1}^{n} \Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$, se tiene el isomorfismo de grupos

$$R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{SL}(n)]\right) \cong (\mathbf{C}^*)^{n-1} \cong R(\mathbf{C}_q[\mathbf{SL}(n)]).$$

Demostración. Supongamos $\Im \in MA(n)$ y q son independientes.

i. Si $\psi \in R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{G}]\right)$ entonces ψ satisface las condiciones de la proposición anterior, es decir, existe una permutación $\gamma \in S_n$ tal que si

$k \neq \gamma(i)$ entonces $\psi(x_{ik}) = 0$; por tanto al aplicar ψ al determinante cuántico tenemos

$$\begin{aligned}
0 &\neq \psi\left(\det_q^{\Im}\right) \\
&= \psi\left(\sum_{\sigma\in S_n}(-q^2)^{l(\sigma)}|\Im_\sigma|x_{1,\sigma(1)}\cdot x_{2,\sigma(2)}\cdot\ldots\cdot x_{n,\sigma(n)}\right) \\
&= \sum_{\sigma\in S_n}(-q^2)^{l(\sigma)}|\Im_\sigma|\psi(x_{1,\sigma(1)})\cdot\psi(x_{2,\sigma(2)})\cdot\ldots\cdot\psi(x_{n,\sigma(n)}) \qquad (4) \\
&= (-q^2)^{l(\gamma)}|\Im_\gamma|\psi(x_{1,\gamma(1)})\cdot\psi(x_{2,\gamma(2)})\cdot\ldots\cdot\psi(x_{n,\gamma(n)}),
\end{aligned}$$

donde $I_\gamma = \{(i,j)\ /\ i < j, \gamma(i) > \gamma(j)\}$, el conjuntode inversiones de γ, $l(\gamma) = \#I_\gamma$ y $|\Im_\gamma| = \prod\limits_{(i,j)\in I_\gamma}\Im_{ij}^{-2}$. Si $(i,j)\in I_\gamma$, la propiedad b. de la proposición anterior implica que $\psi(x_{i,\gamma(i)} = 0$ ó $\psi(x_{j,\gamma(j)} = 0$, pero (4) implica que $\psi(x_{k,\gamma(k)} \neq 0$ para todo $1 \leq k \leq n$, por tanto $I_\gamma = \{\}$, es decir, γ es la identidad, y en consecuencia

$$\psi\left(\det_q^{\Im}\right) = \psi(x_{11})\cdot\psi(x_{22})\cdot\ldots\cdot\psi(x_{nn}) \neq 0$$

y $\psi(x_{ij}) = 0$ para $i \neq j$. Concluimos entonces que cada $\psi \in R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]\right)$ determina de forma unívoca un elemento de $(\mathbf{C}^*)^n$. Recíprocamente, por cada elemento de $(\mathbf{C}^*)^n$ se puede definir de forma natural una función $\psi \in R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{GL}(n)]\right)$. Note que estos resultados no dependen de la matriz $\Im$, por tanto cuando $\Im$ es la identidad, se tiene el caso clásico en un parámetro para $R(\mathbf{C}_q[\mathbf{GL}(n)])$.

ii. Supongamos ahora que $\Im \in MA(n)$ satisface $\prod\limits_{i=1}^{n}\Im_{ij} = 1$ para todo $\in 1 \leq j \leq n$, y $\prod\limits_{j=1}^{n}\Im_{ij} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$; entonces existe el grupo cuántico $\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{SL}(n)]$. Un argumento similar al de i. nos permite concluir que

$$\psi\left(\det_q^{\Im}\right) = \psi(x_{11})\cdot\psi(x_{22})\cdot\ldots\cdot\psi(x_{nn}) = 1$$

y $\psi(xij) = 0$ para $i \neq j$. Por tanto $R\left(\mathbf{C}_q^{\Im}[\mathbf{SL}(n)]\right) \cong (\mathbf{C}^*)^{n-1}$.

Recordemos que el toro máximo H para $\mathbf{G} = \mathbf{GL(n)}$ es $H \cong (\mathbf{C}^*)^n$, y para $\mathbf{G} = \mathbf{SL(n)}$ es $H \cong (\mathbf{C}^*)^{n-1}$. Hemos probado que para $\mathbf{G} = \mathbf{GL(n)}$ ó $\mathbf{SL(n)}$

$$R\left(\mathbf{C}_q^{\mathfrak{Q}}[\mathbf{G}]\right) \cong H \cong R(\mathbf{C}_q[\mathbf{G}]),$$

y este resultado es válido en general para cualquier grupo de Lie G conexo, simplemente conexo y semi-simple (ver [12] ó [4] para el caso en un solo parámetro). Esta prueba es diferente a la general, y es más simple, pues explota la potencia de las co-acciones δ_c y δ_r.

Referencias

[1] ARTIN M., SCHELTER W., TATE J. *Quantum deformation of GL_n*, *Comm. Pure Appl. Math.* **44** (1991), 879-895.

[2] DRINFEL'D V. *Quantum groups* , in Proc. ICM 86, Vol1, 798-820.

[3] HODGES T.J., LEVASSEUR T. *Primitive ideals of* $C_q[\mathbf{SL(3)}]$, *Comm. Math. Phys,* to appear.

[4] HODGES T.J. LEVASSEUR T. *Primitive ideals of* $C_q[\mathrm{G}]$, Preprint (1993)

[5] KASSEL C. *Groupes Cuantiques,* Plub. Math. IRMA, Strasburg, 1992.

[6] LUSZTIG G. *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras. Adv. Math.* **70** (1988), 237–249.

[7] MAJID S. *Quasitriangular Hopf Algebras and Yang-Baxter equations,* Internat. J. Modern Phys. A, Vol 5, No1 (1990), 1-91.

[8] MANIN Y. *Quantum groups and non-commutative geometry,* CRM Univ. de Montreal, 1988.

[9] PARSHALL B., WANG J.P. *Quantum linear groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **439**, 1991.

[10] SMITH S.P. *Quantum Groups. An introduction and survey for ring theorists*, en Noncommutative rings, editado por S. Montgomery and L. Small, Springer–Verlag, 131–178.

[11] SUDBERY A. *Quantum groups as invariance groups*, Preprint (1991).

[12] TORO M. Primitive Ideals of Twisted Algebras of Functions, Tesis doctoral, University of Cincinnati, 1993.

Postgrado de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín.