Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 11, No 2, julio–diciembre 1993

CAMPOS CUASIMAGNETICOS GRAVITACIONALES Y SU ANALOGIA CON EL ELECTROMAGNETISMO

Angel José Chacón V. [1]

Resumen

Se da la expresión para el tensor de Faraday y el tensor conformal de Weyl en el formalismo de las mónadas. El tensor de Weyl es a su vez expresado en términos de los tensores de Matte, al igual que su forma dual. Este resultado conduce a la forma explícita de los invariantes gravitacionales en el vacío o invariantes fundamentales. Se presenta además una posible clasificación algébraica para los campos gravitacionales, en cuasieléctricos y cuasimagnéticos.

1 Introducción

La analogía existente entre la gravitación y el electromagnetismo es un hecho reconocido, y su presencia posibilita la búsqueda de raíces comunes a los dos campos. Dicha analogía ocupa el interés de los especialistas, quienes buscan una teoría unificadora para la gravitación y el electromagnetismo, ambos campos con espín entero. Sin embargo, la primera teoría unificadora exitosa de campos (la teoría de Weinberg–Salam), que unifica la interacción débil y el electromagnetismo, no dejó de causar estrañesa por cuanto el mayor esfuerzo se había realizado para unificar electromagnetismo y gravitación.

Conocido es el hecho de que para el electromagnetismo la transformación gradiente 4–potencial determina la invariancia de la teoría de la relatividad ante el aporte de la forma exacta 1–forma $\vec{A}$ (en principio, es suficiente la invariancia con respecto al aporte de una forma cerrada) (véase, por ejemplo, [1]).

En gravitación la situación es mucho más compleja y rica. No sólo la métrica, sino también la conexión (aceleración, velocidad angular y velocidad de deformación del sistema de referencia) cambian ante una transformación tomada

[1]Profesor del Departamento de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

como una transformación de calibre. Sin embargo, sólo la métrica representa un objeto completamente invariante, análogo en este sentido a la tensión eletromagnética.
Este hecho no es casual (como en el caso de la electrodinámica, donde iguales cargas específicas son sólo una suposición bastante artificiosa acerca de la escogencia de un sistema de referencia concreto), sino una de las manifestaciones del carácter fundamental del principio de equivalencia en la naturaleza.
Así como hay dos niveles en la electrodinámica, el potencial y la tensión, en la gravitación existen tres: la métrica, la conexión y la curvatura.
Algunos autores proponen llamar la métrica "subpotencial del campo Gravitatorio" [2].
Sin traspasar los límites de la electrodinámica clásica y de la teoría general de la relatividad, en el presente trabajo se ofrecen nuevas relaciones que confirman la ya citada analogía.

2 Formalismo de las mónadas

Uno de los métodos para describir el importante concepto de sistema de referencia es el método de las mónadas, que se fundamenta en la asignación de un campo de vectores unitarios τ^{μ} normados en la unidad, $\tau^{\mu}\tau_{\mu} = 1$, tangentes a la congruencia de líneas mundiales (time–like) de los puntos del sistema de referencia (por congruencia entendemos un conjunto de líneas–mundiales, cada una de las cuales pasa por uno y sólo uno de los puntos del espacio tiempo [3]).
El sentido físico de lasmónadas puede entenderse como el campo vectorial de las 4–velocidades de cada uno de los puntos del sistema de referencia:

$$\tau^{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{ds}.$$

Con ayuda de este campo vectorial podemos definir en el sistema de referencia la longitud de los intervalos de tiempo, y encontrar los componentes temporales de los tensores correspondientes.
Del tensor métrico siempre es posible separar un tensor del tipo $\tau^{\nu}\tau^{\mu}$. Llamemos la diferencia $b_{\nu\mu} := g_{\nu\mu} - \tau_{\nu}\tau_{\mu}$ **métrica tridimensional o proyector**. La proyección del tensor $b_{\nu\mu}$ en la dirección τ es por definición cero: $b_{\nu\mu}\tau^{\nu} := 0$ significa que el tensor $b_{\nu\mu}$ es ortogonal a la dirección τ (time–like). Resulta entonces que $b_{\nu\mu}$ pertenece a la hipersuperficie espacio–temporal correspondiente al espacio tridimensional en el sistema de referencia dado.
Es fácil comprobar que $b_{\nu\mu}b_{\sigma^{\mu}} = b_{\nu\sigma}$, lo que significa que el tensor $b_{\nu\mu}$ es el proyector sobre un espacio local ortogonal al tiempo físico del sistema de referencia. De esta manera la proyección de cualquier magnitud tensorial sobre

el espacio tridimensional del sistema de referencia se realiza contrayendo el tensor con el proyector $b_{\nu\mu}$ para cada índice [4].

