Revista INTEGRACION
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 12, No 2, p. 183–193, junio–diciembre 1994

Sobre un Problema Semilineal Elíptico con Resonancia

MARIO ZULUAGA URIBE*

1. Introducción

En este artículo estudiaremos el siguiente problema elíptico:

$$P(\lambda_n, h)\begin{cases} \Delta u + \lambda_n u + g(u) & = & h \quad \text{sobre } \Omega, \\ u(\zeta) & = & 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio abierto y acotado con frontera suave, λ_n es un valor propio de $-\Delta$, g es una función real y $h \in L^\infty(\Omega)$.

Después del artículo de Landesman y Lazer [19], el problema ha sido intensamente investigado en varias direcciones. Para el caso en que λ_n es un valor propio simple diríjase el lector a [1, 3], [8, 11], [13, 16], [22, 25], [29], [31, 32] y las referencias que allí se encuentran. Para el caso en el que λ_n es no simple, ver [4, 6], [9], [28] y sus referencias.

Es común en la literatura sobre estos problemas distinguir los siguientes casos:

*Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

1. $g(t) \to a_{\pm}$ si $t \to \pm\infty$ y $(a_+, a_-) \neq (0,0)$.

   Este es el caso considerado por Landesman–Lazer.

2. $g(t) \to 0$ si $|t| \to \infty$ y

$$\int_0^t g(s)\, ds \to \pm\infty, \qquad \text{si } |t| \to \infty.$$

   Este caso fue considerado en [1, 27].

3. g es $T-$ periódica y $\int_0^T g(s)\, ds = 0$.

   Este caso fue considerado en [29].

4. g acotada, $\lambda_n + g'(s) < \text{const} < \lambda_{n+1}$ y λ_n un valor propio simple.

   Este caso fue considerado en [2, 31].

5. $g(t) \to 0$ si $|t| \to \infty$ y

$$\int_0^t g(s)\, ds \to \beta, \qquad \text{si } |t| \to \infty.$$

   Este caso es conocido como *resonancia fuerte*, y ha sido considerado en [4, 6].

La condición 5. implica una condición de compacidad que ha sido introducida por Cerami en [7]; ésta fue usada para probar un teorema de minimax, Teorema 2.3 de [4]. Desde el punto de vista de la Teoría de Morse el problema de la resonancia fuerte ha sido estudiado en [6], donde la condición 5. impone restriciones técnicas sobre el operador de Nemytski definido por g. Ver la condición g_0 allí.

En este artículo se tratará el caso en el que λ_n es un valor propio no simple, como también el caso en que sílo es. Este caso amerita un tratamiento aparte, no obstante ser el más fácil.

2. Notaciones y preliminares

2.1. El Operador $-\Delta$

Es bien conocido (ver [12]) que $-\Delta : D(-\Delta) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, donde $D(-\Delta) = H^{2,2}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$, es un operador lineal, autoadjunto y biyectivo con valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots$ También $(-\Delta)^{-1}$ es un operador bien definido de $L^2(\Omega)$ sobre $D(-\Delta)$; además es completamente continuo y satisface:

a) $(-\Delta)^{-1}[L^p(\Omega)] \subset H^{2,p}(\Omega) \cap H_0^{1,2}(\Omega)$, para todo $p \geq 2$.

b) $\|(-\Delta)^{-1} f\|_{2,p} \leq c_p \|f\|_{L^p(\Omega)}$, para todo $f \in L^p(\Omega)$.

c) $\|(-\Delta)^{-1}\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{\lambda_1}$.

d) $-(\Delta + \lambda_n)$ es inyectivo sobre $E(\lambda_n)^\perp$ y satisface a) y b), donde $E(\lambda_n)$ es el subespacio generado por las funciones propias asociadas a λ_n.

2.2. Soluciones de $P(\lambda_n, h)$

$u \in L^2(\Omega)$ es una solución de $P(\lambda_n, h)$ si y solo si

$$u = (-\Delta)^{-1}(\lambda_n u + g(u) - h). \tag{1}$$

Puesto que $(-\Delta)^{-1}$ es completamente continuo, entonces el lado derecho de (1) define un operador completamente continuo.

