Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 167–181, junio–diciembre 1994

Avances Recientes en Algebra Conmutativa, Teoría de las Clausuras Justas (*tight closure*)*

JUAN D. VELEZ†

Resumen

En [5] Hochster y Huneke introdujeron la noción de clausura justa para anillos Noetherianos de característica prima, y para álgebras finitamante generadas sobre un campo de caracrterística cero. La teoría generada a raíz de esta noción ha producido nuevas pruebas de algunos teoremas clásicos del álgebra conmutativa y de la teoría de anillos de invariantes, así como de algunas de las conjeturas homológicas.

El objetivo de este artículo es mostrar a grandes rasgos los aspectos esenciales de esta teoría y sus aplicaciones más importantes. Se mostrarán algunos avances recientes y se discutirán algunos de los problemas centrales de la teoría que aún permanecen abiertos.

1. Introducción

Las ideas germinales de la teoría de las clausuras justas ya estaban contenidas de manera implícita en los trabajos de Hochster [6, 7], a principios de los años 70. Sólo recientemente estas ideas fueron aisladas y

*Patrocinado parcialmente por COLCIENCIAS bajo el programa "Repatriación".
†Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

estudiadas sistemáticamente por Hochster y Huneke [5], en su teoría de las clausuras justas. Esta teoría apareció a mediados decenio de los 80, y desde entonces ha despertado gran interés en la comunidad de algebristas y geómetras conmutativos a nivel mundial. El interés reside en parte en que esta teoría ha permitido unificar y tratar de manera sistemática una serie de problemas cuya solución dependía de trucos y métodos ad hoc. Además, usando esta teoría se ha logrado, por una parte dar pruebas relativamente simples para teoremas de los cuales sólo se conocían demostraciones muy largas y muy complejas, y, por otra parte, formular y demostrar algunos teoremas clásicos tales como el teorema de Briançon-Skoda sobre clausuras integrales de ideales, en una forma mucho más fuerte.

2. Notación y Terminología

A lo largo de este artículo se supondrá que todos los anillos son conmutativos, con identidad, y Noetherianos. Se hará énfasis en anillos de característica prima, pero se tratará de mantener máxima generalidad en cuanto sea posible. Se denotará por p a un número entero primo, y por q, q_0, q',etc., a enteros de la forma p^e, donde e denota un entero positivo. Si R es un anillo conmutativo, entonces R^0 denotará el complemento de la unión de los ideales primos minimales de R.

Dado un anillo conmutativo R de característica p, existe un endomorfismo de R que envía $r \in R$ en r^p (denominado endomorfismo de Frobenius), y que denotaremos por F. La iteración de F, n veces, se denotará por F^e.

Cuando R es un anillo reducido (sin elementos nilpotentes), es posible crear un anillo, que denotaremos por $R^{1/q}$, y que contiene para cada elemento de R una única raíz $q-$ésima: como R es reducido, se sigue que F^e es inyectivo. Si se toma una copia de R (dentro de R) definida por $F^e(R) \subset R$, se ve inmediatamente que para cada $a \in F^e(R), a = r^e$ tiene como raíz $q-$ésima el elemento $r \in R$.

Recordemos ahora algunas nociones básicas de la teoría de anillos Noetherianos.

3. Conceptos básicos

Por un *anillo local* (R, m, k) (o (R, m)) se entenderá un anillo Noetheriano con un único ideal maximal m, y campo residual $k = R/m$.

La *dimensión de Krull* de un anillo R, que se denotará por dim R, se define como el

$$\sup\{n : P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n,\ P_i \text{ ideal primo en } R\}.$$

Un anillo R se denomina *equidimensional* si dim $R = \dim(R/P)$, para cada ideal primo minimal $P \subset R$.

Sea (R, m, k) un anillo local de dimensión d. Una sucesión de elementos de R, $x_1, \ldots, x_n$, se denomina *un sistema de parámetros*, si el ideal $(x_1, \ldots, x_n)R$ es $m-$ primario, es decir, si $\dim R/(x_1, \ldots, x_n)R = 0$.

