Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 11, No 2, julio–diciembre 1993

CONVERGENCIA DE SUCESIONES RECURRENTES DE PRIMER ORDEN

Yu Takeuchi [1]

1 Introducción

Es bastante común encontrarse con sucesiones (X_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$) que satisfacen fórmulas de recurrencia del tipo

$$X_{n+1} = f(X_n), \quad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

donde la función f que relaciona X_{n+1} con X_n no depende directamente de n. Por ejemplo:

((1)) $X_{n+1} = a.X_n \pm b$, con $a > 0$, y $b > 0$;

((2)) $X_{n+1} = \sqrt{b \pm a.X_n}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

((3)) $X_{n+1} = a + \frac{b}{X_n}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

((4)) $X_{n+1} = a.(X_n)^2 \pm b$ $(a > 0,\ b > 0)$;

((5)) $X_{n+1} = a.\sqrt{1 \pm (X_n)^2}$ $(0 < a < 1)$;

((6)) $X_{n+1} = \log(X_n + a)$ $(a > 1)$;

((7)) $X_{n+1} = a.X_n + \frac{b}{X_n}$ $(a > 0,\ b > 0)$;

((8)) $3X_{n+1} = 2 + (X_n)^3$;

((9)) $X_{n+1} = a.tan^{-1}X_n$ $(a > 0)$;

((10)) $X_{n+1} = a.e^{\pm bX_n}$ $(a > 0,\ b > 0)$.

[1] Profesor Titular, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Para investigar el comportamiento de la sucesión dada por una fórmula de recurrencia (la convergencia o divergencia, la monotonía , la oscilación, etc.), se necesita siempre una cierta habilidad personal difícil de transmitir a otras personas; por esta razón se cree que resolver problemas de sucesiones es *una obra de arte.* Por ejemplo, en el caso de las sucesiones dadas por las fórmulas ((1))–((10)), el método de estudio varía para cada caso, y para cada fórmula la situación de la sucesión no sólo depende de los valores de X_1, sino también de las constantes positivas a, b incluidas en la fórmula; además, para las fórmulas ((2)),((4)) y ((10)) el tratamiento válido para el caso "+" no sirve para el caso "−".

Hace algunos años, un estudiante me preguntó si convergía la sucesión (X_n) dada por

$$X_{n+1} = \frac{X_n}{2} + \frac{b}{X_n} \quad (b > 0, \text{un caso particular de } ((7))). \qquad (a)$$

Tuve que trabajar mucho para dar la siguiente respuesta: ante todo, obsérvese que si $X_1 = \sqrt{2b}$ entonces

$$X_2 = \frac{\sqrt{2b}}{2} + \frac{b}{\sqrt{2b}} = \sqrt{2b},$$

y por consiguiente la sucesión será constante e igual a $\sqrt{2b}$.

Sea, pues, $X_1 \neq \sqrt{2b}$ y $X_1 > 0$. Multiplicando cada miembro de la igualdad (a) por $2X_n$ obtenemos

$$2X_nX_{n+1} = (X_n)^2 + 2b \;;$$

de aquí, restando a cada miembro $2\sqrt{2b}X_n$, resulta

$$2X_nX_{n+1} - 2\sqrt{2b}X_n = (X_n)^2 + 2b - 2\sqrt{2b}X_n,$$

o sea

$$2X_n(X_{n+1} - \sqrt{2b}) = (X_n - \sqrt{2b})^2 > 0. \qquad (b)$$

Por lo tanto,

$$X_{n+1} - \sqrt{2b} > 0 \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots,$$

o, lo que es lo mismo

$$X_n > \sqrt{2b} \qquad \text{para } n \geq 2.$$

En consecuencia, si $n \geq 2$

$$\frac{X_n+\sqrt{2b}}{X_n-\sqrt{2b}} = 1+\frac{2\sqrt{2b}}{X_n-\sqrt{2b}} > 1,$$

y a partir de (b) obtenemos

$$\begin{aligned}
0 < X_{n+1}-\sqrt{2b} &= \frac{(X_n-\sqrt{2b})^2}{2X_n} \\
&= \frac{(X_n-\sqrt{2b})^2}{X_n+\sqrt{2b}+X_n-\sqrt{2b}} \\
&= \frac{(X_n-\sqrt{2b})^2}{(X_n-\sqrt{2b})\left(1+\frac{X_n+\sqrt{2b}}{X_n-\sqrt{2b}}\right)} \\
&= \frac{X_n-\sqrt{2b}}{1+\frac{X_n+\sqrt{2b}}{X_n-\sqrt{2b}}} \\
&< \frac{X_n-\sqrt{2b}}{1+1},
\end{aligned}$$

es decir,

$$0 < X_{n+1}-\sqrt{2b} < \frac{1}{2}(X_n-\sqrt{2b}) \quad \text{para } n \geq 2. \qquad (c)$$

De aquí

$$0 < X_{n+1}-\sqrt{2b} < \frac{1}{2}\left(X_n-\sqrt{2b}\right) < \frac{1}{4}\left(X_{n-1}-\sqrt{2b}\right) < \cdots < \frac{1}{2^{n-1}}\left(X_2-\sqrt{2b}\right),$$

y por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \sqrt{2b}.$$

Es claro que si $X_1 < 0$ la sucesión generada por la fórmula (a) contendrá los mismos elementos de la anterior pero con signo negativo, así que será convergente a $-\sqrt{2b}$.■
La solución anterior es muy bonita, pero no es fácil de encontrar aun para personas acostumbradas al manejo de sucesiones.
El objeto de la presente nota es el de establecer los criterios generales para observar *el comportamiento de las sucesiones* dadas por la fórmula de recurrencia(1) como una aplicación del cálculo elemental, para que los estudiantes puedan resolver fácilmente los problemas de sucesiones *en forma mecánica*,

situación similar al caso de los problemas de máximos y mínimos. En realidad los problemas de máximos y mínimos son sumamente difíciles sin el uso del cálculo, pero hoy en día se convierten en simples ejercicios mecánicos en el curso del cálculo elemental. Espero que en el futuro los problemas de sucesiones también sean incluidos en todos los cursos elementales de cálculo diferencial como aplicaciones fáciles y bonitas del mismo.

2 Expresiones interpretadas por las sucesiones del tipo ((1)).

Las expresiones intuitivas con puntos suspensivos $\cdots$ son interpretadas comúnmente por sucesiones dadas por las fórmulas de recurrencia (1), y su valor numérico será el límite de la sucesión en caso de que éste exista.

(i) $\sqrt{b-\sqrt{b-\sqrt{b-\sqrt{b-\cdots}}}}$. Consideremos X_n dado por

$$X_n = \sqrt{b-\sqrt{b-\sqrt{b-\cdots-\sqrt{b}}}} \qquad (n \text{ veces } b);$$

entonces se tiene que

$$X_{n+1} = \sqrt{b-X_n}, \quad X_1 = \sqrt{b}. \qquad (\text{tipo } ((2)), \text{ caso "}-\text{"}).$$

El valor de la expresión es el límite de la sucesión (X_n) si éste existe.

(ii)

$$a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdots}}}} \qquad (\text{fración continua}).$$

Sea

$$X_n = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{\ddots + \cfrac{b}{a}}}} \quad (n \text{ veces a});$$

entonces X_n satisface

$$X_{n+1} = a + \frac{b}{X_n} \quad , \quad X_1 = a \qquad (\text{tipo } ((3))).$$

(iii)
$$\log(a+\log(a+\log(a+\cdots))).$$

Sea

$$X_n = \log(a+\log(a+\log(a+\cdots+\log a))) \quad (n \text{ veces a});$$

entonces evidentemente se tiene

$$X_{n+1} = \log(X_n + a), \qquad X_1 = \log a \qquad (\text{tipo } ((6))).$$

(iv)
$$a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}}.$$

Sea

$$X_n = a^{a^{a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}}}} \qquad (n \text{ veces a});$$

entonces se tiene

$$X_{n+1} = a^{X_n}, \quad X_1 = a \qquad (\text{tipo } ((10)), \text{ caso "+"}).$$

(v)
$$3\tanh(3\tanh(3\tanh(3\tanh\cdots))).$$

Sea

$$(X_n) = 3\tanh(3\tanh(3\cdots\tanh(3\tanh 3))) \qquad (n \text{ veces } 3);$$

entonces se obtiene

$$X_{n+1} = 3\tanh X_n, \qquad X_1 = 3.$$

El valor de la expresión está dado por el límite

$$\lim_{n\to\infty} X_n.$$

3 Criterio de convergencia I (Sucesiones Monótonas)

Vamos a estudiar la convergencia o divergencia de la sucesión (X_n) determinada por la fórmula de recurrencia

$$X_{n+1} = f(X_n) \qquad n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{1}$$

donde f como función de variable real es derivable en un intervalo I que satisface la condición

$$f(I) \subseteq I. \tag{2}$$

En consecuencia, si $X_1 \in I$ entonces $X_n \in I$ para todo n.
Si la sucesión (X_n) converge a un límite $L(\in I)$ entonces se debe tener (por la continuidad de la función f) que

$$L = f(L), \tag{3}$$

o sea que L es un *punto fijo* de la función f en I. Por lo tanto, es evidente que la sucesión (X_n) *diverge* si la función f no posee punto fijo en I.
Teorema 1 (*Primer criterio de convergencia*).
Sea L un punto fijo de la función f. Entonces:

(i) Si $f'(L) > 1$ entonces la sucesión (X_n) dada por (1) no converge a L, a excepción del caso trivial $X_1 = L$.

