Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Volumen 12, Nº 1, enero-junio 1994

Pliegues y Pegamientos de la Recta y el Plano

RAFAEL ISAACS *
SONIA SABOGAL **

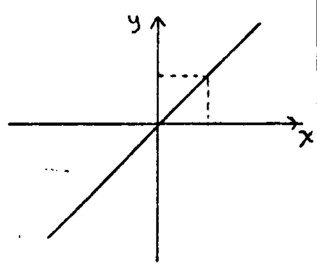
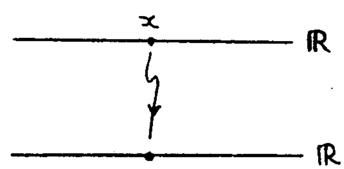
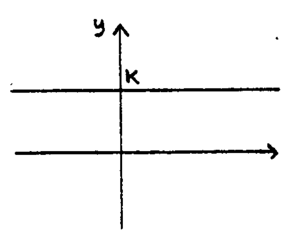
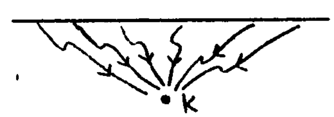
El concepto de "pliegue" de una transformación polinomial aparece en [1] tratado de una manera muy intuitiva a través de ejemplos, pero sin dar una definición formal. En este artículo tratamos de explorar, generalizar y formalizar este concepto.
En la primera parte se presentan varios ejemplos de funciones reales a manera de motivación. En la segunda parte formalizamos el concepto de pliegue para funciones reales de variable real y lo comparamos con otros conceptos similares: punto crítico, máximos y mínimos relativos, inyectividad local y lo que llamaremos puntos de pegamiento. Estos conceptos no coinciden para funciones reales, aun colocando condiciones de diferenciabilidad.
En la tercera sección se formaliza el concepto de pegamiento, análogo al de pliegue pero válido en cualquier espacio topológico, y se demuestra que, para funciones analíticas del plano complejo, tener un punto de pegamiento es equivalente a tener un punto crítico, y equivalente asímismo a no ser localmente inyectiva, con lo cual se comprueba que una función analítica y no localmente inyectiva en un punto actúa, cerca de ese punto, muy parecido a como actúa $f(z)=z^n$ alrededor de 0: divide vecindades en n partes y "pega".

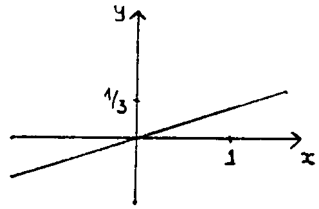
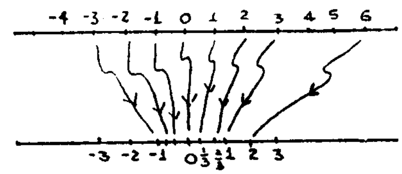
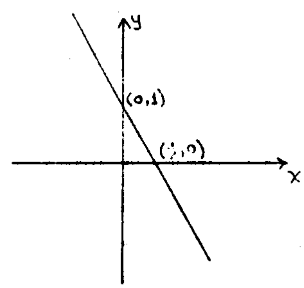
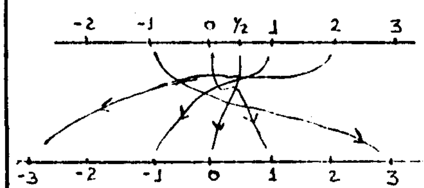
---

* Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, UIS, Bucaramanga.
** Profesora Asociada, Departamento de Matemáticas, UIS, Bucaramanga.

1. Representación de funciones.

La forma usual de representar gráficamente una función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es en un plano cartesiano, lo que constituye una manera muy práctica y tradicional de conocer propiedades importantes de la función.
Sin embargo, teniendo en cuenta que una función hace una "transformación" del dominio (que puede ser dejarlo igual si se trata de la función idéntica), resulta interesante hacer otro tipo de representación, que llamaremos biespacial y que tiene la ventaja de que ayuda a visualizar y entender la idea de la deformación del espacio, es decir permite "ver" lo que hace f a la recta real (o a un subconjunto de ella), "ver" cuál es el efecto geométrico de f sobre $\mathbb{R}$ (o sobre un subconjunto de $\mathbb{R}$).
Sin más explicaciones por ahora, veamos algunos ejemplos:

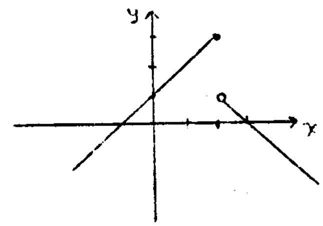
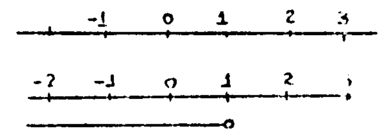
FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
1) f(x)=x		 f no transforma la recta, la deja igual.
2) f(x) = k k constante		 f transforma la recta en un punto.