Sea M un módulo sobre un anillo Noetheriano R. Una sucesión de elementos de R, $x_1, \ldots, x_k$, se denomina una*sucesión regular* en M, si $(x_1, \ldots, x_k)M \neq M$, y para cada $i = 1, \ldots, n$ el elemento x_i no es un divisor de cero en M/I, donde I denota el ideal $I = (x_1, \ldots, x_{i-1})$. Una sucesión regular se puede entender intuitivamente como una sucesión de elementos en R con propiedades ánalogas a las de la sucesión de indeterminadas $X_1, \ldots, X_n$ en el anillo de polinomios $k[X_1, .., X_n]$. Sea R un anillo local y consideremos a R como un módulo sobre sí mismo. Resulta extremadamente útil poder determinar cúando una sucesión de parámetros de R es una sucesión regular en R. Los anillos locales para los cuales esto es cierto se denominan *anillos de Cohen-Macaulay (C-M)*. Cuando R no es necesariamante local, R se considera un anillo C–M, si para cada una de sus localizaciones R_P, P un ideal primo, R_P es (C–M).

Si un anillo local (R, m), además de ser un anillo C–M, posee la propiedad de tener tipo 1, lo cual significa que para cada sistema de parámetros $x_1, \ldots, x_n$ el anulador de m en $R/(x_1, \ldots, x_n)$ tiene dimensión igual a 1, visto como espacio vectorial sobre k, se denomina un anillo de *Gorenstein*. En el caso global, R es de Gorenstein si para cada ideal primo P, R_P es Gorenstein.

Un anillo local (R, m) se denomina *regular*, si su dimensión de Krull es igual al número mínimo de generadores de m.

Un anillo R se denomina *regular*, si para cada ideal primo P, R_P es regular.

3.1. Cohomología local

Para las definiciones y pruebas de esta sección el lector puede consultar a [3].

Definición 1. *Sea I un ideal de un anillo R y M un $R-$módulo. Sea*

$$H_I^0(M) = \{x \in M : x \text{ es anulado por una potencia de } I\}\,.$$

Se puede demostrar que $H_I^0(\ )$ es un functor a izquierda covariante. Sea $H_I^i(\ )$ su i-ésimo functor derivado a derecha. Entonces, el $i-$ésimo grupo de cohomología de M con soporte en el ideal I se define como $H_I^i(M)$.

Se puede demostrar que $H_I^i(M)$ tiene una estructura natural de R–módulo, en donde cada elemento de $H_I^i(M)$ es anulado por una potencia de I.

Si (R,m) es una anillo local, se tiene que $H_I^i(M) \neq 0$ si $i = \dim(R)$, y es igual al módulo cero cuando $i > \dim(R)$.

Uno de los teoremas fundamentales en la teoría de cohomología local es el llamado teorema de dualidad local de Grothendieck. Para su formulación se requieren los siguientes conceptos.

Sea R un anillo y M un $R-$módulo. Una extensión $M \subset N$ se denomina esencial si todo submódulo no trivial de N tiene intersección no trivial con M. Una extensión esencial maximal de M se denomina la *cubierta inyectiva* (injective hull) de M, y se denota por $E_R(M)$. Se puede probar que este módulo existe, es inyectivo y es único salvo isomorfismos.

Cuando R es un anillo local, el functor $^\vee = Hom_R(-, E_R(R))$ resulta ser contravariante y exacto, y el módulo $M^\vee = Hom_R(M, E_R(R))$ se denomina el *dual de Matlis*.

Sea (R, m, k) un anillo local, C–M y de dimensión $= n$. Un módulo se denomina *módulo canónico* para R si su dual de Matlis es isomorfo a $H_I^n(M)$. Cuando R es una anillo de Gorenstein, se puede probar que R es un módulo canónico para R.