2.3. El Método de Liapunov–Schmidt

Sea $E(\lambda_j)$ el subespacio generado por las funciones propias asociadas a λ_j. Sea $X = \bigoplus_{j=1}^n E(\lambda_j)$. Supondremos que $\dim X = R$, $\dim(\lambda_n) = S$ y denotaremos $Y = X^\perp$ sobre $L^2(\Omega)$. Es claro que $H_0^{1,2}(\Omega) = X \oplus Y$, y entonces es claro que $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ la podemos escribir en la forma $u = x + y$, con $x \in X$ y $y \in Y$. Sean P y Q las proyecciones sobre X y Y respectivamente. Aplicamos P y Q a (1) y obtenemos

$$x = P(-\Delta)^{-1}(\lambda_n x + g(x + y) - h) \tag{2}$$

y

$$y = Q(-\Delta)^{-1}(\lambda_n y + g(x+y) - h). \tag{3}$$

Para cada $x \in X$, fijo, resolvemos la ecuación (3). La solución $y \in Y$ obtenida, la cual depende de x y h, la remplazamos en (2). Ahora tenemos una ecuación en x, y vemos que x la resuelve si y solo si $x+y(x,h)$ es una solución de $P(\lambda_n, h)$.

3. Resultados principales

Aquí supondremos que $g \in C^1$, acotada y $g(0) = 0$.

Teorema 1. *Supongamos que g satisface las siguientes condiciones:*

(H.1) $|g(u) - g(v)| \leq k|u - v|$, $u, v \in \mathbb{R}$ *tal que* $k + \lambda_n < \lambda_{n+1}$.

(H.2) $m_j + g'(0) \neq 0$ *para todo* $j = 1, 2, \ldots, n$, *donde* $m_j = (\lambda_n - \lambda_j)$.

Entonces, existe $a > 0$ tal que si $\|h\|_{L^2(\Omega)} \leq a$, $P(\lambda_n, h)$ tiene una solución.

Demostración. Por **(H.1)** es fácil ver que para $x \in X$, fijo, y $h \in L^2(\Omega)$, el lado derecho de (3) es una contracción; entonces existe una única solución $T(x,h) \in Y$ de (3).
Es bien conocido (ver por ejemplo [31]) que $T : X \times L^2(\Omega) \to Y$ es continua, y si g es diferenciable entonces $T(x,h)$ lo es, y además, si $g(0) = 0$ entonces $T(0,0) = 0$. Remplazamos $T(x,h)$ en (2) y vemos que nuestro problema se reduce a hallar soluciones del problema

$$x = P(-\Delta)^{-1}(\lambda_n x + g(x + T(x,h)) - h). \tag{4}$$

Sea $x = \sum_{k=1}^{R} \alpha_k \phi_k$, donde ϕ_k denota la función propia asociada a λ_k. Entonces, resolver (4) equivale a resolver el sistema

$$\begin{aligned} h_j = \int_\Omega h\phi_j &= (\lambda_n - \lambda_j)\alpha_j + \int_\Omega g(x + T(x,h))\phi_j \\ &= m_j\alpha_j + \Gamma_j(\alpha, h), \end{aligned} \tag{5}$$

$j = 1, 2, \ldots, R$, donde $\Gamma_j(\alpha, h) = \int\limits_\Omega g(x + T(x,h))\phi_j$. De ahora en adelante identificaremos $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_R)$ con $x \in X$.
Podemos reescribir (5) en la forma

$$\hat{h} = \Gamma(\alpha, h) + M(\alpha), \tag{6}$$

donde $\hat{h} = (h_1, \ldots, h_R), \Gamma = (\Gamma_1, \ldots, \Gamma_R)$, M es la matriz diagonal $[m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, 0, 0, \ldots]$ con $R-S$ entradas no nulas sobre la diagonal de M.
Si llamamos $F(\alpha, h) = \Gamma(\alpha, h) + M(\alpha) - \hat{h}$ entonces $F(0,0) = 0$ y $F'_\alpha(0,0) = M + \Gamma'(0,0)$. Por **(H.2)** concluimos que $F'_\alpha(0,0)$ es un homeomorfismo de $\mathbb{R}^R$ sobre sí mismo. El teorema de la función implícita nos dice que existe una vecindad abierta U de $h = 0$ y una función continua $\phi : U \to \mathbb{R}^R$ tales que

