Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Volumen 11, Nº 2, julio-diciembre 1993

Geometría Esférica Paraleletópica *

LUIS ENRIQUE RUIZ **

Abstract. Norms ϕ are constructed on $\mathbb{R}^n$ so that the closed spheres with center at G with respect to ϕ are n-dimensional parallelotopes of center G. Conversely, for each n-dimensional parallelotope $\mathbb{P}$ a norm ϕ on $\mathbb{R}^n$ is constructed to which $\mathbb{P}$ is a closed sphere. In either case ϕ is the maximum of n absolute values; and in this way Chebyshev's norm becomes a particular case of ϕ. The hiper-cube or measure polytope γ_n is defined and characterized as a locus whose points satisfy a condition.

INTRODUCCION. Si $W_1, \ldots, W_n$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ y $P_o \in \mathbb{R}^n$, entonces el conjunto

$$\mathbb{P} = \left\{ P_o + \lambda_1 W_1 + \ldots + \lambda_n W_n \;\middle|\; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \right\}$$

---

* Versión ampliada de la conferencia pronunciada en el VI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística (noviembre 27 a diciembre 1 de 1989, Universidad Distrital "Francisco José de Caldas", Bogotá).

** Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama.

es llamado un paraleletopo n-dimensional generado por $W_1, \ldots, W_n$ ([1], pp.337-338, [2] pp.122-124).

En el Lema 1 se da una familia de normas ϕ sobre R^n, una generalización de la norma de Chébyshev

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, \qquad X = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n,$$

demostrándose en el Teorema 1 que $\mathcal{P}$ de centro G es una esfera cerrada (respecto a una norma ϕ) de centro G, donde se involucra el producto vectorial de n-1 vectores en $\{W_1, \ldots, W_n\}$, como se describe en el Lema 2. Recíprocamente, en el Teorema 2 se demuestra que las esferas cerradas $S_r[G]$, $r > 0$, respecto a la norma ϕ, son paraleletopos de centro G. En el Corolario 1 se describen paraleletopos usando sistemas de n desigualdades en valores absolutos y, en particular, los Corolarios 2 y 3 lo hacen para el ortotopo y el hiper-cubo Υ_n usando propiedades de la ortogonalidad en R^n (Lema 3). Como objetivo final se da (en la Definición 1) una caracterización puntual de Υ_n.

La noción del producto vectorial en R^n ($n \geq 3$) subyace ineludiblemente en la geometría normada del paraleletopo. El vector

$$V_1 \times \ldots \times V_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \det(V_1, \ldots, V_{n-1}, e_i) e_i$$

se denomina el producto vectorial de los vectores $V_1, \ldots, V_{n-1}$ ([3], pp.77-79), donde $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\text{lugar } i}{1}, 0, \ldots, 0)$ son los vectores coordenados unitarios en R^n.

Usaremos frecuentemente las siguientes tres propiedades:

$$V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \cdot V_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n-1;$$

$$V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \cdot V_n = \det(V_1, \ldots, V_n);$$

$$V_1\times\ldots\times cV_k\times\ldots\times V_{n-1} = cV_1\times\ldots\times V_{n-1}, \qquad c\in \mathrm{R}.$$

Todos los resultados expresados en los lemas, teoremas y corolarios del presente trabajo son nuevos.

LEMA 1. *Si $N_1,\ldots,N_n$ son vectores linealmente independientes en R^n, entonces la función $\phi:\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ definida por*

$$\phi(X) = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |N_k\cdot X| , \qquad X\in \mathrm{R}^n \tag{1}$$

es una norma sobre R^n.

Demostración. Las relaciones

$$0 \leqslant |N_k\cdot X| \leqslant \phi(X) = 0 , \qquad k = 1,\ldots,n,$$

son equivalentes al sistema

$$N_k\cdot X = 0, \qquad k = 1,\ldots,n ,$$

con determinante $\det(N_1,\ldots,N_n) \neq 0$ y solución única $X = 0$. La misma definición de ϕ nos da $\phi(\lambda X) = |\lambda|\phi(X)$, $\lambda\in \mathrm{R}$, y

$$|N_k\cdot(X+Y)| = |N_kX + N_kY| \leqslant |N_kX| + |N_kY| \leqslant$$

$$\leqslant \phi(X) + \phi(Y) , \qquad k = 1,\ldots,n,$$

de donde

$$\phi(X+Y) \leqslant \phi(X) + \phi(Y).$$

OBSERVACION 1. *Si* $N_k = e_k = (0,\dots,0,\underset{\text{lugar } k}{1},0,\dots,0)$, $k=1,\dots,n$, *obtenemos en (1)*

$$\phi(X) = \max_{1\leq k\leq n} |x_n| = \|X\|_\infty \ , \qquad X=(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}^n,$$

que es justamente la norma de Chébyshev .