Se puede probar que el módulo canonico es único. Además, si Ω es el módulo canónico de R, entonces para cada ideal primo P de R se tiene que Ω_P es el módulo canónico de R_P.

El teorema de dualidad local es el siguiente:

Teorema 2 (Dualidad local). *Sea (R, m, k) un anillo local, C–M, de dimensión d y M un $R-$módulo finitamente generado. Sea E la cubierta inyectiva de k sobre R, y sea Ω un módulo canónico sobre R. Entonces, dado un isomorfismo $\Omega^{\vee} \simeq H^d_I(R)$, existe un isomorfismo functorial en M*

$$H^i_I(M) \simeq Ext^{d-i}_R(M, \Omega_R)^{\vee}.$$

4. Teoría de las clausuras justas (*tight closure*)

4.1. Motivación

Para ilustrar las ideas generales de la teoría se empezará analizando un método para atacar una de las conjeturas centrales en esta área conocida como *conjetura monomial* [7]. Sea (R, m) un anillo local y sea $x_1, \ldots, x_n$ un sistema de parámetros para R. Dado un entero $t \geq 1$, esta conjetura afirma que no pueden existir elementos $r_1, \ldots, r_n$ en R que satisfagan la ecuación

$$(x_1 \cdots x_n)^t = x_1^{t+1} r_1 + \cdots + x_n^{t+1} r_n. \tag{1}$$

Esta conjetura es equivalente a otra conjetura conocida como la *conjetura del sumando directo* [7], la cual afirma que un anillo regular es siempre un sumando directo de todas sus extensiones módulo-finitas, es decir, si $R \subset S$ es una extensión de anillos, donde S es finitamente generado como módulo sobre R, y R es regular, entonces R debe ser un sumando directo de S, donde la inclusión se considera una inclusión de $R-$módulos. En otras palabras, debe existir una *función de retracción* (splitting map) $\alpha : S \to R$, la cual es un $R-$homomorfismo, y tal que $\alpha \circ i = Id_R$, donde i denota la inclusión de R en S, y Id_R es el homomorfismo identidad en R.

La validez de estas conjeturas es conocida en el caso en el que el anillo R contiene una campo, así como en el caso en el que R es un anillo de característica mixta en dimensión ≤ 2. Esta conjetura permanece abierta para anillos en característica mixta de dimensión mayor que 2. Se ha demostrado que estas dos conjeturas son equivalentes a un refinamiento de la llamada *nueva conjetura de la intersección* [7, 4]. En inglés esta última conjetura se conoce como *the improved new intersection conjecture*.

Demostremos ahora que la ecuación (1) no tiene solución en R en el caso en el que los elementos $x_1, \ldots, x_n$ forman una sucesión regular en (R, m). La prueba puede hacerse por inducción sobre n. Es fácil ver que la afirmación es cierta para $n = 1$. Supongamos entonces que $n > 1$. En primer lugar, es posible demostrar que si los elementos $x_1, \ldots, x_n$ forman una sucesión regular, entonces cualquier permutación de las potencias t -ésimas de $x_1, \ldots, x_n$ también forma una sucesión regular en R. En particular, tomando $t = 1$ se deduce que las imágenes de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ en R/x_n forman una sucesión regular en R/x_n. Ahora, supóngase que en R se da que $(x_1 \cdots x_n)^t = x_1^{t+1} r_1 + \cdots + x_n^{t+1} r_n$ para un cierto entero t y ciertos elementos $r_1, \ldots, r_n$. Esta ecuación se puede reescribir como

$$[(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^t - x_n r_n] x_n^t = x_1^{t+1} r_1 + \cdots + x_{n-1}^{t+1} r_{n-1}.$$

Como x_n^t no es un divisor de cero en $R/(x_1^{t+1}, \ldots, x_{n-1}^{t+1})$, deberán existir elementos $r'_1, \ldots, r'_{n-1}$ en R tales que

$$(x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^t - x_n r_n = r'_1 x_1^{t+1} + \cdots + r'_{n-1} x_{n-1}^{t+1}.$$

Pero esto nos muestra que módulo x_n las imágenes de los elementos $r'_1, \ldots, r'_{n-1}$ en R/x_n nos darían una solución a la ecuación (1), en $n-1$ variables, para el sistema de parámetros formado por las imágenes de los elementos $x_1, \ldots, x_{n-1}$, en el anillo R/x_n, lo cual contradice la hipótesis inductiva.