$$\hat{h} = \Gamma(\phi(h), h) + M(\phi(h)). \tag{7}$$

Sea $a > 0$ tal que $\overline{B(0,a)} \subset U \subset L^2(\Omega)$. Por (7) vemos que si $\|h\|_{L^2(\Omega)} \leq a$, $P(\lambda_n, h)$ tiene una solución.

Comentario 1. *El caso $\lambda_n = \lambda_1$ es el más simple, y ha sido ampliamente tratado en la literatura aun para valores propios distintos del primero, pero siempre para el caso de valores propios simples. En este caso es claro que $M = 0$. Vemos que para $a = \inf\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \Gamma(\alpha, h)$ y $b = \sup\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \Gamma(\alpha, h)$, el problema $P(\lambda_1, h)$ tiene solución si $\hat{h} = \int\limits_\Omega h\phi_1 \in (a,b)$, y $P(\lambda_1, h)$ no tiene solución si $\hat{h} \notin [a,b]$. Este caso fue considerado en* [31, 2].

En la sección 4 volveremos sobre el caso λ_1, donde se dará un resultado general.

4. Soluciones no nulas

El primer resultado es el siguiente

Teorema 2. *Supongamos que g satisface* **(H.1)** *y*

(H.3) $g'(0) > 0$.

(H.4) $m_j > 2, j = 1, \ldots, n-1, n \geq 2$.

(H.5) *$dim E(\lambda_n)$ es impar.*

Entonces $P(\lambda_n, 0)$ tiene, por lo menos, una solución no nula.

Demostración. Como en el teorema 1, las soluciones de $P(\lambda_n)$ son de la forma $x + T(x, 0)$, donde $x = \sum_{k=1}^{R} \alpha_k \phi_k = \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_R)$ satisface (7) para $h = 0$.
De **(H.3)** y **(H.4)** obtenemos

$$\text{ind}\,[-(\Gamma + M), 0] = \pm 1, \tag{8}$$

donde $\text{ind}[f, 0] = d_B[f, B(0, \epsilon), 0]$ para todo $\epsilon > 0$ y pequeño; d_B denota el grado de Brouwer, el cual es 1 si $\dim X$ es par y -1 si $\dim X$ es impar. Ahora, puesto que g es acotada, $\Gamma + M - I$ es asintticamente lineal a $M - I$. Por **(H.4)** vemos que 1 no es un valor propio de $M - I$. Entonces

$$d_B[-(\Gamma + M), B(0, r), 0] = (-1)^{R-S} = \mp 1, \tag{9}$$

si r es suficientemente grande (ver [18], p. 105).
Por (8), (9) y la propiedad de la descomposición del dominio del grado de Brouwer, existe $\alpha_0 \in \mathbb{R}^R$, $\alpha_0 \neq 0$, tal que $\alpha_0 + T(\alpha_0, 0)$ es una solución no nula de $P(\lambda_n, 0)$.

Ejemplo 3. *$u'' + n^2 u + \sin u = 0, u(0) = u(\pi) = 0, n \geq 2$ tiene, por lo menos, una solución no nula.*

Los siguientes teoremas se enunciarán sin pruebas, advirtiendo que ellas siguen los mismos principios del teorema 2.

Teorema 4. *Supongamos que g satisface* **(H.1)** *y:*

(H.6) $g'(0) < -m_1$.

(H.7) *Existe $d > 0$ tal que para $\|h\|_{L^2(\Omega)} \geq d$,*

$$\sum_{k=1}^{R} \left(\int_{\Omega} u\phi_k \right) \left(\int_{\Omega} g(u)\phi_k \right) \geq 0$$

y $Pg(u) \neq 0$.