LEMA 2. *Dados* $W_1,\dots,W_n$ *vectores en* R^n, $n \geq 3$, *si*

$$(2) \qquad \begin{cases} N_1 = W_2\times\dots\times W_n \ , \\ N_2 = W_3\times\dots\times W_n\times W_1 \ , \\ \vdots \\ N_{n-1} = W_n\times W_1\times\dots\times W_{n-2} \ , \\ N_n = W_1\times\dots\times W_{n-1} \ , \end{cases}$$

entonces

$$(3) \qquad \begin{cases} N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} e_i, \qquad k = 1,\dots,n, \qquad y \\ \\ \det(N_1,\dots,N_n) = (-1)^{\frac{n}{4}\{1+(-1)^n\}} \det^{n-1}(W_1,\dots,W_n), \end{cases}$$

donde α_{ij} *es el cofactor del* (i,j)*-ésimo elemento del determinante* $\det(W_1,\dots,W_n)$.

Demostración. Si α_{ij} es el cofactor del (i,j)-ésimo elemento de la matriz M cuya i-ésima fila es W_i, $i = 1,\dots,n$, entonces, usando propiedades de los determinantes, tenemos:

$$\det(w_2,\ldots,w_n,e_{i_1}) = (-1)^{n-1}\alpha_{1i_1},$$

$$\det(w_3,\ldots,w_n,w_1,e_{i_2}) = \alpha_{2i_2},$$

$$\vdots$$

$$\det(w_n,w_1,\ldots,w_{n-2},e_{i_{n-1}} = (-1)^{n-1}\alpha_{n-1,i_{n-1}},$$

$$\det(w_1,\ldots,w_{n-1},e_{i_n}) = \alpha_{n,i_n};$$

$$N_1 = (-1)^{n-1}\sum_{i_1=1}^{n}\alpha_{1i_1}e_{i_1},$$

$$N_2 = \sum_{i_2=1}^{n}\alpha_{2i_2}e_{i_2},$$

$$\vdots$$

$$N_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum_{i_{n-1}=1}^{n}\alpha_{n-1,i_{n-1}}e_{i_{n-1}},$$

$$N_n = \sum_{i_n=1}^{n}\alpha_{ni_n}e_{i_n};$$

es decir,

$$N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k}\sum_{i_k=1}^{n}\alpha_{ki_k}e_{i_k}, \qquad k=1,\ldots,n.$$

Por tanto,

$$\det(N_1,\ldots,N_n) = \det\Big((-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}1}\sum_{i_1=1}^{n}\alpha_{1i_1}e_{i_1},(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}2}\sum_{i_2=1}^{n}\alpha_{2i_2}e_{i_2},$$

$$\ldots,(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}(n-1)}\sum_{i_{n-1}=1}^{n}\alpha_{n-1,i_{n-1}},(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}n}\sum_{i_n=1}^{n}\alpha_{ni_n}e_{i_n}\Big)=$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n}(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}1}(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}2}\ldots(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}n} \times$$

$$X\ a_{1i_1}\cdots a_{ni_n}\ \det(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} (-1)^{\frac{1}{8}n(n-1)\{1+(-1)^n\}} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\det(e_{i_1},\ldots,e_{i_n}) =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{4}\{1+(-1)^n\}} \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in S_n} e_{i_1\ldots i_n} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{4}\{1+(-1)^n\}}\det(\operatorname{adj} M) = (-1)^{\frac{n}{4}\{1+(-1)^n\}}\det^{n-1} M\ ,$$

donde $I = \{1,\ldots,n\}$, S_n es el conjunto de todas las permutaciones de los elementos de I, $e_{i_1\ldots i_n} = +1$ ó -1 si la permutación $(i_1,\ldots,i_n)$ es par o impar, y $\operatorname{adj} M$ es la adjunta de la matriz M.