Ahora, veamos cómo se podría atacar el problema general en el caso en el que $x_1, \ldots, x_n$ no formen necesariamente una sucesión regular. El primer paso consiste en reducir el problema al caso de característica prima.

En [6, 7] se introdujo una técnica general que permite atacar problemas de "tipo ecuacional" en anillos locales que contengan un campo. A grandes rasgos la técnica es la siguiente: supongamos que queremos probar que una cierta ecuación $E = 0$ no tiene solución en ningún anillo local R. Se comienza por demostrar que esto es cierto para el caso en el que R es un anillo de característica prima. Cuando R es un anillo local de característica cero, se puede demostrar que de existir una solución a la ecuación en R se podría también encontrar una solución para una cierta álgebra local R_0 finitamente generada sobre un campo de característica prima [7]. La existencia de R_0 está garantizada por el famoso teorema de aproximación de M. Artin. Una de las ventajas de trabajar en característica prima reside en el hecho de poder manipular ecuaciones con más facilidad, esto debido a que en este caso es válida la fórmula $(a+b)^p = a^p + b^p$.

El segundo paso consiste en pasar al caso en el que R es una anillo completo bajo la topología m−ádica: en general, de existir una solución de la ecuación (1) en R, también existiría una solución de esta ecuación en cualquier imagen homomorfa (S,n) de R, siempre y cuando las imágenes de los x_i formen una sucesión de parámetros en (S,n). En particular, esto es cierto para el caso en el que S es la completación m−ádica de R. Luego, podemos suponer sin pérdida de generalidad que R es un anillo local completo. Por el teorema de estructura de Cohen, es posible escoger un subanillo de R, $A = k[[x_1,\ldots,x_n]]$, donde k es un anillo de coeficientes para R, de tal manera que R, visto como A−módulo, es finitamente generado. No es difícil ver que en este caso existe una función A−lineal $f : R \to A$ la cual envía el elemento identidad en R en un cierto elemento $c \neq 0$ de A.

Ahora, supongamos que la ecuación (1) tiene una solución en R. Si elevamos ambos lados de la ecuación (1) a la potencia $q = p^e, e \geq 1$, se obtiene

$$(x_1 \cdots x_n)^{qt} = \sum x_i^{q(t+1)} r_i^q.$$

Aplicando f a ambos lados de esta ecuación obtenemos

$$cu^q = \sum a_i x_i^{(t+1)^q},$$

donde u denota el elemento $(x_1 \cdots x_n)^t$, y $a_i = f(r_i^q)$. Denotemos por I el ideal de A generado por $x_1^{t+1},\ldots,x_n^{t+1}$, y por $I^{[q]}$ el ideal generado por las potencias q−ésimas de estos elementos. Se ve entonces que

$$cu^q \in I^{[q]},$$

para todo $q = p^e$.

Es fácil ver que el conjunto de todos los elementos de R que satisfacen esta condición es también un ideal de R. A este ideal, que denotaremos por I^*, se le llama la *clausura justa* de I en A (*tight closure of* I). Ahora, es posible demostrar que en $A = k[[x_1,\ldots,x_n]]$ todos los ideales son cerrados bajo esta operación, es decir, para cualquier $I \subset R$ se tiene que $I^* = I$. En general, si R es un anillo regular, entonces R va a tener esta propiedad (ver próxima sección). De aquí se concluye entonces que $u \in I$. Existen entonces elementos a_i en A tales que

$$(x_1 \cdots x_n)^t = \sum a_i x_i^{(t+1)}.$$

Esto estaría diciendo que en A la ecuación (1) tedría una solución para el sistema de parámetros $x_1, \ldots, x_n$. Pero en el anillo A la sucesión $x_1, \ldots, x_n$ es regular, y en este caso ya sabemos que (1) no tiene solución. Esta contradicción concluye la prueba de la conjetura monomial para todos los anillos locales que contengan un campo.