3) $f(x)=\alpha x$ con $\alpha=1/3$	 	 f comprime la recta.
4) $f(x)=-2x+1$	 	 f hace un "estiramiento" de la recta junto con una reflexión respecto al punto 1/3

En los ejemplos 3 y 4, desde un punto de vista topológico la recta no sufre transformación; el cambio se da desde un punto de vista euclidiano. Así, en el ejemplo 4, $f([-1,2])=[-3,3]$ y en general un intervalo de longitud L lo transforma en uno de longitud 2L y lo "voltea" mediante una reflexión respecto al punto 1/3 (o equivalentemente mediante una rotación de 180 grados alrededor del punto 1/3). La recta toda se estira como si fuera de caucho, pero dejando fijo el punto 1/3, y luego gira 180 grados alrededor del punto fijo 1/3.

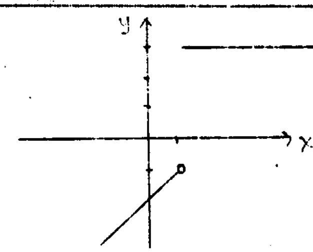
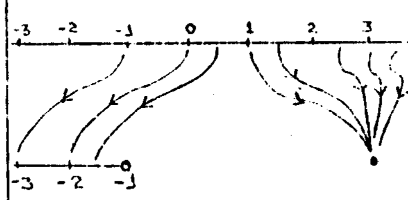
Inspirándose en los ejemplos anteriores, ¿cómo se describiría en general el efecto geométrico de una transformación de la forma $f(x) = ax + b$?
(Sugerencia: considere 4 casos: $a=0$, $0<|a|<1$, $|a|>1$; $|a|= 1$)

Veamos más ejemplos:

FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
5) $f(x) = x+1$, si $x \leq 2$; $f(x) = -x+3$, si $x>2$.		

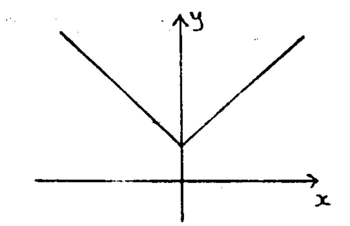
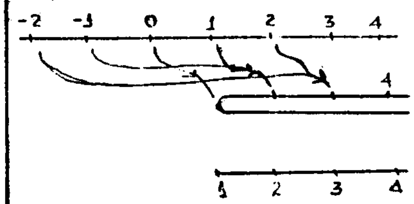
Podríamos describir la acción de f en 3 pasos así:

1) f "rompe" la recta en el punto 2.
2) La semirecta que queda a la izquierda la desplaza una unidad a la derecha (quedando su origen en 3).
3) La semirecta (sin el origen 2) que queda a la derecha, la refleja respecto al origen y luego la desplaza 3 unidades hacia la derecha (quedando su origen "hueco" en 1).

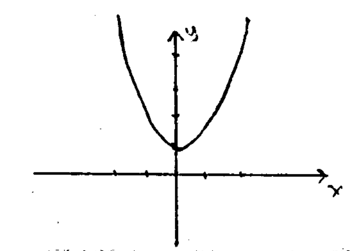
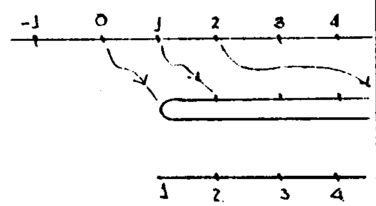
FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
6) $f(x) = x-2$, si $x<1$; $f(x) = 3$, si $x \geq 1$.		

1) f "rompe" la recta en el punto 1.
2) La semirecta que queda a la izquierda, sin incluir el origen 1, la desplaza 2 unidades hacia la izquierda.
3) La semirecta que queda a la derecha, la convierte en el

punto 3.

FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
7) $f(x)=$ $\lvert x\rvert + 1$		

f "dobla" la recta por el punto f(0)=1, transformándola en una semirecta; f tiene un "pliegue" en el punto 0.*

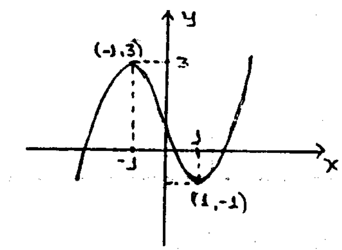
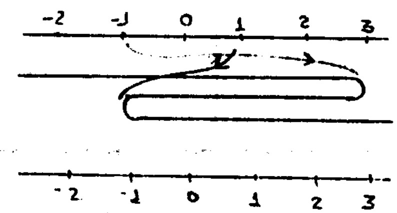
FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
8) $f(x)=$ $x^2 + 1$		

Topológicamente el espacio resultante en los dos últimos ejemplos después de aplicar f es el mismo (una semirecta), aunque en el ejemplo 8, f además de "doblar" o "plegar" la recta por el origen

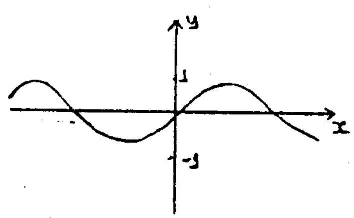
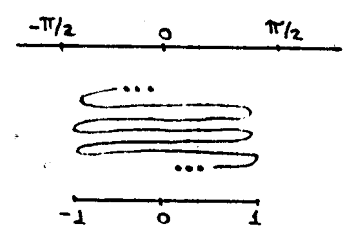
---

*La nomenclatura es análoga a la de extremos relativos, se dice: f tiene un mínimimo (pliegue) en x y el mínimo (punto de pliegue) es f(x)=y.