(ii) Si $0 < f'(x) < 1$ entonces la sucesión (X_n)converge [2] a L en una vecindad de L.

Demostración:

(i) Si $f'(L) > 1$, entonces en una vecindad de L se tiene que

$$f(x) < x \qquad \text{si } x < L, \tag{4}$$

$$f(x) > x \qquad \text{si } x > L. \tag{5}$$

En consecuencia, para X_n cercano a L, tenemos:

$$X_{n+1} = f(X_n) \begin{cases} < X_n & \text{si} X_n < L, \\ > X_n & \text{si} X_n > L; \end{cases}$$

por lo tanto los términos de la sucesión (X_n) se alejan del punto L, esto es, la sucesión (X_n) no converge a L.

[2]Decimos que $(X_n) \longrightarrow L$ en una vecindad de L, si $(X_n) \longrightarrow L$ cuando X_1 pertenece a cierta vecindad de L.

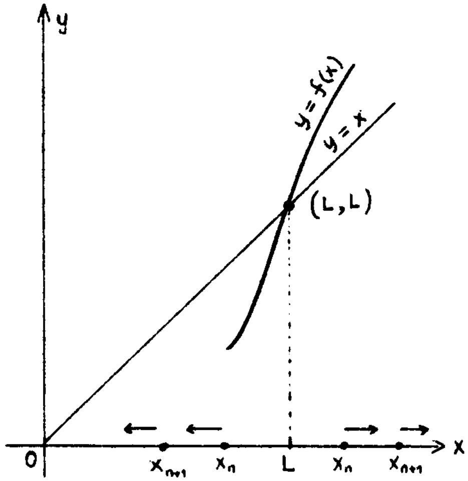


Fig. 1

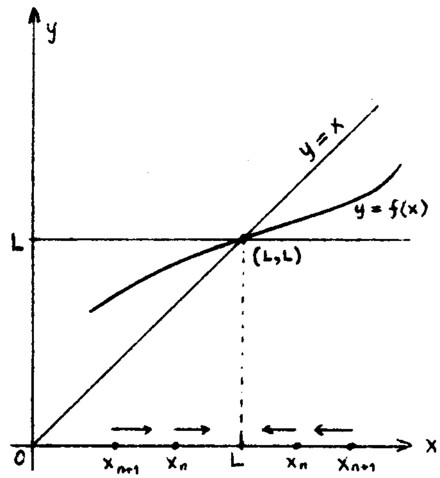


Fig. 2

(ii) Supongamos ahora que

$$0 < f'(L) < 1.$$

En una vecindad de L tenemos:

$$L < f(x) < x \quad \text{si } x > L; \tag{6}$$

$$L > f(x) > x \quad \text{si } x < L. \tag{7}$$

Luego

$$\begin{cases} L < X_{n+1} < X_n & \text{si } X_n > L, \\ L > X_{n+1} > X_n & \text{si } X_n < L. \end{cases}$$

Por lo tanto, la sucesión (X_n) es decreciente (creciente) y acotada por L, si X_1 es mayor (menor) que L . Así pues, la sucesión (X_n) converge en una vecindad de L. Como L es el único posible límite de la sucesión en una vecindad de L, entonces se debe tener que

$$(X_n) \longrightarrow L \quad \textbf{monótonamente.}\blacksquare$$

Observación Se obtiene el mismo criterio en caso de que $f'(L) = 0$ ó $f'(L) = 1$, **investigando el comportamiento de la función f en una vecindad de L, ya que los resultados anteriores son consecuencia de (4),(5), (6) y (7).**

(i') *Caso* $f'(L) = 1$.

(a) Si $f(x) < x$ para $x < L$, entonces (X_n) no converge a L cuando $X_1 < L$.

(b) Si $f(x) > x$ para $x > l$, entonces (X_n) no converge a L cuando $X_1 > L$.

(c) Si $f(x) > x$ para $x < L$, entonces (X_n) converge a L cuando $X_1 < L$.

(d) Si $f(x) < x$ para $x > L$, entonces (X_n) converge a L cuando $X_1 > L$.

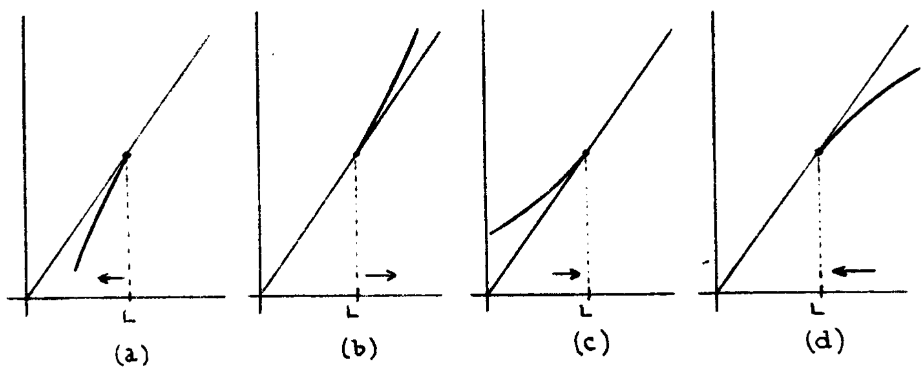


Fig. 3

(ii') *Caso* $f'(L) = 0$.

(a) Si $f(x) < L$ para $x < L$, entonces (X_n) converge a L cuando $X_1 < L$.

(b) Si $f(x) > L$ para $x > L$, entonces (X_n) converga a L cuando $X_1 > L$.

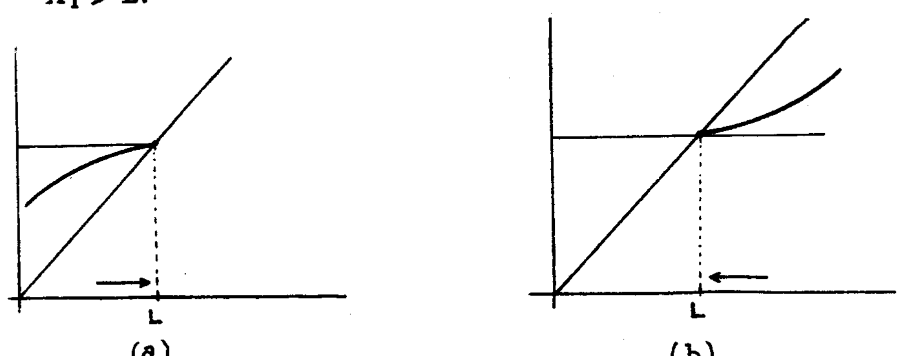


Fig. 4

Corolario 1. Sea L un punto fijo de la función f. Si $f(x)$ toma un mínimo local (o máximo local) en L, entonces

$$X_n \longrightarrow L$$

en una vecindad de L, monótonamente a partir de X_2.

Demostración Como $f(x)$ tiene un mínimo (o máximo) local en L, entonces

$$f'(L) = 0.$$

Supongamos que $f(x)$ tiene un mínimo local en L (Fig.5(a)); entonces, si $X_1 > L$ se tiene que $X_n \longrightarrow L$ en forma decreciente (observación anterior, (ii'), (b)). Si $X_1 < L$ entonces

$$X_2 = f(X_1) > L;$$

por lo tanto la sucesión (X_n) tiende al límite L, en forma decreciente a partir del segundo término X_2.

De la misma forma, en caso de que $f(x)$ tome un máximo local en L (Fig.5(b)), entonces tenemos que (X_n) tiende al límite L en forma creciente si $X_1 < L$, y (X_n) tiende al límite L en forma creciente a partir del segundo término X_2 si $X_1 > L$.