4.2. Resultados fundamentales de la teoría de las clausuras justas.

En lo que sigue R denotará un anillo Noetheriano de característica prima p.

Definición 3. *Sea $R^0 = R - \cup\{P : P$ es un primo minimal de $R\}$. Sea I un ideal de R. Decimos que $x \in R$ está en la clausura justa de I si existe un $c \in R^0$ tal que para todo e suficientemente grande se tiene que $cx^q \in I^{[q]}$, donde $q = p^e$ e $I^{[q]} = (i^q : i \in I)$. La clausura justa de I la denotaremos por I^*.*

Cuando R es una álgebra finitamente generada sobre un campo k de característica cero, también se puede dar una definición de clausura justa para ideales de I. Esta definición, sin embargo, es mucho más compleja y depende del hecho de poder aproximar a R con álgebras planas, y de poder reducir estas álgebras módulo p para infinitos números primos (ver [5]).

La clausura justa de $I \subset R$ se puede pensar heurísticamente como aquellos elementos de R que pertenecen a la expansión de I en $R^\infty = \cup_q R^{1/q}$, para infinitas potencias q. Si $cu^q \in I^{[q]}$ para $q >> 0$, entonces, tomando raíces $q-$ésimas se obtiene $c^{1/q}u \in IR^{1/q}$. Podemos ahora pensar que cuando $q \to \infty$ se tiene que $c^{1/q} \to 1$, y por lo tanto $u \in IR^\infty$.

La operación $*$ tiene realmente las propiedades de una operación de clausura.

Proposición 4.

1. *I^* es un ideal que contiene a I.*
2. *Si $I \subset J$ entonces $I^* \subset J^*$.*
3. *$I^* = I^{**}$.*

(Ver [5] para una demostración de esta proposición).
Como mencionamos más arriba, la siguiente proposición juega un papel fundamental en la teoría.

Proposición 5. *Sea R un anillo regular de característica prima p. Entonces $I^* = I$, para todos los ideales I de R.*

Demostración. Si $cu^q \in I^{[q]}R$ para $q >> 0$, entonces al pasar a la localización R_m, m un ideal maximal de R, se obtiene $\frac{c}{1}\frac{u^q}{1} \in I^{[q]}R_m$, de donde vemos que

$$c \in (I^{[q]} : u^q) = \{x \in R : xu^q \in I^{[q]}\}.$$

Como el homomorfismo de Frobenius es plano [4], se tiene

$$(I^{[q]} : u^q) = (I : u)^q.$$

De aquí se ve que c está contenido en infinitas potencias del ideal maximal m; por lo tanto tiene que ser igual al elemento cero. Esta contradicción demuestra la proposición .□

Otro tipo de operaciones de clausura, como por ejemplo la clausura integral, aún en anillos regulares, pueden generar clausuras que contienen estrictamente a I. Esto en parte explica la terminología ***clausura justa.***

Como se vio en el numeral anterior, la prueba de la conjetura monomial dependió del hecho de que en el anillo de series formales todos los ideales ***generados por sucesións de parámetros*** en R fueran cerrados bajo la operación $*$. Los anillos Noetherianos de característica prima para los cuales esto es verdad se denominan anillos ***F-racionales.*** Aquí, por***parámetros*** entendemos una sucesión de elementos de R con la propiedad de formar parte de un sistema de parámetros en cualquier localización R_P, para todo primo P de R. Esta terminología fue introducida en [2]; la motivación es que estos anillos tienen propiedades similares a las de las algebras afines definidas sobre un campo de característica cero, asociadas a una variedad con singularidades racionales.