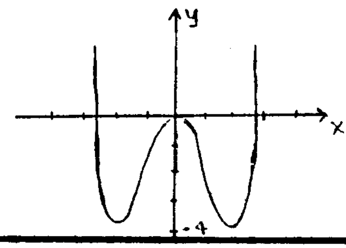
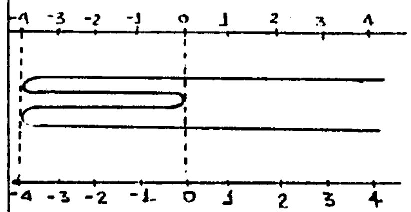
hace una contracción en el intervalo (-1,1) y un estiramiento fuera de él.

FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
9) $f(x)=$ x^3-3x+1		

f presenta dos puntos de pliegue: en f(1)=-1 y en f(-1)=3.

FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
10) $f(x)=$ sen x		

f hace infinitos "plegamientos", pero siempre en -1 y 1, luego tiene dos puntos de pliegue: -1 y 1.

FUNCION	REPRESENTACION GRAFICA	
	FORMA USUAL	FORMA BIESPACIAL
11) $f(x)=(x^4/4)-2x^2$		

f tiene dos puntos de pliegue: $f(-2)=f(2)=-4$ y $f(0)=0$.

2. Concepto de pliegue en la recta.

Observando los últimos ejemplos de la sección anterior nos damos cuenta de que el concepto de pliegue está muy relacionado con el de extremo relativo. Recordemos, pues, lo que se entiende por extremo relativo de una función de variable real.

Definición 1: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$:

1) Se dice que f tiene un **máximo** relativo en $a \in A$, si existe una vecindad de a, U_a tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo $x \in U_a$. En este caso f(a) se dice un máximo relativo de f.

2) Se dice que f tiene un mínimo relativo en $a \in A$ si existe una vecindad de a,U_a tal que $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in U_a$. En este caso f(a) se dice un mínimo relativo de f.

3) Se dice que f tiene un extremo relativo en $a \in A$ si f tiene un máximo o un mínimo relativo en a. En este caso f(a) se dice un extremo relativo de f.

Según la definición 1, una función como la de la figura A tiene extremos relativos en a_0, a_1, a_4, a_5, a_6, a_7 y todos los puntos del intervalo $[a_2, a_3]$. Para nuestra definición formal de "pliegue" queremos considerar únicamente los que se producen en los puntos a_1, a_4 y a_5;

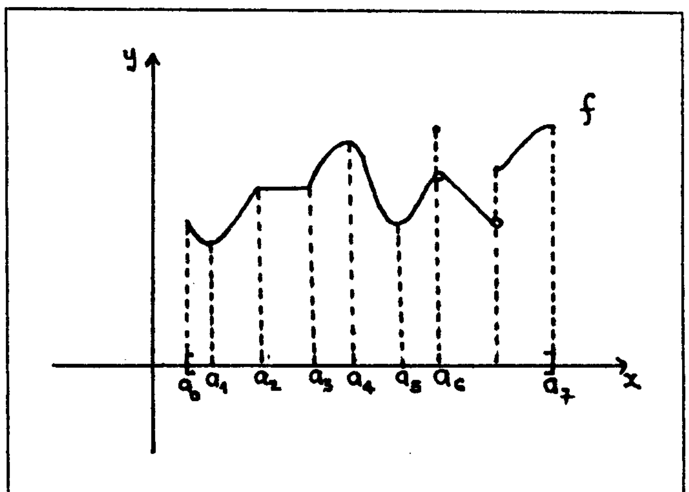


Figura A

entonces a estos los llamaremos simplemente "pliegues".

Es decir:

Definición 2: Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Diremos que f tiene un pliegue en $a \in A$ si existe un intervalo abierto (b,c) alrededor de a (es decir con $a \in (b,c)$) tal que se tiene alguna de las siguientes dos condiciones :

1) $f(x) < f(a)$ para todo $x \in (b,c)$, $x \neq a$
2) $f(a) < f(x)$ para todo $x \in (b,c)$, $x \neq a$

En este caso $f(a)$ se dice un punto de pliegue de f.

De las definiciones 1 y 2 se deducen fácilmente las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1: Todo punto de pliegue es un extremo relativo, pero el recíproco no se tiene. ■

Por ejemplo en la figura A, $f(a_0)$, $f(a_2)$, $f(a_6)$ y $f(a_7)$ son extremos relativos que no son puntos de pliegues. Teniendo en cuenta la afirmación 1, y recordando además que los extremos relativos de una función se encuentran en los llamados puntos críticos (es decir puntos en donde la derivada es cero o no existe), y que si a es un punto crítico definido, $f(a)$ se llama un valor crítico, podemos escribir:

Afirmación 2: Si $f(a)$ es un punto de pliegue de f entonces $f(a)$ es un valor crítico de f. ■

Nuevamente el recíproco no se cumple: En la figura A hay varios valores críticos que no son puntos de pliegue. Otro ejemplo se encuentra en $f(x)=x^3$, para la cual 0 es un valor crítico que no es punto de pliegue (tampoco es extremo relativo).