Nótese que si $f(L)$ es el mínimo (o máximo) *absoluto* en el intervalo I, y f no tiene otro punto fijo en I, entonces:

$$(X_n) \longrightarrow L \quad \text{para cualquier } X_1 \in I. \blacksquare$$

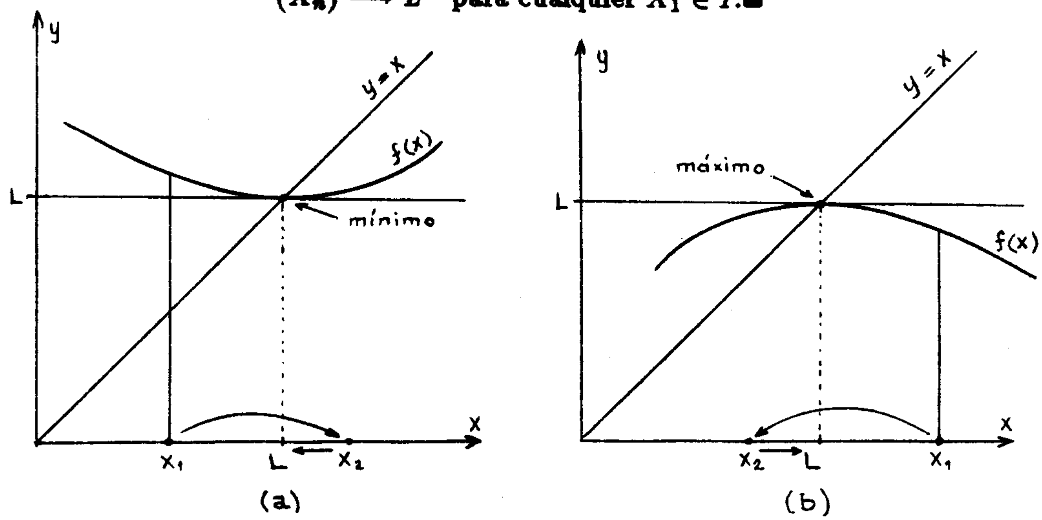


Fig. 5

Corolario 2. Supongamos que L es el único punto fijo de la función f en $I = (-\infty, \infty)$.

(i) Si $f'(L) > 1$, entonces

$$(X_n) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{cuando} X_1 > L, \\ -\infty & \text{cuando} X_1 < L. \end{cases}$$

(ii) Si $0 < f'(L) < L$, entonces

$$(X_n) \longrightarrow L \begin{cases} \text{en forma creciente} & \text{para} X_1 < L, \\ \text{en forma decreciente} & \text{para} X_1 > L. \end{cases} \bullet$$

Corolario 3. Supongamos que f es creciente en $I = (-\infty, \infty)$; si L_1,L_2 ($L_2 < L_1$) son los únicos puntos fijos de la función f, y $f'(L_1) > 1$, entonces

$$(X_n) \longrightarrow +\infty \qquad \text{para } X_1 > L_1,$$

$$(X_n) \longrightarrow L_2 \begin{cases} \text{en forma decreciente} & \text{si } L_2 < X_1 < L_1, \\ \text{en forma creciente} & \text{si } X_1 < L_2. \end{cases} \bullet$$

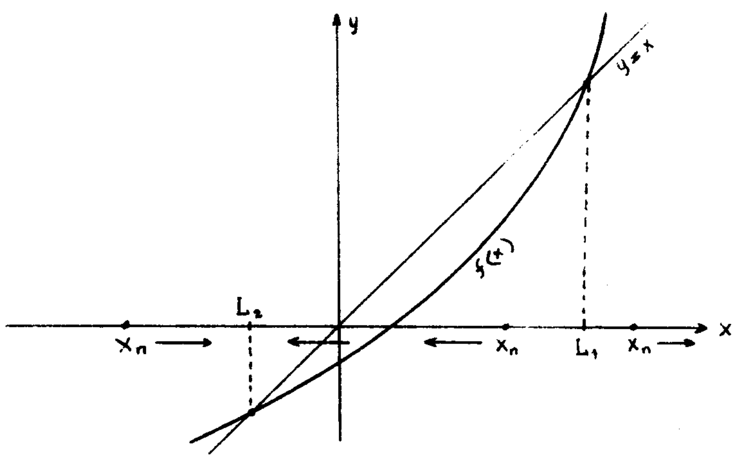


Fig. 6

Ejemplo 1. $X_{n+1} = aX_n + b$ ($a > 0$).
Sea $f(x) = ax + b$; entonces $f'(x) = a$, $L = \frac{b}{1-a}$; luego

(i) Si $a > 1$, entonces

$$(X_n) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{para cualquier valor de } X_1 \neq L,$$

$$(X_n) = (L, L, L, \cdots) \longrightarrow L \qquad \text{para } X_1 = L.$$

(ii) Si $0 < a < 1$, entonces

$$(X_n) \longrightarrow L \quad \text{(monótonamente) para cualquier valor de } X_1. \bullet$$

Ejemplo 2. $X_{n+1} = \sqrt{aX_n + b} \qquad (a > 0,\ b > 0)$.
Obsérvese que $\sqrt{aX_n + b} > 0$; por lo tanto podemos considerar $I = [0, \infty)$.
Sea $f(x) = \sqrt{ax + b}$, entonces $L = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ (único punto fijo en I). Tenemos:

$$f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}} \qquad f'(L) = \frac{a}{2L} = \frac{a}{a + \sqrt{a^2+4b}} < 1.$$

Aplicando el criterio anterior se tiene que

$$(X_n) \longrightarrow L = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+4b}\right) \begin{cases} \text{en forma decreciente} & \text{si } X_1 > L, \\ \text{en forma creciente} & \text{si } X_1 < L. \end{cases} \bullet$$

Ejemplo 3. $X_{n+1} = a(X_n)^2 + b \qquad (a > 0,\ b > 0)$.
Sea $f(x) = ax^2 + b$ en $I = [0, \infty)$. Se observa que *no existe* punto fijo de la función f si $4ab > 1$.
Supongamos ahora que $4ab \le 1$; entonces los puntos fijos de f son:

$$L_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4ab}}{2a}, \qquad L_1 = \frac{1+\sqrt{1-4ab}}{2a} \quad (0 < L_2 \le L_1).$$

Tenemos:

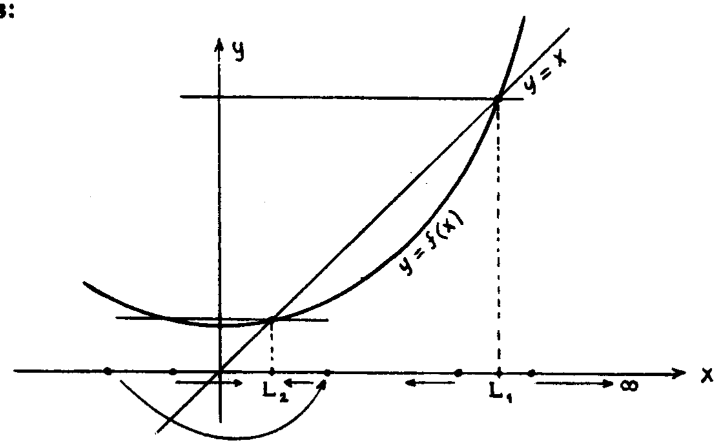


Fig. 7

$$f'(x) = 2ax, \qquad f'(L_2) = 1 - \sqrt{1-4ab}, \qquad f'(L_1) = 1 + \sqrt{1-4ab}.$$

Como $0 < f'(L_2) \leq 1$, $f'(L_1) \geq 1$, entonces aplicando el criterio anterior se tiene que:
$(X_n) \longrightarrow +\infty$ en forma creciente, si $X_1 > L_1$ ó $X_1 < -L_1$;
$(X_n) \longrightarrow L_2$ si $-L_1 < X_1 < L_1$ (monótonamente a partir de algún término);
$(X_n) \longrightarrow L_1$ si $X_1 = L_1$ ó $X_1 = -L_1$ (sucesión constante). •

