Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Volumen 12, Nº 1, enero-junio 1994

ESTRUCTURA GALILEANA DEL ESPACIO-TIEMPO

GUILLERMO A. GONZÁLEZ V.*

RESUMEN Se presentan algunos aspectos de la estructura del espacio-tiempo implícita en la formulación Newtoniana de las teorías físicas, identificando los elementos necesarios para la definición de sistemas de referencia, distancia espacial e intervalos de tiempo, así como el procedimiento para relacionar las observaciones realizadas en diferentes sistemas de referencia.

1. INTRODUCCIÓN

Toda teoría física presupone un modelo matemático o *estructura* para el espacio–tiempo, en la cual las propiedades de éste se representan mediante entidades matemáticas claramente definidas. Dicha estructura constituye una caracterización del espacio–tiempo como un determinado espacio matemático, dotado de los elementos necesarios para definir las entidades básicas para la construcción de una teoría física: sistemas de referencia, distancias espaciales e intervalos de tiempo, así como también

*Departamento de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

un procedimiento riguroso para relacionar las observaciones realizadas en diferentes sistemas de referencia.

En las teorías clásicas de la física, anteriores a la formulación de la teoría especial de la relatividad, no se habla de estructura del espacio–tiempo. Esta se supone implícita en el desarrollo de su formulación matemática; sin embargo, con el advenimiento de las teorías especial y general de la relatividad, se hizo evidente la necesidad de expresar de manera explícita dicha estructura como punto de partida para una formulación matemática consistente y completa de cualquier teoría física. El propósito de este trabajo es identificar algunos de los aspectos de la estructura matemática del espacio–tiempo implícitos en la formulación Newtoniana de la mecánica, la *estructura Galileana del espacio-tiempo*, mostrando cómo la aplicación de métodos y conceptos desarrollados dentro del formalismo de las teorías especial y general de la relatividad pueden emplearse en teorías clásicas para caracterizar la naturaleza del espacio–tiempo de tal manera que sirva de base para comprender los cambios que dichas teorías relativistas exigen en su estructura matemática.

2. El Espacio–Tiempo Galileano

La concepción del espacio–tiempo en la física Newtoniana se basa en la suposición de la existencia separada e independiente del *espacio* y del *tiempo*, asumiendo que el *espacio* es un espacio euclidiano tridimensional y que el *tiempo* es un espacio euclidiano unidimensional. De acuerdo con lo anterior, el espacio–tiempo puede considerarse como un espacio afín tetradimensional M, cuyos puntos se denominan *sucesos*[1], de tal manera que la existencia del *tiempo absoluto* T permite hablar de la *simultaneidad* de dos sucesos que ocurran en diferentes lugares del espacio[2], definiendo consecuentemente una proyección $\pi : M \to T$.

La proyección π permite definir un *intervalo de tiempo* entre dos sucesos a y b mediante la relación

$$t(a,b) = \pi(b) - \pi(a), \tag{1}$$

de tal manera que dos sucesos a y b son simultáneos cuando $t(a,b) = 0$. El conjunto de todos los sucesos simultáneos con un suceso dado constituye un subespacio afín tridimensional de M, denominado *espacio de sucesos simultáneos* M_t. La *distancia* entre sucesos simultáneos se define como

$$\rho(a,b) = \|a-b\| = \sqrt{< a-b, a-b >}\,, \tag{2}$$

donde $< a,b >$ es un producto escalar euclidiano sobre $\mathbb{R}^3$. Esta distancia convierte a todo espacio de sucesos simultáneos M_t en un espacio euclidiano de dimensión 3.

De acuerdo con esta estructura del espacio–tiempo, tiene sentido hablar de la simultaneidad de dos sucesos que ocurran en diferentes lugares del espacio, pero carece de sentido considerar que dos sucesos no simultáneos a y b ocurren en el mismo lugar del espacio, en tanto no se defina un sistema de coordenadas en el espacio–tiempo que permita especificar la posición en el espacio de un determinado suceso de M.