Afirmación 3: Una transformación polinomial $f:\mathbb{R}:\longrightarrow\mathbb{R}$ de grado n, produce a lo más n-1 pliegues

Demostración: f es de la forma $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, ($a_n$ no nulo) Por la afirmación 2, y teniendo en cuenta que f es derivable en todo $\mathbb{R}$, podemos decir que los valores de x que son transformados en puntos de pliegue son soluciones de la ecuación $f'(x)=0$, o sea de

$$a_1+2a_1x+\ldots+na_nx^{n-1} = 0,$$

y sabemos que esta ecuación tiene a lo más n-1 soluciones. ∎

Veamos ahora otra condición suficiente para la existencia de puntos de pliegue.

Afirmación 4: Sean $A\subset\mathbb{R}$ y $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ continua. Si existen $a\in A$ y un intervalo abierto $(b,c)\subset A$ con $b<a<c$, y tales que

i) $f[b,a] = f[a,c]$;

ii) f es uno a uno en $[b,a]$ y en $[a,c]$,

entonces $f(a)$ es un punto de pliegue de f.

Demostración: Como f es uno a uno en $[b,a]$ y además continua, entonces f debe ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente en $[b,a]$.
Supongamos que f es estrictamente creciente en $[b,a]$; como f también es inyectiva en $[a,c]$ y además $f[b,a] = f[a,c]$, entonces f debe ser estrictamente decreciente en $[a,c]$. Así, dado $x\in(b,c)$, $x \neq a$, hay dos posibilidades: $b<x<a$ ó $a<x<c$; en el primer caso se tiene $f(x)<f(a)$ (por ser f creciente en $[b,a]$), y en el segundo caso también $f(x)<f(a)$ (por ser f decreciente en $[a,c]$). Luego el intervalo dado (b,c) es una vecindad de a tal que $f(x)<f(a)$ para todo $x \in (b,c)$, $x \neq a$, es decir, p es punto de pliegue de f según la definición 2.
La demostración es análoga si f es estrictamente decreciente en $[b,a]$. ∎

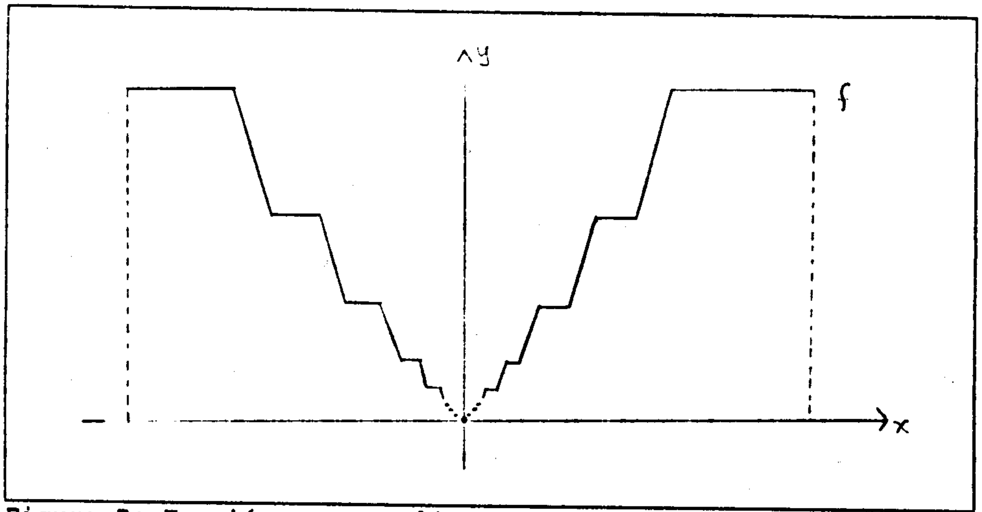


Figura B: Función con un pliegue que no cumple las condiciones de la afirmación 4.

Las condiciones de la afirmación 4, son ideales para denominar al punto f(a) punto de pliegue, ya que significan que f "pega" puntos de [b,a] con puntos de [a,c], pero el recíproco de la afirmación 4 no se cumple. Obsérvese la función sugerida en la figura B. Sin embargo, colocando condiciones muy débiles sobre derivabilidad podemos obtener una equivalencia.

Afirmación 5: Sean $A\subseteq\mathbb{R}$; $f:A \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable y con derivada continua en A, a un punto interior de A, y U_a una vecindad de a tal que $f'(x)$ no es 0 para ningún x en $U_a-\{a\}$. Entonces f(a) es un punto de pliegue de f si, y solo si, existe $(b,c)\subseteq A$ con $b<a<c$ y tal que

i) $f[b,a] = f[a,c]$;
ii) f es uno a uno en [b,a] y en [a,c].