Ejemplo 4. $X_{n+1} = \log(X_n + a)$ $(a > 1)$.
Primero observemos que si $X_1 \geq 0$, se tiene que $X_n \geq 0$ para todo n. Sea $f(x) = \log(x + a)$ en $[0, \infty)$; entonces $f'(x) = \frac{1}{x+a}$. Como f es cóncava hacia abajo (Fig.8), entonces existe un único punto fijo L en $[0, \infty)$. Tenemos que

$$0 < f'(L) = \frac{1}{L + a} < 1 \quad \text{(puesto que } a > 1);$$

aplicando el criterio anterior se tiene que la sucesión (X_n) converge monótonamente al límite L, donde L es la raíz positiva de la ecuación

$$\log(x + a) = x. \quad \bullet$$

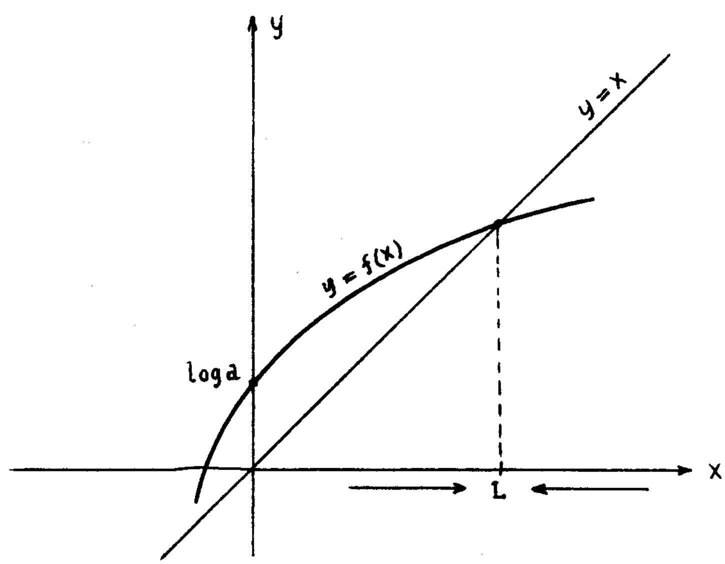


Fig. 8

Ejemplo 5. $X_{n+1} = a.tan^{-1}X_n, \quad a > 1.$
Sea $f(x) = a \cdot \tan^{-1} x$; entonces

$$f'(x) = \frac{a}{x^2+1} > 0 ,$$

luego la función f es creciente; además, $f'(0) = a > 1$.Observando la gráfica de la función f se ve que tiene tres puntos fijos: $-L$, 0, L, donde L es la raíz positiva de la ecuación

$$a \cdot \tan^{-1} x = x.$$

Además, se observa que $f'(-L) < 1$, $f'(0) > 1$, $f'(L) < 1$. Aplicando el criterio anterior se tiene que

$$(X_n) \longrightarrow L \qquad \text{monótonamente si } X_1 > 0,$$

$$(X_n) \longrightarrow -L \qquad \text{monótonamente si } X_1 < 0.$$

No hay sucesión (X_n) que tienda a 0, a excepción del caso trivial: $X_1 = 0$. •

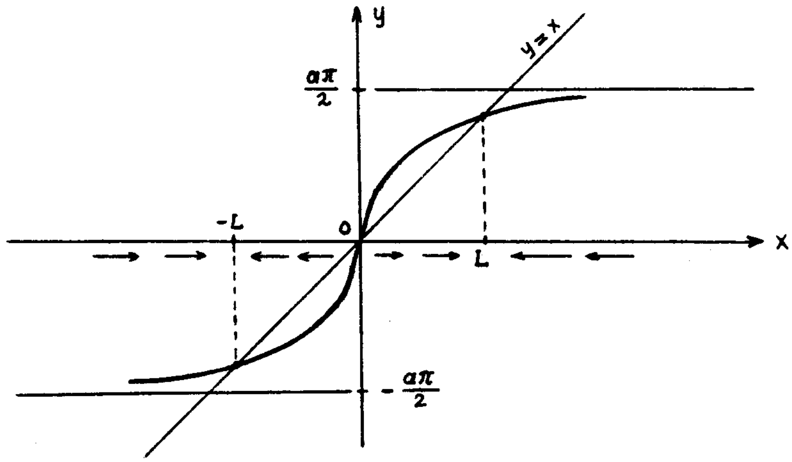


Fig. 9

Ejemplo 6. $X_{n+1} = a.e^{bX_n}$ $(a > 0, b > 0)$.
Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $X_n > 0$ para todo n. Sea

$$f(x) = a \cdot e^{bx} \quad \text{en } [0, \infty).$$

La pendiente de la recta tangente a la curva $y = a \cdot e^{bx}$ que pasa por el origen es abe; por lo tanto, si $abe > 1$ no hay punto fijo de la función f. Supongamos

que $abe < 1$; entonces existen dos puntos fijos L_1 ,L_2 ($L_2 < L_1$) de la función f. (Si $abe = 1$, entonces $L_1 = L_2$). Tenemos:

$$f'(x) = ab \cdot e^{bx}, \qquad f''(x) = ab^2 \cdot e^{bx} > 0;$$

luego la curva $y = f(x)$ es "cóncava hacia arriba"; por lo tanto,

$$0 < f'(L_2) < 1, \qquad f'(L_1) > 1.$$

Aplicando el criterio anterior, se ve que
$(X_n) \longrightarrow +\infty$ monótonamente si $X_1 > L_1$,
$(X_n) \longrightarrow L_2$ monótonamente si $0 < X_1 < L_1$.
Nótese que si $abe = 1$ tenemos
$(X_n) \longrightarrow L_1 = L_2$ si $X_1 < L_1 = L_2$,
$(X_n) \longrightarrow +\infty$ si $X_1 > L_1 = L_2$. ●

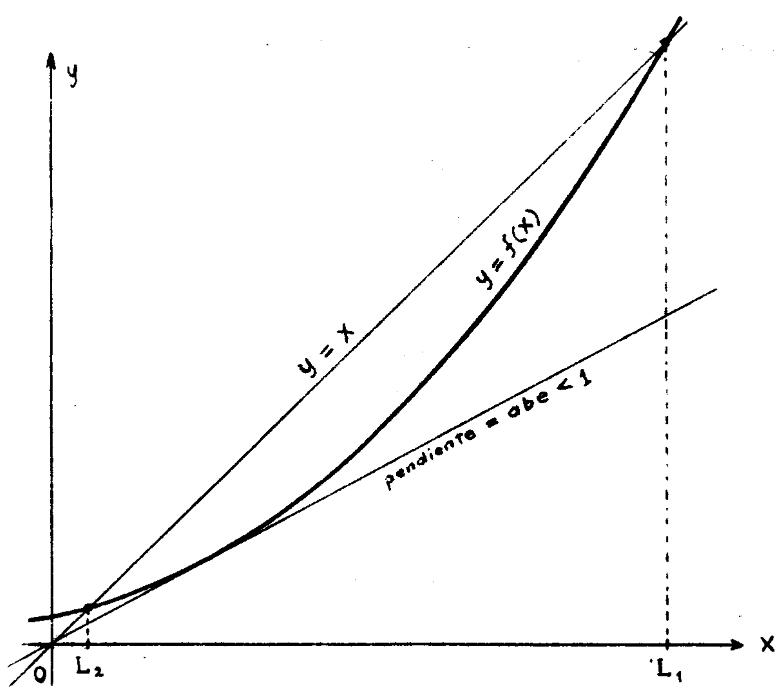


Fig. 10

Ejemplo 7. $3X_{n+1} = 2 + (X_n)^3$.
Sea $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$ en $(-\infty, \infty)$; entonces $f'(x) = x^2$, $f''(x) = 2x$. En la figura 11 se muestra la gráfica de la función f. Si $f(x) = x$ entonces $(x-1)^2(x+2) = 0$, luego la función f tiene dos puntos fijos, -2 y 1. Tenemos

$$f'(-2) = 4 > 1, \quad f'(1) = 1.$$

Aplicando el criterio anterior se tiene que
$(X_n) \longrightarrow +\infty$ monótonamente cuando $X_1 > 1$,
$(X_n) \longrightarrow 1$ monótonamente si $-2 < X_1 < 1$,
$(X_n) \longrightarrow -\infty$ monótonamente si $X_1 < -2$. ●