Una condición más fuerte es que todos los ideales de R sean cerrados bajo la clusura justa. Esta noción se denomina ***F–regularidad débil.*** El adjetivo débil se usa aquí debido al hecho de que aún se desconoce si esta propiedad pasa a todas las localizaciones de R. Este problema es uno de los problemas centrales de la teoría que aún permanecen abiertos. En el caso en el que la regularidad pase a todas las localizaciones, el anillo R se denomina *F–regular*. Esta noción no coincide con la F–racionalidad. Hay ejemplos de anillos con dimensión de Krull igual a dos que son F–racionales, pero no F–regulares.

El problema de la localización ha sido completamente resuelto para anillos F–racionales, y para otra clase de anillos denominados *fuertemente regulares*. Esta noción está sólo definida para anillos *F–finitos*, lo cual significa que $R^{1/p} \supset R$ es una extensión módulo-finita. Un anillo R se denomina *fuertemente regular*, si dado $c \in R_0$ existe un cierto q que hace que la inclusión R–lineal $\iota : R \rightarrow R^{1/q}$, que envía a 1 en $c^{1/q}$, se parta o descomponga como función de R–módulos, es decir, que exista una *funcion de retracción* R–lineal $f : R^{1/q} \rightarrow R$ (lo cual significa que $f \circ \iota = \text{Identidad}_R$) que envíe a $c^{1/q}$ en 1.

Estas categorías de anillos están relacionadas de la siguiente manera:

Teorema 6.

1. *Fuertemente regular $\Rightarrow$ F–regular $\Rightarrow$ débilmente F–regular $\Rightarrow$ F–racional.*

2. *Estas nociones coinciden para anillos de Gorenstein.*

3. *Todos los anillos F–racionales son anillos normales.*

Demostración. Ver [5].

Bajo condiciones bastante débiles se da que la condición de ser F–racional implica la condición de C–M. Más précisamente:

Teorema 7. *Un anillo F-racional que sea una imagen homomorfa de un anillo de C–M, es un anillo de C–M.*

Este teorema se deduce del lema y la proposición siguiente:

Lema 8. *Sea $R = S/I$ un anillo equidimensional, y S un anillo local, C–M. Sean $\{Q_1, \dots Q_n\}$ primos minimales sobre I. Supóngase que $x_1, \dots, x_d$ son parámetros en R. Entonces, existen elementos $z_1, \dots, z_h$ en I, y elementos $y_1, \dots, y_d$, tales que la imagen de y_i en R es igual a x_i, y $\{y_1, \dots, y_d, z_1, \dots, z_h\}$ es una sucesión regular en S. Además, existe un $c \notin \cup_1 Q_i$, y un entero k tal que*

$$cI^k \subseteq (z_1, \dots, z_h).$$

Demostración. Véase [6].

Proposición 9. *Sea $R = S/I$ un anillo equidimensional, donde S es un anillo de C–M. Sean $x_1, \dots, x_n$ parámetros de R (esto último , recordemos, significa que esta sucesión es parte de un sistema de parámetros en cada localización R_P) sea $J = (x_1, \dots, x_n)R$, y $J : x_n$ el ideal de colon de J y x_n, esto es, el conjunto de todos los elementos de R que multiplican a x_n en J. Se tiene entonces que $J : x_n \subset J^*$.*

Esta propiedad última se conoce con el nombre de ***captura de cólones por la clausura justa***. Cuando la sucesión $x_1, \dots, x_n$ es regular esta propiedad siempre se da; esto se deduce de la definición de regularidad. Cuando $x_1, \dots, x_n$ no es regular, la clausura justa recoge precisamente la obstrucción cohomológica de la propiedad de ser C–M.