Demostración: $\leftarrow$)Ya se demostró en la afirmación 4.
$\rightarrow$) Si f(a) es un punto de pliegue de f, existe un intervalo (p,q) tal que $a\in(p,q)$ y, por ejemplo, $f(x)<f(a)$ para todo $x\in(p,q)$, con x diferente de a. Por las condiciones de la afirmación, podemos

suponer que, además, para todo $x\in(p,q)$ con x diferente de a se tiene que $f'(x)$ no es 0.
No pueden existir x_1 y x_2 en (p,a) tales que $f'(x_1)$ y $f'(x_2)$ tengan signos contrarios , pues entonces, por ser f' continua en A, entre x_1 y x_2 debería existir x con $f'(x)=0$, que contradice la hipótesis. Así, f' siempre es positiva o negativa en (p,a), y como $f(a)$ es máximo, entonces f es estrictamente creciente en (p,a).
Análogamente se prueba que f es estrictamente decreciente en (a,q). Se tiene que f es estrictamente creciente en $[p,a]$ y estrictamente decreciente en $[a,q]$.
Por lo tanto f no es inyectiva en $[p,q]$, es decir existen $b,c\in[p,q]$, con $f(b)=f(c)$ y $p\le b<a<c\le q$. Es claro que $f[b,a]=f[a,c]$, y que f es inyectiva en $[b,a]$ y en $[a,c]$. ■

La siguiente afirmación es consecuencia de un teorema que aparece en [2], pág.504, y proporciona también, bajo ciertas condiciones, una caracterización de los puntos de pliegue.

Afirmación 6. Sean $A\subset\mathbb{R}$, $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ y a un punto interior de A para el cual existe n entero positivo tal que: $f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$ y $f^{(n)}(a)\neq0$. Entonces $f(a)$ es punto de pliegue de f si y solo si n es par. ■
Obsérvese que si n es par, las condiciones del teorema garantizan que f es continua en una vecindad de a.

Introducimos ahora un nuevo concepto que usaremos después para dar una condición necesaria (pero no suficiente) para que una función tenga pliegue en un punto determinado.

Definición 3: Sean X e Y espacios topológicos y $f:X\longrightarrow Y$ continua; f se dice localmente inyectiva en $x_0\in X$ si existe una vecindad V de x_0 tal que f restringida a V es inyectiva. Se dice que f es localmente inyectiva (en X), si es localmente inyectiva en cada $x\in X$.

Ahora es fácil demostrar la siguiente afirmación:

Afirmación 7 : Sea $A \subset \mathbb{R}$, A abierto y $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Si f tiene un punto de pliegue en $a \in A$, entonces f no es localmente inyectiva en a.

Demostración: Si f es localmente inyectiva en a, como A es abierto podemos afirmar que existe un intervalo abierto $(b,c) \subset A$ tal que $a \in (b,c)$ y f restringida a (b,c) es inyectiva.
Como f es continua e inyectiva en (b,c), entonces necesariamente f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en (b,c); por lo tanto, f no tiene extremo relativo en a, y usando la Afirmación 1 podemos concluir que f no tiene punto de pliegue en a, lo que contradice la hipótesis. ■

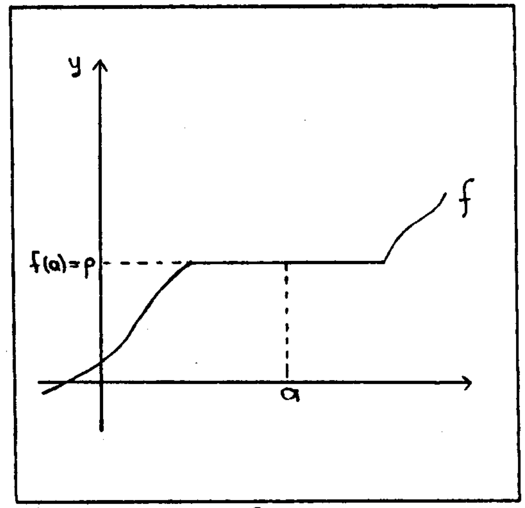


Figura C: En a f no es localmente inyectiva ni tiene punto de pliegue.

En la figura C se puede apreciar un ejemplo que muestra que el recíproco de la afirmación 7 no se cumple.

3. Pegamientos en el plano.

La forma biespacial de representar una función $f:\mathbb{R}:\longrightarrow\mathbb{R}$ corresponde a la forma usual de representar funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, o equivalentemente, del plano complejo en el plano complejo (varios ejemplos se pueden encontrar en [1] p.p 50, [4] p.p 206-212 y [5]).

Veamos un ejemplo de una función que "dobla" el plano a lo largo de dos rectas: Sea F definida por

$$F(x_1,x_2)=((8/5)x_1^3-(36/5)x_1^2+(48/5)x_1,\ x_2).$$

Si consideramos cada una de las dos funciones coordenadas como funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, podemos afirmar que, a lo largo del eje y, el plano no sufre ninguna deformación (por tratarse de la función idéntica, $f_2(x_2)=x_2$), mientras que a lo largo del eje x el plano se deforma según la transformación polinomial

$$f_1(x_1)=(8/5)x_1^3-(36/5)x_1^2+(48/5)x_1 \ .$$

Ahora bien, es fácil verificar que f_1 tiene dos puntos de pliegue, 16/5 y 4 (los cuales se producen en $x_1=2$ y $x_1=1$ respectivamente); luego una representación biespacial de F sería aproximadamente como la de la figura D.