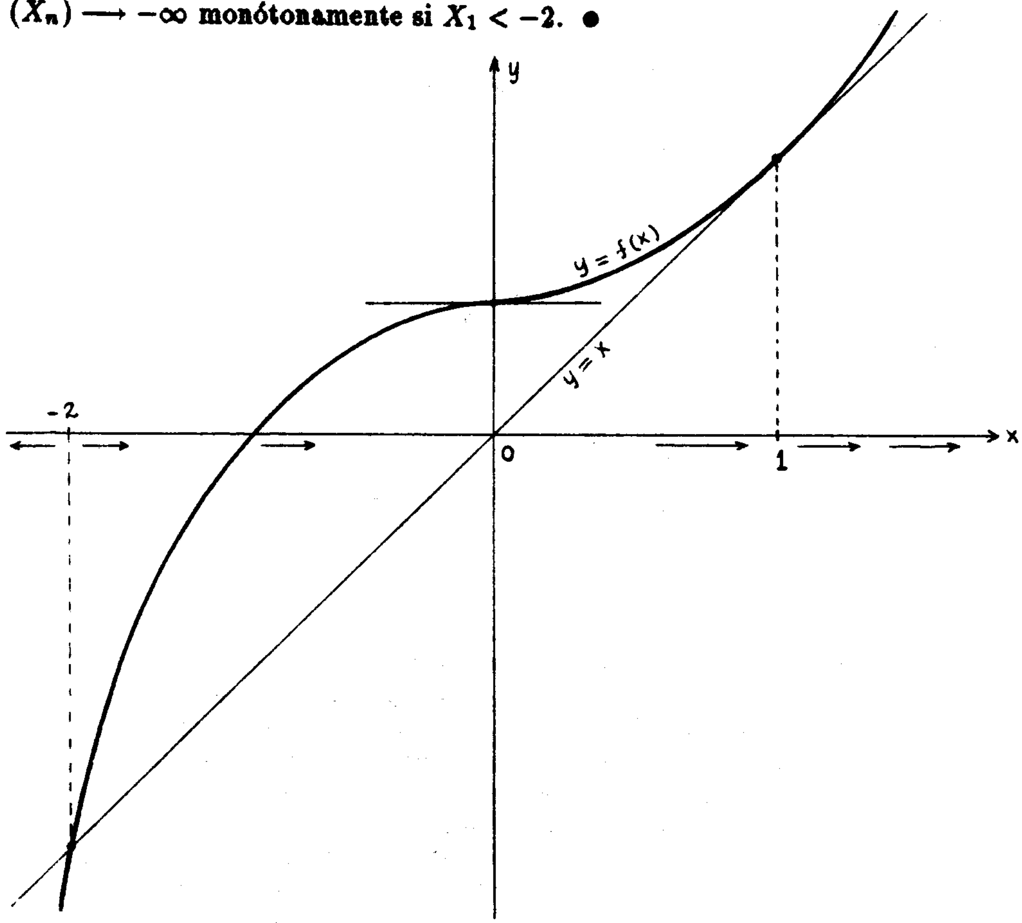


Fig. 11

4 Criterio de Convergencia II (Sucesiones oscilantes)

Sea L un punto fijo de la función f. En el parágrafo anterior hemos estudiado el comportamiento de la sucesión (X_n) dada por la fórmula de recurrencia (1) en una vecindad de L cuando $f'(x) > 0$. Ahora, vamos a estudiar la situación de la suce ión cuando $f'(L) < 0$.
Si $f'(L) < 0$ entonces f es *decreciente* en L; luego

$$f(x) = \begin{cases} < L & \text{si } x > L, \\ > L & \text{si } x < L. \end{cases} \tag{8}$$

Por lo tanto,

$$X_{n+1} = f(X_n) \begin{cases} < L & \text{si } X_n > L, \\ > L & \text{si } X_n < L, \end{cases}$$

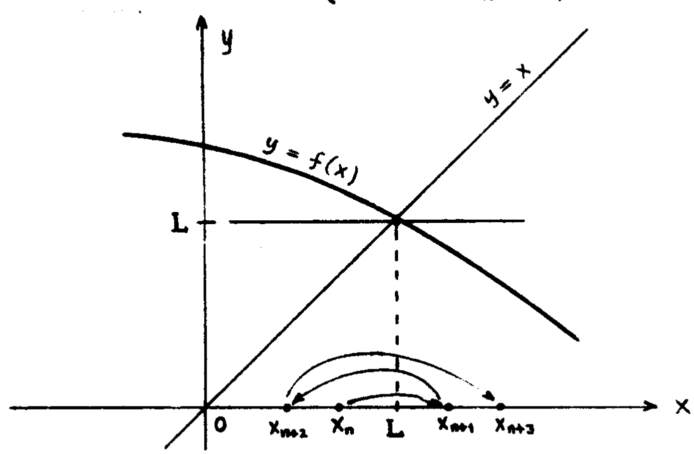


Fig. 12

o sea que la sucesión (X_n) es *oscilante* alrededor del punto fijo L. Si $X_1 < L$ entonces $X_2 > L$, $X_3 < L$, $X_4 > L$, etc.,luego la subsucesión $(X_{2n-1}) = (X_1, X_3, X_5, \ldots)$ está en el lado izquierdo del punto L, y la subsucesión $(X_{2n}) = (X_2, X_4, X_6, \ldots)$ está al otro lado del punto fijo L, o sea que las dos subsucesiones (X_{2n-1}) y (X_{2n}) son acotadas superior e inferiormente por L. De la misma forma, si $X_1 > 1$ entonces las subsucesiones (X_{2n-1}) y (X_{2n}) son acotadas por L, inferior y superiormente. Si ambas subsucesiones convergen a *un límite común*, entonces la sucesión (X_n) converge, y su límite debe ser igual a L, ya que L es el único límite posible de la sucesión. Como las subsucesiones (X_{2n-1}) y (X_{2n}) satisfacen la fórmula de recurrencia

$$X_{n+2} = (fof)(X_n), \tag{9}$$

aplicando el Teorema 1 para el caso de la fórmula (9) tenemos el siguiente criterio de convergencia:

Teorema 2. (Segundo criterio de convergencia).
Supongamos que $f'(L) > 0$.

(i) Si $|f'(L)| > 1$ entonces la sucesión (X_n) *diverge* en forma oscilante, en una vecindad de L.

(ii) Si $|f'(L)| < 1$ entonces la sucesión (X_n) *converge* a L, en forma oscilante en una vecindad de L.

Demostración. Consideremos la función $h = fof$; entonces $h(L) = f(f(L)) = f(L) = L$, esto es, L es un punto fijo de la función h y, en consecuencia,

$$h'(L) = f'(f(L)) \cdot f'(L) = (f'(L))^2.$$

Si $|f'(L)| > 1$, entonces $h'(L) > 1$; aplicando el Teorema 1 se ve que las sucesiones $(X_2, X_4, X_6, \cdots)$ y $(X_1, X_3, X_5, \cdots)$ divergen; por lo tanto, la sucesión (X_n) diverge en forma oscilante alrededor de L. En este caso, la sucesión constante $(L, L, L, \cdots)$ es la única que converge a L.
Si $|f'(L)| < 1$, entonces $0 < h'(L) < 1$, y por el Teorema 1 las dos sucesiones $(X_2, X_4, X_6, \cdots)$ y $(X_1, X_3, X_5, \cdots)$ convergen al límite común L, ya que L es el único límite posible de estas sucesiones en una vecindad de L; por lo tanto, la sucesión (X_n) converge al límite L en forma oscilante alrededor de L. ■
Analicemos ahora en qué vecindad de L converge la sucesión (X_n).
Supongamos que f es decreciente y L es un punto fijo de f con $|f'(L)| < 1$. Evidentemente, L es un punto fijo aislado. Sea p el punto fijo de la función $h = fof$ *más cercano* al punto L, con $p < L$ (Fig.13); si $q = f(p)$, entonces q es el punto fijo de la función $h(x)$ más cercano a L con $q > L$. En efecto:

$$p = h(p) = f(f(p)) = f(q), \qquad h(q) = f(f(q)) = f(p) = q;$$

además, si h tuviera un punto fijo entre L y q, digamos r, entonces $f(r)$ sería un punto fijo de la función h situado entre p y L (por el hecho de que f es decreciente), lo cual sería absurdo.
Si $X_1 \in (p, q)$ entonces $X_n \in (p, q)$ para todo n; por lo tanto se obtiene que

$$\lim_{n \to \infty} X_n = L.$$

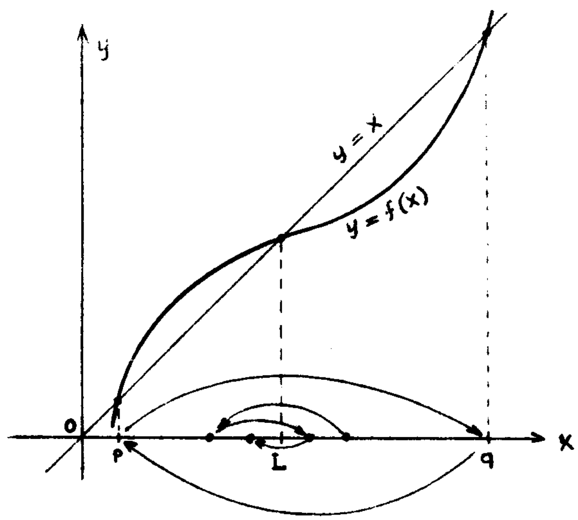


Fig. 13

Evidentemente, si $X_1 = p$, ó $X_1 = q$, entonces $(X_n) = (p, q, p, q, \cdots)$ ó $(X_n) = (q, p, q, p, \cdots)$, luego (X_n) diverge en forma oscilante. ●
Si L es el único punto fijo de la función $h = fof$, entonces

$$(X_n) \longrightarrow L \quad \text{para cualquier valor de } X_1.$$

El análisis anterior nos muestra que los puntos fijos de la función $h = f \circ f$ aparecen en la forma de pareja, $(p, f(p))$, donde $f(p)$ está en el lado opuesto del punto p con respecto a L. Recíprocamente, si dos puntos s, t satisfacen las condiciones

$$s = f(t), \qquad t = f(s),$$

entonces s, t son puntos fijos de la función $h = fof$.
Si L no es el único punto fijo de la función $h = fof$, entonces deben aparecer muchos puntos fijos de la función h, esto es, la curva $y = h(x)$ cortará la recta $y = x$ en muchos puntos; esto implicará la presencia de varios *puntos de inflexión* para la función h. De esta manera, la observación gráfica de la curva $y = h(x)$ nos ayuda a mostrar la unicidad del punto fijo de la función h.(En general, no es fácil resolver la ecuación $h(x) = x$). ●
Observación. Si $|f'(L)| = 1$, según la obervación que sigue al Teorema 1 las dos sucesiones (X_{2n}) y (X_{2n-1}) convergen solamente cuando $h(x) > x$ para $x < L$, y $h(x) < x$ para $x > L$, o sea que la sucesión (X_n) converge al límite L cuando L es un *punto de inflexión* de la función $h = fof$,donde *la concavidad* cambia de "arriba" a "abajo" al pasar por el punto L. ●