TEOREMA 1. *Si $\mathcal{P}$ es un paraleletopo sólido no-degenerado en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ de centro G generado por los vectores linealmente independientes $W_1,\ldots,W_n$ y, si ϕ es la norma definida en (1), entonces*

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \phi(X-G) \leq \tfrac{1}{2}|\Delta|\} = S_{\frac{1}{2}|\Delta|}[G]$$

es una esfera cerrada respecto a la norma ϕ, de centro G y radio $\frac{1}{2}|\Delta|$, donde N_k está dado por (2) y $\Delta = \det(W_1,\ldots,W_n)$.

Demostración. Si

$$P_o = G - \tfrac{1}{2}(W_1+\ldots+W_n),$$

entonces

$$X \in \mathcal{P} \quad \text{si y sólo si} \quad X \in P_o + \lambda_1 W_1 + \ldots + \lambda_n W_n,$$

donde $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ depende de X, y

$$X - G = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \tfrac{1}{2}) W_j\ .$$

Entonces

$$(X-G)N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_k=1}^{n} (\lambda_j - \tfrac{1}{2}) a_{ki_k} w_j e_{i_k} =$$

$$= (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \{ \sum_{i_k=1}^{n} (\lambda_k - \tfrac{1}{2}) a_{ki_k} w_k e_{i_k} + \sum_{j\in I\sim\{k\}} (\lambda_j - \tfrac{1}{2}) \sum_{i_k=1}^{n} a_{ki_k} w_j e_{i_k} \} =$$

$$= (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} (\lambda_k - \tfrac{1}{2})\Delta \ ,$$

y de $|\lambda_k - \frac{1}{2}| \leqslant \frac{1}{2}$, concluimos

(4) $$|(X-G)N_k| \leqslant \tfrac{1}{2}|\Delta|, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

y

$$\mathcal{P} \subseteq S_{\frac{1}{2}|\Delta|}[G].$$

Recíprocamente, si $X = (x_1,\ldots,x_n)$ satisface (4), $w_j = (w_{j1},\ldots,w_{jn})$ y $G = (g_1,\ldots,g_n)$, entonces el sistema

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \tfrac{1}{2}) w_{ji} = x_i - g_i, \qquad i = 1,\ldots,n,$$

tiene como única solución

$$\lambda_j = \frac{(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}j}}{\Delta} (X-G)N_j + \frac{1}{2} \ , \qquad j = 1,\ldots,n,$$

como puede verificarse usando la expresión (3). Por (4) , $0 \leqslant \lambda_j \leqslant 1$, para concluir que

$$X - G = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \tfrac{1}{2}) w_j$$

y

$$S_{\frac{1}{2}|\Delta|}[G] \subseteq \mathcal{P} \ .$$

TEOREMA 2. *Si ϕ es la norma definida en (1), entonces la esfera cerrada $S_r[G]$ respecto a ϕ, de centro $G \in R^n$ y radio $r > 0$, es un paraleletopo sólido n-dimensional de centro G dado por*

$$S_r[G] = \{P_0+\lambda_1 W_1+\ldots+\lambda_n W_n \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\}$$

y generado por los vectores

$$(5) \quad \begin{cases} W_1 = \frac{2r}{\Delta} N_2\times\ldots\times N_n \;, \\ W_2 = \frac{2r}{\Delta} N_3\times\ldots\times N_n\times N_1 \;, \\ \vdots \\ W_{n-1} = \frac{2r}{\Delta} N_n\, N_1\times\ldots\times N_{n-2} \;, \\ W_n = \frac{2r}{\Delta} N_1\times\ldots\times N_{n-1} \;, \end{cases}$$

donde

$$(6) \quad P_0 = G-\frac{1}{2}(W_1+\ldots+W_n)$$

y

$$\Delta = \det(N_1,\ldots,N_n).$$

Demostración. Sean $W_1,\ldots,W_n$ y P_0 como en (5) y (6),

$$W_j = (w_{j1},\ldots,w_{jn}), \quad N_j = (n_{j1},\ldots,n_{jn})$$

y α_{ij} el cofactor del (i,j)-ésimo elemento en el determinante $\Delta = \det(N_1,\ldots,N_n)$. Entonces de la expresión (3) del Lema 2 ,

$$w_{ji} = \frac{2r}{\Delta}(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}j}\alpha_{ji}, \qquad i,j = 1,\ldots,n .$$