(H.8) $\dim X$ *es impar.*

Entonces $P(\lambda_n, 0)$ tiene,por lo menos, una solución no nula.

Comentario 2. *La condición* **(H.7)** *se satisface si, por ejemplo, para $\|u\|_{L^2(\Omega)} \geq d$ el Operator de Nemytski definido por g es $g(u) = \frac{u}{1+\|u\|_{L^2(\Omega)}}$, $Pu \neq 0$.*

Teorema 5. *Supongamos que g satisface las condiciones* **(H.1)**, **(H.5)**, **(H.7)** *y también*

(H.9) $g'(0) < 0$.

(H.10) $g'(0) + m_j > 0$ para $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Entonces $P(\lambda_n, 0)$ tiene, por lo menos, una solución no nula.

Teorema 6. *Supongamos que g satisface las condiciones* **(H.1)**, **(H.2)**, *como también*

(H.11) *Existe $c > 0$ y una no nula $(\alpha_n, \ldots, \alpha_R) \in \mathbb{R}^S$ tales que una de las siguientes posibilidades se satisface:*

a) $\displaystyle\sum_{j=n}^{R} \int_{\Omega} \alpha_j g(u)\phi_j = 0$, *si* $\|u\|_{L^2(\Omega)} = c$.

b) $\displaystyle\sum_{j=n}^{R} \int_{\Omega} \alpha_j g(u)\phi_j < 0$, *si* $\|u\|_{L^2(\Omega)} = c$.

c) $\displaystyle\sum_{j=n}^{R} \int_{\Omega} \alpha_j g(u)\phi_j > 0$, *si* $\|u\|_{L^2(\Omega)} = c$.

Entonces $P(\lambda_n, 0)$ tiene, por lo menos, una solución no nula.

5. El caso de un valor propio simple

En esta sección se considerará el caso $\lambda_n = \lambda_1$. Este caso puede extenderse al caso de un valor propio simple distinto del primero.

El siguiente Teorema constituye una generalización del caso considerado en [2]. Las hipótesis son ampliamente debilitadas. El Teorema principal es:

Teorema 7. *sea g una función continua y acotada y sea $h \in L^\infty(\Omega)$. Entonces, existen dos intervalos $[M, N] \subsetneq [a, b]$ tales que si $\int_\Omega h\phi_1 \in (M, N)$ el problema $P(\lambda_1, h)$ tiene una solución, y si $\int_\Omega h\phi_1 \notin [a, b]$ entonces $P(\lambda_1, h)$ no tiene solución.*

Demostración. Sólo se dará una idea de la prueba. En este caso $X = \{t\phi_1, t \in \mathbb{R}\}$ y existe $R > 0$ tal que para todo $x \in X$

$$d_{LS}[I - Q(-\Delta)^{-1}(\lambda_1 . + g(x + .) - h), B(0, R), 0] = 1.$$

Otra aplicación de la Teoría de Leray–Schauder nos dice que si tomamos a $x = t\phi_1$ como parámetro, y usamos el Teorema Fundamental de [20] o el Corolario 10 de [26] (capítulo V) entonces para cada $M > 0$ existe un conjunto maximal conexo S_M de soluciones $(t\phi_1, T(t\phi_1)) \subset [-M, M] \times Y$ de (3). Ahora, podemos dar un orden sobre $C = \{S_M, M \in \mathbb{R}^+\}$ en la siguiente forma: $S_M \leq S_N$ si $M \leq N$ y $\|f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $f \in QS_M$ y $g \in QS_N$. Este orden está bien definido, ya que S_P es maximal. Puesto que $\|QS_P\|_{L^2(\Omega)} \leq R$ para todo P, entonces toda cadena en C es acotada. Por el Lema de Zorn, C tiene un elemento maximal S. Sea $S = \{t\phi_1 + T(t\phi_1), t \in \mathbb{R}\}$, donde $T : X \to 2^Y$.