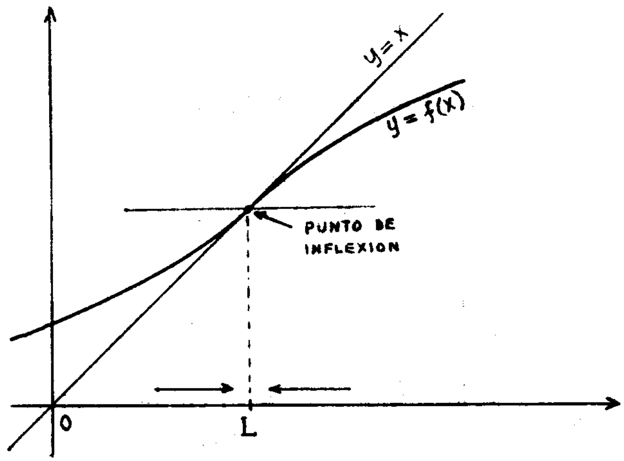


Fig. 14

Ejemplo 8. $X_{n+1} = a\sqrt{1-(X_n)^2}$ $(0 < a < 1)$.
Sea $f(x) = a\sqrt{1-x^2}$ en $I = [0,1]$, entonces $L = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ es único punto fijo de la función f en el intervalo I. Tenemos:

$$f'(x) = -\frac{ax}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad f'(L) = -a^2 < 0.$$

Como $|f'(L)| = a^2 > 1$, entonces la sucesión (X_n) converge al límite L en una vecindad de L.
Sea $h(x) = f(f(x)) = a\sqrt{1-a^2+a^2x^2}$, si $h(x) = x$, $x \in [0,1]$ entonces $x = L = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$, o sea que L es el *único punto* fijo de la función h; por lo tanto,

$$(X_n) \longrightarrow L = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}} \quad \text{para cualquier valor de } X_1 \in [0,1]. \bullet$$

Ejemplo 9. $X_{n+1} = a + \frac{b}{X_n}$ $(a > 0, b > 0)$, $X_1 > 0$.
Sea $f(x) = a + \frac{b}{x}$ en $(0,\infty)$, entonces $L = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+4b}\right)$ es el único punto fijo de la función f en $(0,\infty)$. Tenemos:

$$f'(x) = -\frac{b}{x^2}, \quad f'(L) = -\frac{2b}{a^2+2b+a\sqrt{a^2+4b}} < 0.$$

Como $|f'(L)| = \frac{2b}{a^2+2b+a\sqrt{a^2+2b}}$, entonces la sucesión (X_n) converge en una vecindad del punto L. Sea $h = fof$; entonces,

$$h(x) = a + \frac{bx}{ax+b} = \frac{(a^2+b)x+ab}{ax+b}.$$

Se observa que L es el *único* punto fijo de la función $h(x) = f(f(x))$ en $(0, \infty)$; por lo tanto,

$$(X_n) \longrightarrow L = \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + 4b}\right) \text{ para cualquier valor de } X_1 > 0. \quad \bullet$$

Ejemplo 10. $X_{n+1} = \sqrt{b - aX_n}$ $(a > 0, b > 0, a^2 < b)$.
Para que X_n sea real se debe tener que $X_1 \leq \frac{b}{a}$;en tal caso, $X_2 \leq \sqrt{b} < \frac{b}{a}$. En general, se tiene que

$$X_n \leq \sqrt{b} < \frac{b}{a} \quad \text{para todo } n = 2, 3, 4, \cdots$$

Sea $f(x) = \sqrt{b - ax}$ en $I = [0, \sqrt{b}]$.Si $f(x) = x$, entonces $x^2 + ax - b = 0$, luego $L = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + 4b}\right)$ es único punto fijo de la función f en $I = [0, \sqrt{b}]$.
Tenemos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-a}{2\sqrt{b - ax}}, \\
f'(L) &= \frac{-a}{-a + \sqrt{a^2 + 4b}} < 0, \\
|f'(L)| &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4b} - a} \\
&< \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4a^2} - a} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5} - 1} < 1.
\end{aligned}$$

Sea $h(x) = f(f(x)) = \sqrt{b - a\sqrt{b - ax}}$; si $h(x) = x$, entonces $\sqrt{b - a\sqrt{b - ax}} = x$, luego $(x^2 + ax - b).(x^2 - ax + a^2 - b) = 0$, ecuación que tiene una única solución L en $[0, \sqrt{b}]$. [3] Aplicando el Teorema 2 se tiene que:

$$(X_n) \longrightarrow L = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + 4b}\right)\Big) \quad \text{si } 0 \leq X_1 \leq \tfrac{b}{a}. \quad \bullet$$

[3] La Ecuación $x^2 + ax - b = 0$ posee una única raíz positiva L. Por otra parte, se tiene que $x^2 + ax - b < 0$ en $[0, \sqrt{b}]$. En efecto, la función cuadrática $x^2 - ax + a^2 - b$ es *cóncava hacia arriba*, y ésta toma valores negativos en $x = 0$ y en $x = \sqrt{b}$:

$$0^2 - a \cdot 0 + a^2 - b = a^2 - b < 0, \quad (\sqrt{b})^2 - a\sqrt{b} + a^2 - b = a(a - \sqrt{b}) < 0.$$

Ejemplo 11. $X_{n+1} = a \cdot (X_n)^2 - b$ $(a > 0, b > 0)$.
Sea $f(x) = ax^2 - b$. Los puntos fijos de la función f son

$$L_2 = \frac{1 - \sqrt{4ab+1}}{2a} (< 0), \quad L_1 = \frac{1 + \sqrt{4ab+1}}{2a} (> 0).$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax \\ f'(L_2) &= 1 - \sqrt{4ab+1} < 0, \\ f'(L_1) &= 1 + \sqrt{4ab+1} > 1, \\ |f'(L_2)| &= \sqrt{4ab+1} - 1. \end{aligned}$$

Como $f'(L_1) > 1$, entonces L_1 no es el límite de la sucesión (X_n), a excepción del caso en que (X_n) es constante (por ejemplo, $X_1 = L_1$, ó $X_1 = -L_1$, etc.).

Caso $ab > \frac{3}{4}$.

Tenemos que $|f'(L_2)| = \sqrt{4ab+1} - 1 > 1$; por lo tanto L_2 no es el límite de la sucesión (X_n), a menos que (X_n) sea constante (por ejemplo, $X_1 = L_2$, etc.).

Caso $ab < \frac{3}{4}$.

Tenemos: $|f'(L_2)| = \sqrt{4ab+1} - 1 < 1$.
Sea $h(x) = f(f(x)) = a.(ax^2 - b)^2 - b$; si $h(x) = x$ entonces

$$(ax^2 - x - b) \cdot (a^2x^2 + ax + 1 - ab) = 0,$$

luego $x = L_1$, ó L_2.
Nótese que $(ax)^2 + (ax) + 1 - ab \neq 0$, ya que su discriminante es negativo. Además, $f(0) = -b > -L_1$. Observando la gráfica de la función f (Fig.15) se concluye que

$$\begin{aligned} (X_n) &\longrightarrow L_2 \quad \text{si } X_1 \in (-L_1, L_1), \\ (X_n) &\longrightarrow +\infty \quad \text{si } X_1 < -L_1 \quad \text{ó} \quad X_1 > L_1. \end{aligned}$$

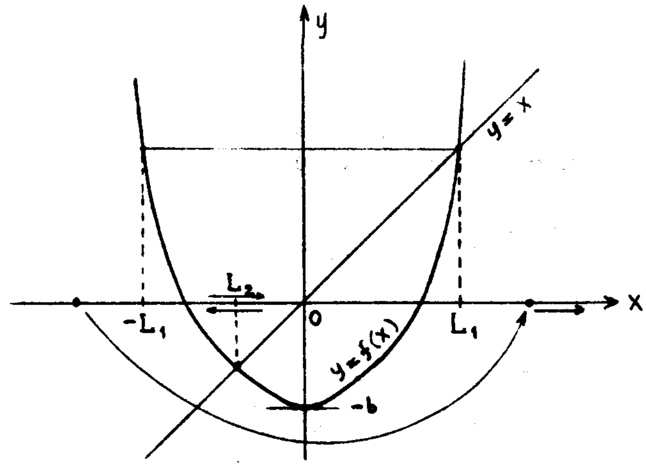


Fig. 15

Caso $ab = \frac{3}{4}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} h(x) - x &= (ax^2 - x - b).(a^2x^2 + ax + 1 - ab) = \\ &= a\cdot(x - L_1)\cdot(x - L_2)\cdot((a^2x^2 + ax + 1 - ab)). \end{aligned}$$

Como $a^2x^2 = ax + 1 - ab \geq 0$ para todo x, entonces $h(x) - x$ es decreciente en L_2, por lo tanto, la sucesión (X_n) converge al límite L_2 en una vecindad de L_2,lo cual conduce a situación exactamente igual al caso de $ab < \frac{3}{4}$.