Así, en este caso hablaríamos de "rectas de pliegue" en vez de puntos de pliegue, y naturalmente surgen varias preguntas. Por ejemplo: ¿Cuál sería una definición formal de "recta de pliegue", o de "curva de pliegue" ? ¿Se podría generalizar el concepto de "pliegue" para una función continua $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$? ¿O mas aún, para una función continua $f:X\longrightarrow X$, donde X es un espacio topológico cualquiera? Enseguida intentamos responder someramente algunas de estas inquietudes.

La definición que proponemos para "punto de pliegue" para una función de variable real (Definición 2) hace uso del orden (usual) en $\mathbb{R}$, lo cual no permite generalizarla, por ejemplo, para

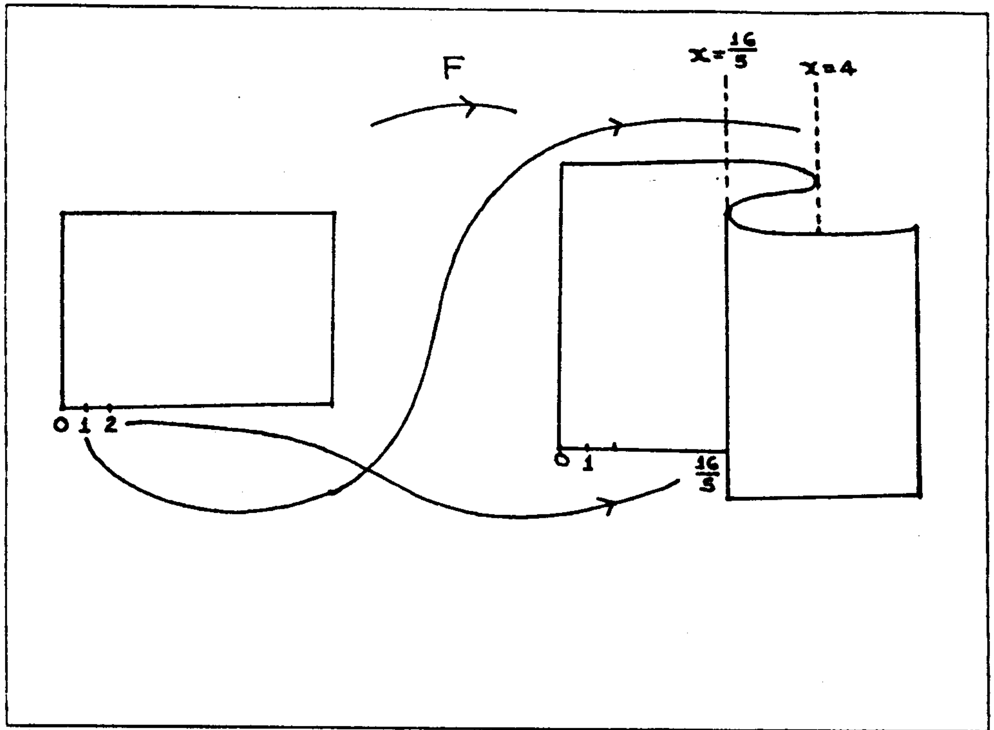


Figura D

el caso del plano complejo. En este sentido sería mejor tomar la afirmación 4 como punto de partida para la definición de otro concepto que, en realidad, no sería exactamente el mismo de"pliegue" (pues, como se vio, no son equivalentes) y que llamaremos entonces "punto de pegamiento". Para esto introducimos primero un concepto que corresponde a una especie de "partición topológica", el cual surge al tratar de identificar lo que observamos de común en los casos real y complejo.

Definición 4. Sea X un espacio topológico. Llamaremos una segmentación de X a una colección $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de X tales que:

i) $\mathrm{int}(A_i)\neq\emptyset$ para todo $i\in I$;

ii) $\mathrm{int}(A_i)\cap A_j=\emptyset$ para todo par $i\neq j$;

iii) $\mathrm{cl}(\cup A_i)_{i\in I}=X$

(aquí int(A) y cl(A) denotan el interior y la clausura de A respectivamente (ver figura E)).

Así por ejemplo, el conjunto de intervalos de la forma (n,n+1], con n entero, forma una segmentación de la recta real; los reales positivos y los reales negativos forman otra. Si a<b<c son reales, los intervalos [a,b] y [b,c] forman una segmentación de [a,c]. Una recta segmenta el plano en dos regiones, y si n rectas se cortan en un punto se forman 2n regiones que segmentan el plano.