Si X satisface

$$|(X-G)N_j| \leq r , \qquad j=1,\ldots,n,$$

y si

$$\lambda_j = \frac{1}{2r}(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}j}(X-G)N_j + \frac{1}{2} , \qquad j=1,\ldots,n ,$$

entonces

$$|\lambda_j - \tfrac{1}{2}| \leq \tfrac{1}{2} , \qquad j=1,\ldots,n,$$

y

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\tfrac{1}{2})w_{ij} = \frac{1}{\Delta}(X-G)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ji}n_{jk}e_k =$$

$$= \frac{1}{\Delta}(X-G)\{(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}n_{ji})e_i + \sum_{k\in I\sim\{i\}}(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}n_{jk})e_k\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}(X-G)\Delta e_i = x_i - g_i , \qquad i\in I=\{1,\ldots,n\},$$

es decir,

$$X-G = \sum_{j=1}^{n}(\lambda_j-\tfrac{1}{2})w_j ,$$

o, bien en términos de (6),

$$X = P_0 + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n .$$

Esto significa que $S_r[G]$ está contenida en el paraleletopo

$$\mathcal{P} = \{P_0 + \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\};$$

además, por el Lema 2

$$\det(w_1,\ldots,w_n) = \frac{2^n r^n}{\Delta}(-1)^{n/4\{1+(-1)^n\}} \neq 0 ,$$

y $\dim \mathcal{P} = n$. Recíprocamente si $X \in \mathcal{P}$ entonces

$$(X-G)N_j = 2r(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}j}(\lambda_j - \tfrac{1}{2}), \qquad j=1,\ldots,n,$$

y

$$|(X-G)N_j| = 2r|\lambda_j - \tfrac{1}{2}| \leq r , \qquad j = 1,\ldots,n .$$

Por tanto $\phi(X-G) \leq r$ y $\mathcal{P} \subseteq S_r[G]$.

COROLARIO 1. *Dados* $G \in R^n$ *y* $N_1,\ldots,N_n$ *vectores linealmente independientes en* R^n, *si* $c_1 > 0,\ldots,c_n > 0$ *entonces*

$$\mathcal{P} = \{X \in R^n \mid |(X-G)N_k| \leq c_k, \ k = 1,\ldots,n\} =$$

$$= \{P_o + \lambda_1 W_1 + \ldots + \lambda_n W_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$$

es un paraleletopo sólido n-dimensional de centro G generado por los vectores

$$(7) \qquad \begin{cases} W_1 = \dfrac{2c_1}{\Delta} N_2 \times \ldots\ldots \times N_n , \\ W_2 = \dfrac{2c_2}{\Delta} N_3 \times \ldots\ldots \times N_n \times N_1 , \\ \vdots \\ W_{n-1} = \dfrac{2c_{n-1}}{\Delta} N_n \times N_1 \times \ldots \times N_{n-2} , \\ W_n = \dfrac{2c_n}{\Delta} N_1 \times \ldots\ldots \times N_{n-1} , \end{cases}$$

donde

$$(8) \qquad P_o = G - \tfrac{1}{2}(W_1 + \ldots + W_n)$$

y

$$\Delta = \det(N_1,\ldots,N_n).$$

Demostración. Por el Lema 1,

$$\phi'(X) = \max_{1 \leq k \leq n} |c_k^{-1} N_k X|$$

es una norma sobre R^n, y por el Teorema 2 la esfera cerrada unitaria $S_1[G]$ respecto a ϕ' es un paraleletopo n-dimensional de centro G,

$$S_1[G] = \{P_0+\lambda_1 W_1+\ldots+\lambda_n W_n \mid 0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1\};$$

usando (5) y (6) obtenemos (7) y (8) con $\Delta = \det(N_1,\ldots,N_n)$.

*

El siguiente lema muestra que n vectores forman una base ortogonal de R^n $(n \geqslant 3)$, si y sólo si, cada uno es múltiplo del producto vectorial de los restantes $n-1$ vectores.

LEMA 3. *Los vectores $W_1,\ldots,W_n$ son una base ortogonal de R^n, $(n \geqslant 3)$, si y sólo si*

$$(9)\begin{cases} W_1 = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}1} \dfrac{\|W_1\|^2}{\Delta} W_2\times\ldots\ldots\times W_n, \\ W_2 = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}2} \dfrac{\|W_2\|^2}{\Delta} W_3\times\ldots\ldots\times W_n\times W_1, \\ \vdots \\ W_{n-1} = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}(n-1)} \dfrac{\|W_{n-1}\|^2}{\Delta} W_n\times W_1\times\ldots\times W_{n-2}, \\ W_n = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}n} \dfrac{\|W_n\|^2}{\Delta} W_1\times\ldots\ldots\times W_{n-1}, \end{cases}$$

donde $\Delta = \det(W_1,\ldots,W_n) \neq 0$.