Nota Existen algunos valores especiales para X_1 para los cuales la sucesión (X_n) es constante de valor L_1,ó L_2 a partir de algún término; en tales casos la sucesión (X_n) converge a L_1 ó L_2, respectivamente. ●

Ejemplo 12. $X_{n+1} = a.X_n + \frac{b}{X_n}$ $(0 < a < 1, 0 < b)$, $X_1 > 0$.

Sea $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ en $I = (0, \infty)$; entonces $L = \sqrt{\frac{b}{1-a}}$ es el único punto fijo de la función f en $(0, \infty)$.

Tenemos:

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2}, \quad f'(L) = 2a - 1.$$

(i) Caso $a > \frac{1}{2}$.

Tenemos $0 < f'(L) < 1$; aplicando el Teorema 1 la sucesión (X_n) converge al límite L, monótonamente.

(ii) Caso $a = \frac{1}{2}$.

Tenemos: $f'(L) = 0$, $f(L) = \frac{2b}{L^3} > 0$; entonces f tiene un mínimo en $x = L$, esto es, $f(x) > L$ para $x \neq L$, luego (X_n) converge al límite L decrecientemente si $X_1 > L$. Si $X_1 < L$, entonces $X_2 > L$, luego (X_n) converge al límite L monótonamente a partir de X_2.

(iii) **Caso** $a < \frac{1}{2}$.

Tenemos: $f'(L) = 2a - 1 < 0$, $|f'(L)| = 1 - 2a < 1$; **aplicando el Teorema 2 sabemos que la sucesión** (X_n) **converge al límite** L **en una vecindad de** L. **Sea**

$$h(x) = f(f(x)) = \frac{x}{ax^2+b}\cdot\left[a.\left(\frac{ax^2+b}{x}\right)^2 + b\right];$$

si $h(x) = x$, **entonces** $((a-1)x^2+b).((a+1)x^2+b) = 0$, **luego** L **es el único punto fijo de la función** h **en** $(0,\infty)$, **por lo tanto**

$$(X_n) \longrightarrow L = \sqrt{\frac{b}{1-a}} \quad \text{para cualquier valor positivo de } X_1. \bullet$$

Ejemplo 13. $X_{n+1} = -\frac{1}{4}\cdot(X_n)^3 + \frac{5}{4}$.

Sea $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{5}{4}$ **en** $(-\infty,\infty)$; **entonces** $f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 \leq 0$ **para todo** x, **luego** f **es decreciente. Por lo tanto, existe un único punto fijo de la función** f. **Como** $f(1) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$, **entonces** $L = 1$ **es el punto fijo de** $f(x)$. **Tenemos:**

$$|f'(L)| = |f'(1)| = \frac{3}{4} < 1;$$

entonces la sucesión (X_n) **converge al límite 1 en una vecindad de 1, en forma oscilante.**

Sea $h(x) = f(f(x))$, **entonces**

$$\begin{array}{lll} h(x) < x & \text{cuando } x & \longrightarrow \ -\infty, \\ h(x) > x & \text{cuando } x & \longrightarrow \ \infty; \end{array}$$

por lo tanto, existen p, q, **con** $p < L < q$, **tales que** $h(p) = p$ **y** $h(q) = q$, **o sea** $f(p) = q$ **y** $f(q) = p$.

Por un cálculo numérico tenemos

$$p = -1.58574\cdots, \quad q = 2.24686\cdots$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(f(x)).f'(x) = \frac{9}{256}.(x^3-5)^2.x^2, \\ h''(x) &= \frac{9}{256}.\left\{2x(x^3-5)^2 + 2.3x^2.x^2.(x^3-5)\right\} = \\ &= \frac{9}{128}\cdot x(x^3-5)(4x^3-5); \end{aligned}$$

luego la ecuación $h''(x) = 0$ tiene exactamente tres soluciones, o sea que la función h tiene tres puntos de inflexión. Por lo tanto, h no puede tener más de tres puntos fijos, esto es, p, q y L son los únicos puntos fijos de la función $h(x) = f(f(x))$. Así,

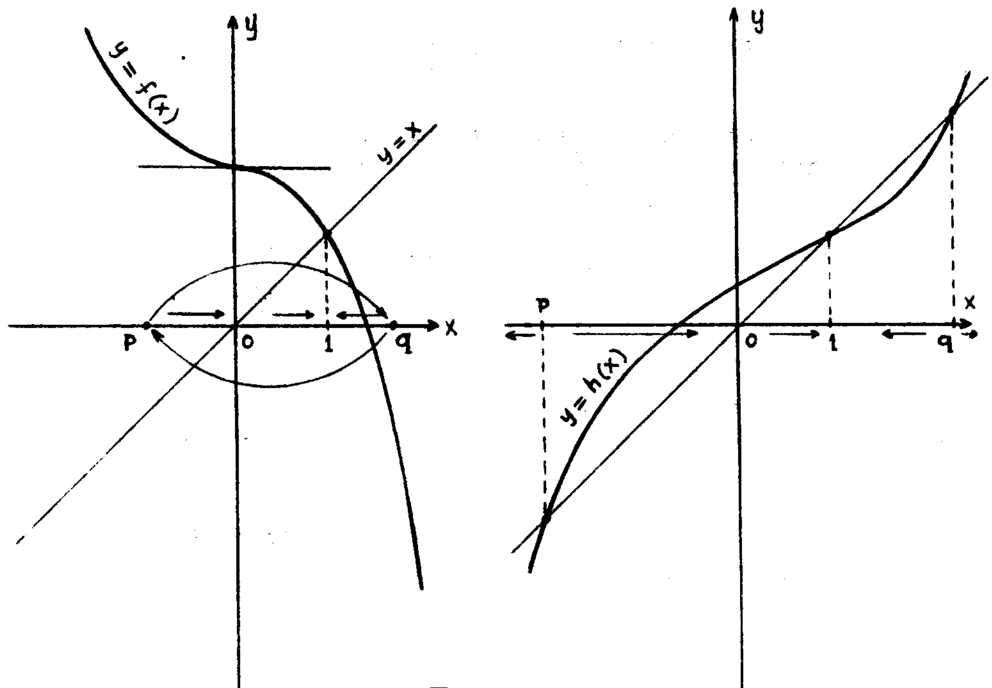


Fig. 16

$$(X_n) \longrightarrow 1 \quad \text{si } p < X_1 < q,$$
$$(X_n) \quad \text{diverge si } X_1 \leq p \quad \text{ó} \quad X_1 \geq q. \quad \bullet$$

Ejemplo 14. (Seidel, 1870).

$$X_{n+1} = a.e^{-bX_n} \quad (a > 0, b > 0), \quad X_1 \geq 0.$$

Sea $f(x) = a \cdot e^{-bx}$ en $I = [0, \infty)$; entonces,

$$f'(x) = -ab \cdot e^{-bx} = -b \cdot f(x) < 0.$$

Como la función f es decreciente en $[0, \infty)$, y $f(x) \longrightarrow 0$ cuando $x \longrightarrow \infty$, entonces existe un único punto fijo $L(> 0)$ de la función, el caul satisface la igualdad

$$a \cdot e^{-bL} = L \quad \text{ó} \quad bL = \log(\frac{a}{L}).$$

Tenemos entonces que

$$f'(L) = -b.f(L) = -bL \quad \text{ó} \quad |f'(L)| = bL,$$

y la sucesión (X_n) será oscilante alrededor del punto L.

(i) Si $bL > 1$, entonces la sucesión (X_n) diverge (salvo el caso trivial: $X_1 = L$).