Remplazamos $T(x)$ en (2), y $P(\lambda_1, h)$ tiene una solución si y sólo si

$$\int_\Omega h\phi_1 \in \int_\Omega g(x + T(x))\phi_1 = \Gamma(t)$$

para algún $x = t\phi_1$. Es claro que $\{(t, \Gamma(t))\}$ es conexo. Definimos $M = \inf_{t\in\mathbb{R}} \Gamma(t)$, $N = \sup_{t\in\mathbb{R}} \Gamma(t)$, y también $a = \inf_{u\in L^2(\Omega)} \int_\Omega g(u)\phi_1$ y $b = \sup_{u\in L^2(\Omega)} \int_\Omega g(u)\phi_1$.

Referencias

[1] AHMAD S., LAZER A., PAUL J. *Elementary critical point theory and perturbation of elliptic boundary value problems at resonance.* Indiana Univ. Math. J. **25** (1976), 933–944.

[2] AMBROSETTI A., MANCINI G. *Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problems with linear part at resonance. The case of the simple eigenvalue.* J. of Diff. Equations. **28** (1978), 220-245.

[3] ANANE A. *Etude des valeurs propres et la resonance pour l 'operateur P-Laplacian. Ph.D. Thesis,* Univ.Bruxelles (1988).

[4] BARTOLO P., BENCI V., FORTUNATO D. *Abstract critical point Theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance.* Nonlinear Analysis T.M.A. **7 N 9** (1983), 981–1012.

[5] BERESTYCKI H., DEFIGUEIREDO D. *Double resonance in semilinear elliptic problems.* Comm. Partial Diff. Equations. **6** (1981), 91–120.

[6] CAPOZZI A., LUPO D., SOLIMINI, S. *On the existence of a nontrivial solution to nonlinear problem at resonance.* Nonlinear Analysis. T. M. A. **13 No 2** (1989), 151–163.

[7] CERAMI G. *Un criterio de existenza per i punti critici su varieta ilimitate.* Rc. Ist. Lomb. Sci.Lett. **112** (1978), 332–336.

[8] CESARI L., KANNAN R. *Qualitative study of a class of nonlinear boundary value problems at resonance.* Jour. J.Diff. Equations. **56** (1985), 63–81.

[9] COSTA D. *A note on unbounded perturbations of linear resonant problems.* Trabalho de Matematica. **245** (1985), Univ. Brasilia.

[10] DE FIGUEIREDO D., WEI–MING NI *Perturbation of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landesman–Lazer condition.* Nonlinear Analysis. T. M. A. **3** (1979), 629–634.

[11] De Figueiredo D., Gossez J. *Resonance below the first eigenvalue for a semilinear elliptic problem.* Math. Ann. **281** (1988), 589–610.

[12] Friedman A. *Partial Differential Equations.* Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[13] Gossez J. *Some nonlinear differential equations at resonance at first eigenvalue.* Conf. Sem. Mat. Univ Bari. **167** (1979), 355–389.

[14] Iannacci R., Nkashama M. *Nonlinear boundary value problems at resonance.* Nonlinear Analysis. T. M. A. **11** (1987), 455-473.

[15] Iannacci R., Nkashama, M. *Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance.* Report 87–12, Memphis State Univerity 1987.

[16] Kazdan J., Warner, F. *Remarks on some qualilinear elliptic equations.* Comm. On Pure and Appl. Math. **28** (1975), 567–597.

[17] Krasnosels'kii M. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations.* Mc Millan Company, 1964.

[18] Krasnosels'kii M., Zabreico F. *Geometrical Methods Of Nonlinear Analysis.* Springer–Verlag, 1984.

[19] Landesman E., Lazer A. *Nonlinear perturbation of elliptic boundary value problems at resonance.* J. Math. Mech. **19** (1970), 609–623.

[20] Leray J., Schauder J. *Topological et equations fonctionelles.* Ann. Ec. Nor. Sup. **51** (1934), 45–78.

[21] LLoyd N. *Degree Theory.* Cambridge University Press, 1978.

[22] Lupo D., Solimini S. *A note on a resonance problem.* Proc.Royal Soc.Edinburgh. **102 A**, 1–7.

[23] Mawhin J. *Problemes de Dirichlet variationneles no lineaires.* Seminaire Math. Sup, Univ. Montreal, 1987.