Demostración. Si $W_1,\ldots,W_n$ es una base ortogonal de R^n, entonces para cada k existen escalares $\lambda_{k1},\ldots,\lambda_{kn}$ tales que

$$N_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki} W_i, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

donde los N_k están definidos en (2). Por tanto,

$$0 = N_k\cdot W_i = \lambda_{ki} W_i\cdot W_i = \lambda_{ki}\|W_i\|^2 \quad \text{implica } \lambda_{ki} = 0, \quad i \neq k,$$

y por (3),

$$N_k \cdot \omega_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \Delta = \lambda_{kk}\omega_k \cdot \omega_k = \lambda_{kk}\|\omega_k\|^2 ,$$

de donde

$$\lambda_{kk} = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \frac{\Delta}{\|\omega_k\|^2} , \qquad k = 1,\dots,n ,$$

y N_k se reduce a

$$N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \frac{\Delta}{\|\omega_n\|^2}\, \omega_k,$$

esto es,

$$\omega_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \frac{\|\omega_k\|^2}{\Delta} \cdot N_k, \qquad k = 1,\dots,n .$$

El recíproco del Lema 3 es inmediato de las propiedades del producto vectorial.

★

Si $\mathcal{P}$ es un paraleletopo n-dimensional generado por n vectores no nulos ortogonales, entonces $\mathcal{P}$ es un ortotopo definido en la expresión (11) del siguiente corolario:

COROLARIO 2. *Sean $\omega_1,\dots,\omega_n$ vectores no nulos ortogonales en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, y el ortotopo n-dimensional de centro G*

$$(10) \qquad \mathcal{P} = \{P_0+\lambda_1\omega_1+\dots+\lambda_n\omega_n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\} .$$

Entonces

$$(11) \qquad \mathcal{P} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid |(X-G)\omega_k| \leq \tfrac{1}{2}\|\omega_k\|^2, k = 1,\dots,n \} .$$

Demostración. De la expresión (9) del Lema 3 se desprende

$$N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \frac{\Delta}{\|\omega_k\|^2}\, \omega_k , \qquad k = 1,\dots,n,$$

donde los vectores N_k están definidos en (2). Por tanto, la expresión

$$|(X-G)N_k| = \left|(-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \frac{\Delta}{\|W_k\|^2} W_k(X-G)\right| \leq \frac{1}{2}|\Delta|$$

es equivalente a

$$|(X-G)W_k| \leq \frac{1}{2}\|W_k\|^2, \qquad k = 1,\ldots,n .$$

Concluimos del Teorema 1 que si $\mathcal{P}$ es el ortotopo definido en (10), entonces $\mathcal{P}$ es también de la forma dada en (11).

El recíproco del Corolario 2 es el siguiente

COROLARIO 3. *Si $W_1,\ldots,W_n$ son vectores no nulos ortogonales en R^n, $G \in \mathrm{R}^n$ y*

$$\mathcal{P} = \{X \in \mathrm{R}^n \mid |(X-G)W_k| \leq \tfrac{1}{2}\|W_k\|^2, \quad k = 1,\ldots,n\},$$

entonces

$$(12) \qquad \mathcal{P} = \{P_o + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \lambda_k W_k \mid 0 \leq \lambda_k \leq 1\}$$

es un ortotopo n-dimensional, donde

$$(13) \qquad P_o = G - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} W_k .$$

Demostración. Si $\Delta = \det(W_1,\ldots,W_n)$ y si N_k es el vector definido en (2), entonces de la expresión (9) del Lema 3 obtenemos

$$N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} \frac{\Delta}{\|W_k\|^2} W_k , \qquad k = 1,\ldots,n ;$$

y si $c_k = \frac{1}{2}\|W_k\|^2$, entonces los n vectores

$$\frac{2c_k}{\Delta}N_k = (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2}k} W_k, \qquad k = 1,\ldots,n,$$

son también ortogonales. Concluimos por el Corolario 1 que $\mathcal{P}$ es el ortotopo n-dimensional definido por (12) y (13).