Nótese que si $bL > 1$ entonces $\log(a/L) > 1$, luego

$$\frac{a}{L}$$

De la misma manera, $bL < 1$ implica $ab < e$, y $bL = 1$ implica $ab = e$; por lo tanto,

$$\begin{array}{lcll} bL & < & 1 & \text{si y sólo si } ab < e, \\ bL & = & 1 & \text{si y sólo si } ab = 1, \\ bL & > & 1 & \text{si y sólo si } ab > e. \end{array}$$

(ii) Si $bL < 1$ (o sea, $ab < e$), por el Teorema 2 se ve que la sucesión (X_n) converge al límite L en una vecindad de L. Sea $h(x) = f(f(x))$; entonces,

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & f'(f(x)).f'(x) = b^2.f(f(x)).f(x) = b^2.h(x).f(x) > 0, \\ h(x) & = & b^2.(h'(x).f(x) + h(x).f'(x)) = b^3.(b.f(x) - 1).h(x).f(x) \\ & = & b^3.h(x).f(x).(abe^{-bx} - 1). \end{array}$$

(a) Si $ab \leq 1$, entonces $h''(x) \leq 0$ para todo x; por lo tanto la función h tiene un sólo punto fijo en $[0, \infty)$ (Fig. 17).

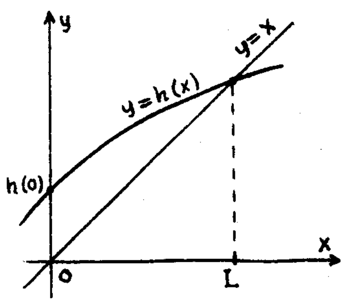
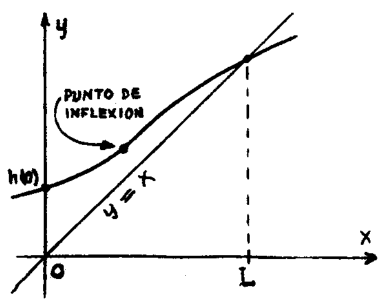


Fig.17

Fig.18



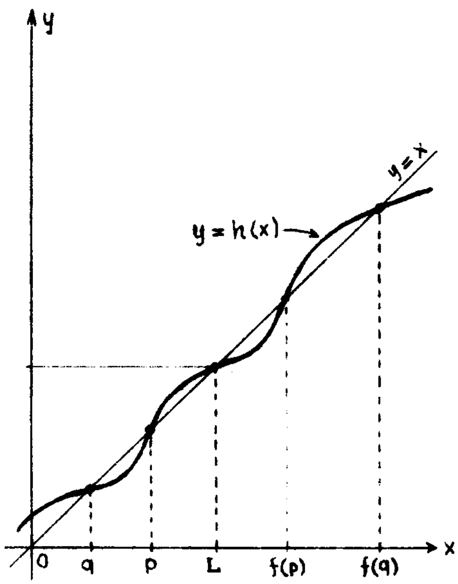


Fig. 19

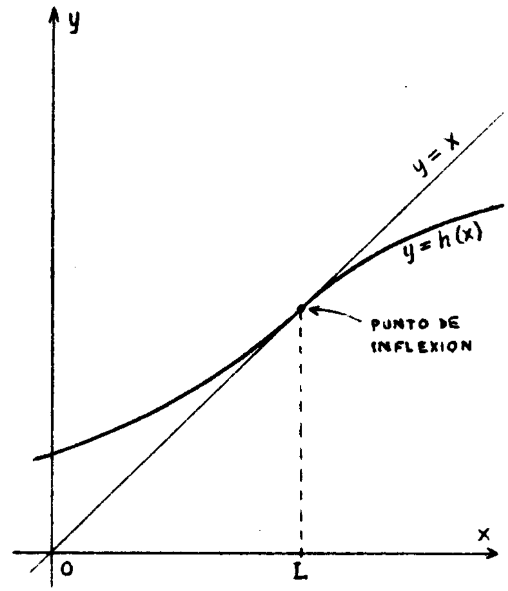


Fig. 20

(b) Si $ab > 1$, la función h posee un solo punto de inflexión, donde la concavidad cambia de arriba a abajo al pasar por este punto. Analizando la gráfica de la función h, se observa que posee un solo punto fijo (Fig. 18) [4]. Por lo tanto, la sucesión (X_n) tiende al límite L para cualquier valor positivo de X_1.

(iii) Si $bL = 1$ (o sea, $ab = e$). Como $ab.e^{-bL} = ab.e^{-1} = 1$, entonces L es el único punto de inflexión de la función h, donde la concavidad cambia de arriba a abajo al pasar por el punto L (Fig.20). Por lo tanto, la sucesión (X_n) tiende al límite L para cualquier valor positivo de X_1.

En resumen: si $ab \leq e$, la sucesión (X_n) converge al límite L, para cualquier valor positivo de X_1, y si $ab > e$, la sucesión diverge en forma oscilante (a excepción del caso trivial $X_1 = L$). ●

[4] Si la función h tuviera más de un punto fijo en $(0, \infty)$, teniendo en cuenta que los puntos fijos ($\neq L$) de h aparecen en parejas en ambos lados de L, la curva $y = h(x)$ debería cortar a la recta $y = x$ en, por lo menos, cinco puntos (Fig.19); en consecuencia la función h debería poseer por lo menos 3 puntos de inflexión, lo cual es absurdo.

5 Problemas locales y problemas globales

Si se trata solamente de los problemas locales de la convergencia o no de la sucesión, uniendo los dos teoremas anteriores obtenemos el siguiente resultado teóricamente más simple:

Teorema 3. (Criterio unificado).

Sea (X_n) la sucesión dada. por la fórmula de recurrencia (1), y supongamos que L es un punto fijo de la función f. Entonces:

(i) Si $|f'(L)| < 1$, entonces la sucesión (X_n) converge al límite L, en una vecindad de L.

(ii) Si $|f'(L)| > 1$, entonces la sucesión no converge al límite L, a excepción del caso trivial en que (X_n) sea constante a partir de algún término. ■

Sin embargo, esto último no sirve para resolver los problemas específicos más comunes, tales como "investigar la convergencia o no de la sucesión (X_n) dada por la fórmula de recurrencia (1), y dado el valor de X_1", ya que la convergencia o no de la sucesión (X_n) en una vecindad de L no ofrece ninguna información acerca del seguimiento de los términos de la sucesión a partir de un X_1, como se observó en los ejemplos anteriores.

Casos Generales. Si la sucesión (X_n) satisface la fórmula de recurrencia

$$X_{n+1} = f_n(X_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

tenemos el siguiente teorema, similar al Teorema 3, cuya demostración está fuera del nivel de la presente nota.

Teorema 4. Sea (X_n) la sucesión dada por:

$$(X_{n+1}) = f_n(X_n), \qquad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

donde las funciones $f_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ son continuas en un conjunto abierto I sobre I. Supongamos que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en una vecindad de $L \in I$, donde L es un punto fijo de la función límite f. Si f es derivable en L, y $|f'(L)| < 1$, entonces existe un conjunto abierto $A(\neq \emptyset)$ tal que

$$(X_n) \longrightarrow L \qquad \text{para } X_1 \in A. \quad \bullet$$

6 Ejercicios Adicionales

Investigar la convergencia o la divergencia de la sucesión (X_n) dada por:

1. $X_{n+1} = a.(X_n)^2 \quad (a > 0)$.

2. $X_{n+1} = a.(X_n)^3 \quad (a > 0)$.

3. $X_{n+1} = \frac{a}{\sqrt{X_n}} \quad (a > 0)$.

4. $X_{n+1} = 2X_n - a.(X_n)^2 \quad (a > 0)$.

5. $X_{n+1} = (X_n)^3 - \frac{3}{2}(X_n)^2$.

6. $X_{n+1} = \frac{a}{X_n+1} \quad (a > 0)$.

7. $X_{n+1} = \frac{aX_n}{\sqrt{X_n+1}} \quad (a > 0)$.

8. $X_{n+1} = \frac{aX_n}{(X_n)^2+b} \quad (0 < b < a)$.

9. $X_{n+1} = a\sqrt{(X_n)^2 + X_n} \quad (0 < a < 1)$.

10. $X_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{X_n+3}}$.

11. $X_{n+1} = \frac{X_n+b}{X_n+a} \quad (0 < b < a)$.

12. $X_{n+1} = (X_n)^{X_n}$.

13. $X_{n+1} = \log({X_n}^2 + b^2) \quad (b > 1)$.

14. $X_{n+1} = -\frac{1}{4}(X_n)^2 + X_n + \frac{1}{4}$.

15. $X_{n+1} = \frac{b}{(X_n)^2+a} \quad (a > 0, b > 0)$. Demostrar: si $2a\sqrt{a} < b$, entonces (X_n) diverge; si $2a\sqrt{a} \geq b$, entonces (X_n) converge para cualquier valor de X_1.