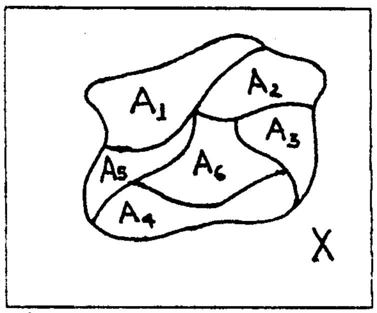


Figura E

A partir de la definición de segmentación proponemos entonces la siguiente

Definición 5. Sean X, Y espacios topológicos y $f:X \longrightarrow Y$ continua, n entero mayor que 1. Diremos que f tiene un **pegamiento de orden n en** $a \in X$ si para toda vecindad V_a de a, existen otra vecindad $U_a \subseteq V_a$ y una segmentación de U_a con n subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tales que:

i) $a \in cl(A_1) \cap cl(A_2) \cap \ldots \cap cl(A_n)$;

ii) $f(int(A_i)) = f(int(A_j))$ para todo par i,j;

iii) f es inyectiva en A_i para cada $i=1,2,\ldots,n$.

Diremos además que f(a) es **punto de pegamiento de f**.

Nota. Obsérvese que, como dijimos anteriormente, esta definición no coincide con la definición que dimos para "punto de pliegue" de una función $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (Definición 2); en este caso, y según la afirmación 4, ser punto de pegamiento de orden 2 implica ser punto de pliegue, pero no recíprocamente (ver Figura B).

Según la definición 5, para la función del último ejemplo todos los puntos de las rectas $x=16/5$ y $x=4$ son puntos de pegamiento. Obsérvese que para cada punto basta una segmentación de orden 2 (ver Figura F).

Un ejemplo muy importante es la función de variable compleja $f(z)=z^n$ donde n es un entero, $n\geq 2$. Se sabe que f multiplica por n el ángulo entre dos complejos no nulos; si tomamos por ejemplo los complejos no nulos con ángulo entre 0 y π/n, al aplicarles f las imágenes llenan medio plano (ver Figura G). Esto nos indica que en $z=0$ la función tiene un punto de pegamiento de orden n. Trazando a partir del origen n semirectas con ángulo entre ellas de $2\pi/n$, una segmentación apropiada se obtiene cuando se escoje una bola con radio suficientemente pequeño y se interseca con los interiores de las regiones formadas entre las semirectas.

La siguiente afirmación se usará más adelante:

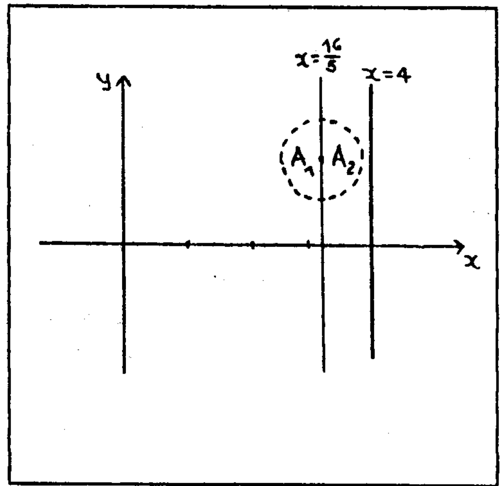


Figura F

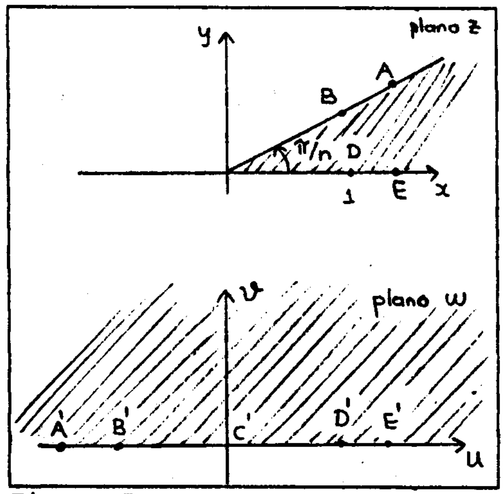


Figura G

Afirmación 8. Sean $f:X\longrightarrow Y$ un homeomorfismo y $g:Y\longrightarrow Z$ con un punto de pegamiento de orden n en f(a); entonces la función compuesta $g\circ f$ tiene un punto de pegamiento de orden n en a.

Demostración: Sea V_a vecindad de a; entonces $f(V_a)$ es vecindad de f(a), y por hipótesis existen $U_{f(a)}$ otra vecindad de f(a) contenida en $f(V_a)$, y una segmentación de $U_{f(a)}$ con n subconjuntos $A_1, A_2,\ldots,A_n$ que satisfacen para g las condiciones de la

Definición 5. Además tenemos que la imagen recíproca bajo f de $U_{f(a)}$ es una vecindad de a contenida en V_a y tal que $f^{-1}(A_1)$, ..., $f^{-1}(A_n)$ forman una segmentación de ella que satisface para $g \circ f$ las condiciones de la definición 5. ■

Veamos ahora dos afirmaciones, en cada una de las cuales se establece una condición necesaria para que una función continua tenga punto de pegamiento en un determinado punto del dominio. Para la Afirmación 9 se debe recordar el concepto de función localmente inyectiva que introdujimos en la Definición 3.