OBSERVACION 2. *Si en la expresión (11) del Corolario 2 se cumple $|W_k| = a$, $k = 1,\ldots,n$, entonces $\mathcal{P}$ es un hipercubo o politopo de medida γ_n de arista a* ([2], pp.123-124). *La distancia entre el hiperplano H_k de ecuación $(Y-G)W_k = 0$ y un punto X en R^n es justamente*

$$\frac{|(X-G)W_k|}{|W_k|} = \frac{1}{a}|(X-G)W_k| \quad ,$$

reduciéndose (11) a

$$\mathcal{P} = \{X \in R^n \mid \text{distancia entre } H_k \text{ y } X \leq \tfrac{1}{2}a,\ k=1,\ldots,n\},$$

donde $H_1,\ldots,H_n$ son hiperplanos ortogonales que se intersecan en G.

Recíprocamente, a partir de esta última se obtiene también para $\mathcal{P}$ la expresión (12), y en (13) el vértice P_0 en el Corolario 3. De aquí la siguiente definición y caracterización puntual de γ_n.

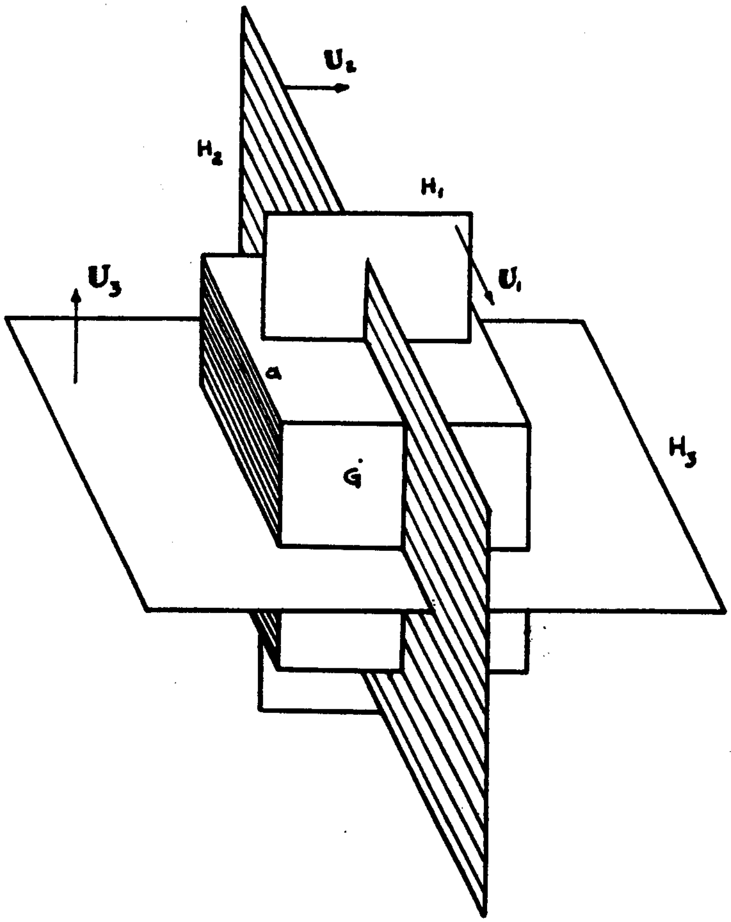
DEFINICION 1. *Dados en R^n $n(\geq 3)$ hiperplanos ortogonales $H_1,\ldots,H_n$ tales que se intersecan en un punto G, y de vectores normales unitarios $U_1,\ldots,U_n$ respectivamente, si $a > 0$ entonces el lugar geométrico*

$$\mathcal{P} = \{X \in R^n \mid \max_{1\leq k\leq n} \text{Distancia entre } H_k \text{ y } X \leq \tfrac{1}{2}a\}$$

es llamado un hipercubo o politopo de medida γ_n de centro G, arista a y de vértices

$$G + \frac{a}{2} \sum_{k=1}^{n} \{2\delta_k - (-1)^{\frac{1+(-1)^n}{2} k}\} U_k \, ,$$

para todo $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \in \{0,1\}^n$ (ver Figura 1, para $n = 3$).



Un cubo γ_3 de centro $G = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ y arista a

Figura 1

REFERENCIAS

[1] MOSTOW G.D., SAMPSON J., MEYER P. **Fundamental Structures of Algebra.** Mc Graw-Hill, New York, 1963.

[2] COXETER H.S.M. **Regular Polytopes.** Dover Publications, New York, 1973.

[3] SPIVAK M. **Cálculo en Variedades.** Editorial Reverté, Barcelona, 1975.