3. Sistemas de Coordenadas y Sistemas de Referencia

Un *sistema de coordenadas*[3,4] sobre el espacio–tiempo M es un homeomorfismo $\varphi : M \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ definido como

$$\varphi(a) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \ , \tag{3}$$

donde el espacio coordenado $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ está dotado de los siguientes elementos:

(i) Intervalo de tiempo entre dos sucesos:

$$dt = dx^0 \ ; \tag{4}$$

(ii) Distancia espacial entre sucesos simultáneos ($dt = 0$):

$$d\rho^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \ ; \tag{5}$$

(iii) *Intervalo espacio–temporal* en $\mathbb{R}^4$:

$$ds^2 = dt^2 + d\rho^2 = \delta_{ij}\, dx^i dx^j \ , \tag{6}$$

en donde i,j = 0,1,2,3 y hemos empleado el convenio de Einstein de sumatoria sobre los índices repetidos.

Podemos, sin embargo, considerar otro sistema de coordenadas φ' en reposo con respecto al sistema original φ. Una partícula en movimiento con velocidad $\mathbf{v}$ y aceleración $\mathbf{a}$ con respecto al sistema de coordenadas φ tendrá la misma velocidad $\mathbf{v}$ y la misma aceleración $\mathbf{a}$ con respecto al sistema de coordenadas φ', aun cuando sus coordenadas en cada sistema sean diferentes.

Definición 1.. El conjunto de todos los sistemas de coordenadas en reposo con respecto a un sistema de coordenadas determinado se denomina *Sistema de Referencia.*

Definición 2.. Un sistema de referencia en el cual una partícula libre, aislada de toda interacción, describe un movimiento rectilíneo uniforme, se denomina *Sistema de Referencia Inercial.*

Evidentemente, cualquier sistema de coordenadas en un sistema de referencia es equivalente a otro para la descripción del movimiento de una partícula, pues su velocidad y su aceleración serán iguales en todos los sistemas de coordenadas de dicho sistema de referencia; igualmente, es obvio que todos los sistemas de referencia en movimiento rectilíneo uniforme con respecto a un sistema de referencia inercial determinado son igualmente sistemas de referencia inerciales.

Principio de Relatividad de Galileo. *Todas las leyes de la mecánica, en todos los instantes de tiempo, son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales.*

De acuerdo con el principio de relatividad de Galileo, todas las leyes de la mecánica toman la misma forma, independientemente del sistema de referencia inercial escogido para su formulación; por lo tanto, podemos considerar que dicho principio es una afirmación de que las leyes de la mecánica mantienen su forma bajo aquellas transformaciones de coordenadas que llevan de un sistema de referencia inercial a otro, preservando la estructura Galileana del espacio–tiempo.

4. Transformaciones de Galileo

Una transformación de coordenadas arbitraria es una aplicación suave $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ denotada por

$$x^i \mapsto \bar{x}^i(x^0, x^1, x^2, x^3), \tag{7}$$

donde $i = 0, 1, 2, 3$. Puesto que dicha transformación debe preservar la estructura Galileana del espacio–tiempo, es necesario que $\bar{x}^i$ preserve el intervalo espacio–temporal en $\mathbb{R}^4$, esto es [5],

$$\delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \delta_{kl} dx^k dx^l \ , \qquad i, j, k, l = 0, 1, 2, 3. \tag{8}$$

Dado que $d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} dx^k$, de la expresión anterior se tiene que

$$\delta_{ij} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^l} = \delta_{kl} \ . \tag{9}$$

Para encontrar la forma general de $\bar{x}^i$ debemos resolver este sistema de ecuaciones diferenciales; para ello, derivamos la expresión anterior con respecto a x^m, obteneniendo

$$\delta_{ij}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^m\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}+\delta_{ij}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial^2\bar{x}^j}{\partial x^m\partial x^k}=0\ . \tag{10}$$

Para despejar las segundas derivadas, sumamos a esta última expresión la misma, pero intercambiando k y m, y luego restamos la misma expresión intercambiando l y m, obteniéndose

$$2\delta_{ij}\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^m\partial x^k}\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}=0\ ; \tag{11}$$

pero tanto δ_{ij} como $\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^l}$ son matrices no–singulares, de modo que

$$\frac{\partial^2\bar{x}^i}{\partial x^m\partial x^k}=0\ . \tag{12}$$

Dado que esta ecuación debe cumplirse para todo valor de i, k y m, se tiene que

$$\bar{x}^i=A^i_k x^k+a^i\ , \tag{13}$$

donde A^i_k y a^i son constantes. Para preservar la estructura galileana del espacio–tiempo esta transformación debe satisfacer además las siguientes condiciones:

(i) $d\bar{t}=dt$;

(ii) $d\bar{\rho}^2=d\rho^2$, cuando $dt=0$.