Afirmación 9. Sean X,Y espacios topológicos, $f:X \longrightarrow Y$ continua y $a \in X$. Si f tiene punto de pegamiento en a entonces f no es localmente inyectiva en a.

Demostración: Si f(a) es punto de pegamiento y suponemos que f es localmente inyectiva en a, entonces existe V_a vecindad de a tal que f es inyectiva en V_a; pero por hipótesis existen U_a, una vecindad de a contenida en V_a, y $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, una segmentación de U_a, que satisfacen las condiciones de la defínción 5. Además tenemos los siguientes hechos: para cada i, $int(A_i) \subset cl(A_i) \subset U_a \subset V_a$, $int(A_i) \neq \emptyset$, para cada par $i \neq j$ $int(A_i) \cap int(A_j) = \emptyset$, y $f(int(A_i)) = f(int(A_j))$; todo lo anterior permite concluir que f no es inyectiva en V_a. ■

Nota. Un ejemplo muy simple que muestra que el recíproco de la afirmación 9 no se cumple consiste en tomar en calidad de X un conjunto con al menos dos elementos, dotado de la topología trivial, y $f:X \longrightarrow X$ cualquier función constante. Entonces es fácil ver que f no es localmente inyectiva en ningún punto y que no tiene puntos de pegamiento.

Las afirmaciones 5 y 6 dan condiciones de diferenciabilidad para que en funciones reales los conceptos de punto de pliegue y punto de pegamiento coincidan. Es entonces natural esperar resultados interesantes cuando ponemos en juego la diferenciabilidad en funciones de varias variables. El siguiente resultado se refiere al caso particular de funciones de varias variables continuamente diferenciables, y es consecuencia inmediata de la afirmación 9 y del conocido Teorema de la función inversa ([3], pág.451).

Afirmación 10. Sea $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable. Si f(a) es punto de pegamiento, entonces el determinante jacobiano de f en a es igual a cero. ■

Nuevamente un ejemplo muy simple muestra que el recíproco de la afirmación 10 no se cumple, pues basta tomar la función de variable real $f(x)=x^3$ en el punto $a=0$.

Finalmente, presentamos dos resultados relativos a funciones de variable compleja, en donde todo, como es costumbre, funciona muy bien:

Afirmación 11. Si f es una función del plano complejo en el plano complejo, analítica en z_0 y tal que $f'(z_0)=\ldots=f^{(n-1)}(z_0)=0$ y $f^{(n)}(z_0)\neq 0$ para algún entero positivo $n\geq 2$, entonces f tiene un pegamiento de orden n en z_0.

Demostración: Podemos suponer sin perder generalidad que $z_0=0$ y que $f(z_0)=0$. Como f es analítica en z_0 y z_0 es un cero de orden n, entonces $f(z)=z^n g(z)$ donde g es una función analítica y tal que $g(z)\neq 0$ para todo z en alguna vecindad de 0 ([5],pág.167). Ahora, es claro que $f(z)= (zh(z))^n$, donde

$$h(z)=\exp((\ln g(z))/n).$$

Tal h(z) existe en una vecindad de 0 por ser $g(z)\neq 0$ en dicha vecindad, y además se cumple que la función zh(z) es, en una vecindad de 0, inyectiva, puesto que la derivada de zh(z) es no nula en 0; además, zh(z) es abierta por ser analítica.

Tenemos entonces que f(z) se puede ver en una vecindad de 0 como la compuesta entre una función biyectiva y bicontinua (zh(z)) y la función z^n, que en dicho punto posee un pegamiento de orden n; esto, por la afirmación 8, termina la prueba. ■

La siguiente afirmación es consecuencia inmediata de la anterior:

Afirmación 12. Si f es una función del plano complejo en el plano complejo, analítica en z_0 y localmente inyectiva en z_0, entonces $f'(z_0)\neq 0$. ∎

Este resultado es el recíproco del teorema de la función inversa para funciones analíticas en el plano complejo, y motiva la siguiente

Pregunta: ¿Qué condiciones se necesitan para que el recíproco del teorema de la función inversa se cumpla en funciones diferenciables de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$?

REFERENCIAS

1. BARNSLEY M. **Fractals Everywhere.** Academic Press, Inc., 1988.
2. SPIVAK M. **Calculus** (Tomo 2). **Editorial Reverté, Barcelona,** 1975.
3. APOSTOL T. M. **Análisis Matemático.** Editorial Reverté, Barcelona, 1981.
4. SPIEGEL M. R. **Variable Compleja.** Serie Schaum, McGraw-Hill, 1983.
5. CHURCHILL R. V., BROWN J. y VERHEY R. **Complex Variables and Applications.** McGraw Hill, 1974.

Reconocimientos:

-Los conceptos y resultados expuestos aquí hacen parte del proyecto de investigación inscrito con el código 7169, CAIF Ciencias, UIS.

- Los autores agradecen al profesor Bernardo Mayorga, por la lectura de los originales y valiosas sugerencias. Asímismo, a los profesores Yu Takeuchi y Jairo Charris, sus ideas claves para la demostración de la Afirmación 11.