Para probar la proposición, podemos primero reducir al caso en el que S es un anillo local. Sea $a' \in J : x_n$. Sean c, z_i, y_i y k elementos como en el lema anterior. Sea a una preimagen de a' en S. Como $a'x_n \in J, ay_n \in (y_1, \dots, y_{n-1}) + I$. Entonces, para todo $q = p^e$ se obtiene

$$a^q y_n^q \in (y_1, \dots, y_{n-1})^{[q]} + I^{[q]}.$$

Multiplicando por c y usando el lema anterior se obtiene

$$ca^q y_n^q \in (y_1^q, \dots, y_{n-1}^q, z_1, \dots, z_h).$$

Como los y_i, z_i forman una sucesión regular en S, y este anillo es C–M se debe tener que $ca^q \in (y_1^q, \ldots, y_{n-1}^q, z_1, \ldots, z_h)$. Módulo I esto nos da $ca^q \in J^{[q]}$, es decir, $a' \in J^*$.

Demostracion del Teorema 7

Podemos sin pérdida de generalidad suponer que R es local. R es un dominio normal, ya que R es F–racional, y por lo tanto equidimensional. Sea $x_1, \ldots, x_n$ un sistema de parámetros para R, y sea $J = (x_1, \ldots, x_{i-1})$. Basta probar que $J_i : x_i = J_i$. Pero esto último se desprende de la proposición anterior.□

De aquípodemos deducir el siguiente teorema.

Teorema 10. *Si $R \subset S$ es un sumando directo de S, visto como R–módulo, donde S es un anillo regular, entonces R es un anillo C-M.*

Demostración. Por ser R un sumando directo de S, se tiene $IS \cap R = I$, para todo ideal I de R ([Hol]). Como S es regular, se tiene $I^*S \subset (IS)^* = IS$, luego $I^* = I^*S \cap R \subset IS \cap R = I$. De donde podemos ver que I es cerrado. Esto prueba que R es un anillo F–regular, y por lo tanto C–M.

Es fácil ver que el anillo de invariantes de un anillo regular S, bajo la acción de un grupo linealmente reductivo, es un sumando directo de S. De aquí se deduce que es F–regular y por lo tanto C–M.

4.3. Anillos F–racionales y cohomología local

Definición 11. *Sea d un elemento de R^0 y q un entero de la forma p^e. Denotaremos por*

$$\phi_{d,q} : R \hookrightarrow R^{1/q}$$

la inclusión R–lineal que envía $1 \to d^{1/q}$. Diremos que esta función admite una semirretracción, si se conserva inyectiva después de tensorizar con $\otimes_R R/I$, para cada ideal I de R generado por parámetros en R. Denotaremos la función inducida al tensorizar por $\bar{\phi}_{d,q}$ (omitiendo a I de la notación).

Diremos que R es un anillo fuertemente F–racional (FFR), si para cada $d \in R$ existe un q_0 tal que $\phi_{d,q}$ admite una semirretracción para todo $q \geq q_0$.

Cuando (R,m) es un anillo local F–racional, se tiene bajo condiciones muy débiles en R la siguiente caracterización de F–racionalidad, en términos de

$$\varphi_{d,q} : H_m^n(R) \to H_m^n(R^{1/q}),$$

la función naturalmente inducida por $\phi_{d,q}$ en los grupos de cohomología local de más alto orden con soporte en el ideal maximal.

Teorema 12. *Sea (R,m) un anillo F–racional que sea C–M. Por el teorema anterior esto ocurre, por ejemplo, si R es la imagen homomorfa de una anillo C–M. También esto se da si R es un anillo excelente [1]. Dado $d \in R^0$ y un sistema de parámetros en R, $x_1, \ldots, x_n$, existe un q_0 tal que para todos los $q \geq q_0$ se tiene:*

1. $\bar{\phi}_{d,q}$: $R/I_t \to R^{1/q}/I_tR^{1/q}$ *es inyectiva para todo* $t \geq 1$, *donde* I_t *denota el ideal generado por* $x_1^t, \ldots, x_n^t$.
2. *La función* $\varphi_{d,q} : H_m^n(R) \to H_m^n(R^{1/q})$ *inducida por* $\phi_{d,q}$ *sobre los grupos de cohomología local es inyectiva.*
3. *La inclusión* $\phi_{d,q} : R \hookrightarrow R^{1/q}$ *admite una semirretracción, y por lo tanto* R *es un anillo FFR.*

Demostración. Para la demostración de este teorema ver [12].