La condición (i) implica que

$$A^0_0=1\ ,\ A^0_1=A^0_2=A^0_3=0\ , \tag{14}$$

mientras que la condición (ii) puede expresarse como

$$\delta_{ab}d\bar{x}^a d\bar{x}^b = \delta_{cd}dx^c dx^d \ , \tag{15}$$

con $a,\ b,\ c,\ d = 1,2,3$; lo cual implica que

$$\delta_{ab}A^a_c A^b_d = \delta_{cd} \ . \tag{16}$$

El resultado anterior significa que los A^a_b, para $a,\ b = 1,2,3$, son los elementos de una transformación ortogonal $\mathbf{O} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$; así , definiendo la matriz $\mathbf{O}$ como $O^a_b = A^a_b$, para $a,\ b = 1,2,3$, la condición anterior puede escribirse como

$$\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I} \ , \quad det\mathbf{O} = 1 \ , \tag{17}$$

donde la condición adicional sobre el determinante es impuesta para eliminar del conjunto de transformaciones las inversiones espaciales, las cuales no preservan la orientación del sistema de coordenadas.

Por último, para determinar completamente la transformación, debemos considerar el paso de un sistema de referencia inercial a otro sistema de referencia inercial en movimiento uniforme con respecto al primero: si una partícula se encuentra en reposo en el sistema de referencia $\{x^i\}$, entonces en el sistema de referencia $\{\bar{x}^i\}$ se moverá con velocidad constante $\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del movimiento relativo de $\{x^i\}$ con respecto a $\{\bar{x}^i\}$.

Así , tendremos que $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$, de modo que

$$d\bar{x}^a = A^a_b dx^b = A^a_o dx^o \; ; \tag{18}$$

por lo tanto, la componente a de la velocidad de la partícula será

$$v^a = \frac{d\bar{x}^a}{dt} = A^a_o \frac{dx^o}{dt} \; , \tag{19}$$

de modo que

$$A^a_o = v^a \; . \tag{20}$$

Las ecuaciones (14), (17) y (20) determinan completamente el conjunto de transformaciones buscadas, las cuales se denominan *Transformaciones de Galileo* y pueden escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} \bar{x}^0 \\ \bar{x}^1 \\ \bar{x}^2 \\ \bar{x}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ v^1 & & & \\ v^2 & & O^a_b & \\ v^3 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} , \tag{21}$$

que a su vez pueden reescribirse en la forma

$$\bar{x}^0 = x^0 + a^0, \tag{22a}$$

$$\bar{x}^a = O^a_b x^b + v^a x^0 + a^a. \tag{22b}$$

Llamando $\tau = a^0$, $d^a = a^a$ y $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$ se obtiene la forma usual de las Transformaciones de Galileo:

$$\bar{t} = t + \tau, \tag{23a}$$

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{O}\mathbf{r} + \mathbf{v}t + \mathbf{d}. \tag{23b}$$

Referencias

1. V. I. Arnold. ***Mathematical Methods of Classical Mechanics.*** Springer–Verlag, 1980.
2. M. Heller. ***Theoretical Foundations of Cosmology.*** World Scientific, 1992.
3. Y. Choquet–Bruhat, C. DeWitt–Morette and M. Dillard–Bleick. ***Analysis, Manifolds and Physics.*** Springer–Verlag, 1978.
4. W. D. Curtis and F. R. Miller. ***Differential Manifolds and Theoretical Physics.*** Academic Press, Inc., 1985.
5. S. Weinberg. ***Gravitation and Cosmology.*** John Wiley and Sons, 1972.