El siguiente teorema proporciona una caracterización de F–racionalidad en términos de Ω, un módulo canónico para R.

Teorema 13. *Sea R un anillo F–finito C–M, para el cual existe un módulo canónico Ω. Entonces, R es F–racional si y sólo si R es FFR. Más aún, en este caso se puede dar la siguiente caracterización de F–racionalidad en términos de Ω :*

R es F–racional si y sólo si dado $d \in R^0$ existe un q_0 tal que la función

$$\Phi_{d,q} : Hom_R(R^{1/q}, \Omega) \to Hom_R(R, \Omega)$$

es sobreyectiva para todos los $q \geq q_0$. Aquí $\Phi_{d,q}$ denota la función inducida naturalmente por $\phi_{d,q} : R \hookrightarrow R^{1/q}$.

Esta caracterización de F-racionalidad permitió resolver un problema importante en la teoría de clausuras justas. El primero de ellos es el de demostrar que el conjunto de ideales primos de R para los cuales R_P es F-racional, denominado *locus F-racional*, es abierto en la topología de Zariski.

Este resultado ha sido demostrado para algebras reducidas finitamente generadas sobre una anillo local, pero aún permanece abierto para el caso en el que R es un anillo excelente. El resultado es el siguiente:

Teorema 14. *Sea R un álgebra reducida de característica prima, y finitamente generada sobre una anillo local excelente. Entonces, el locus F-racional es abierto en la topología de Zariski.*

La prueba de este teorema exige recursos muy avanzados. La prueba depende del teorema de dualidad local de Grothendieck, del difícil *teorema de desingularización* de Ogoma–Popescu–Spivakovsky [10, 11, 9] y del resultado que afirma que si R y S son anillos localmente excelentes, y R es F-racional, entonces, de existir $\alpha : R \to S$, un homomorfismo suave (smooth), S también es F-racional, (ver [12]).

Referencias

[1] ABERBACH I., HOCHSTER M., HUNEKE C. *Localizations of toght closure and modules of finite projective dimension*, J. reine angew. Math. **432** (1993).

[2] FEDDER R., WATANABE K. *A characterization of F-regularity in terms of F-purity*, en *Commutative Algebra* Math. Sci. Research. Institute, Publ. 15, Springer–Verlag, 1989.

[3] GROTHENDIECK A. (Notes by R. Hartshorne), *local cohomology*, Lecture Notes in Math. No. 41, Springer–Verlag, Heidelberg, 1967.

[4] KUNZ E. *Characterization of regular local rings of characteristic p*, Amer. J. Math. **41** (1969), 19–32.

[5] HOCHSTER M., HUNEKE C. *Tight closure, invariant theory, and the Briançon–Skoda theorem*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990).

[6] HOCHSTER M. *Contracted ideals from integral extensions of regular rings*, Nagoya Math. J. **51** (1973).

[7] HOCHSTER M. *Topics in the homological theory of modules over commutative rings*, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math. No. 24, A.M.S., Providence, R.I., 1975.

[8] HOCHSTER M., HUNEKE C., SALLY J.D. *Commutative Algebra*, Proceedings of a Microprogram Held at M.S.R.I. June 15–July 2, 1987, Publ. 15, Springer–Verlag, 1989.

[9] OGOMA T. *General Néron desingularization based on the idea of Popescu*, to appear, J. of algebra.

[10] POPESCU D. *General Néron desingularization and approximation*, Nagoya Math J. **104** (1986), 85–115.

[11] SPIVAKOVSKY M. *Smoothing of ring homomorfisms, approximation theorems and Bass–Quillen conjecture*, preprint.

[12] VÉLEZ J. *Oppennes of the F–rational locus and smooth base change*, preprint.

Postgrado de Matemáticas, A.A. 3840, Medellín.