3 El tensor de Faraday en el formalismo de las mónadas

El tensor de Faraday o 2–forma de la tensión electromagnética se define como

$$F := \frac{1}{2} F_{\nu\mu} \theta^{\nu} \wedge \theta^{\mu} := dA,$$

en donde θ^{ν} y θ^{μ} son vectores de la base tétrada; el vector potencial A se toma como $A = A_{\mu} dx^{\mu}$.
Podemos escribir el tensor de Faraday según la expresión

$$F := E \wedge \tau + *(B \wedge \tau),$$

y obtener su forma dual a través del operador del Hodge:

$$*F = *(E \wedge \tau) - (B \wedge \tau);$$

aquí $E = *(\tau \wedge *F)$ es la 1–forma de la tensión eléctrica ortogonal a τ, y $B = *(\tau \wedge F)$ la 1–forma de la tensión magnética también ortogonal a τ. O sea, $B \cdot \tau = E \cdot \tau = 0$.
Los componentes de los vectores eléctricos y magnéticos encuentran su expresión a través del campo τ de la siguiente manera:

$$E_{\nu} = -F_{\lambda\nu} \tau^{\lambda}, \qquad B_{\nu} = F^{*}_{\lambda\nu} \tau^{\lambda} .$$

4 Clasificación del campo electromagnético según los invariantes electrodinámicos

De la representación tetradimensional del campo electromagnético con ayuda del tensor antisimétrico o tensor de Faraday, y más exactamente, de los componentes de éste, es posible encontrar las siguientes magnitudes invariantes:

$$I_1 = \frac{1}{2} F_{\nu\mu} F^{\nu\mu} , \quad I_2 = \frac{1}{4} F^{*}_{\nu\mu} F^{\nu\mu} .$$

Proyectando estas magnitudes sobre el sistema de referencia tendremos:

$$I_1 = \vec{B}^2 - \vec{E}^2 , \qquad I_2 = \vec{E} \cdot \vec{B} .$$

Los invariantes electromagnéticos I_1 y I_2 son válidos para cualquier sistema de referencia y para cualquier campo gravitatorio.
Según estos invariantes es posible clasificar los campos electromagnéticos de la siguiente forma: (clasificación de Synge - Piña para el tensor de Faraday [5]):

Tipo A:	$I_2 \neq 0;$	
Tipo B:	$I_1 < O,\ I_2 = 0;$	
Tipo C:	$I_1 = O,\ I_2 = 0$	(campo nulo);
Tipo D:	$I_1 > O,\ I_2 = 0.$	

La anterior clasificación es algebraica, así que el tipo del campo electromagnético puede cambiar de un punto a otro.

5 El tensor conformal de Weyl

El tensor de Weyl,

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta\nu\mu} := \mathcal{R}_{\alpha\beta\nu\mu} - \mathcal{R}_{\nu[\alpha}g_{\beta]\mu} + \mathcal{R}_{\mu[\alpha}g_{\beta]\nu} + \frac{1}{3}\mathcal{R}g_{\nu[\alpha}g_{\beta]\mu},$$

representa la parte del tensor de curvatura $\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ cuyas contracciones son iguales a cero, lo cual significa que el tensor Weyl se comporta como el tensor de curvatura en el espacio vacío, coincidiendo con $\mathcal{R}_{\alpha\beta\nu\mu}$ cuando $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = 0$ y $\mathcal{R} = 0$.
A. Matte en su trabajo [6] escribió las ecuaciones del campo gravitacional en el vacío, en el lenguaje de las magnitudes,

$$\mathcal{E}_{\alpha\nu} := R_{\alpha\beta\nu\mu}\tau^{\beta}\tau^{\mu}, \qquad \mathcal{B}_{\alpha\nu} := -R^{*}_{\alpha\beta\nu\mu}\tau^{\beta}\tau^{\mu},$$

llamadas correspondientemente campos cuasieléctricos y cuasimagnéticos.
Estas ecuaciones en primera aproximación son análogas a las ecuaciones de Maxwell, y el papel de la tensión de los campos eléctrico y magnético lo juegan las magnitudes $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$. Desde el punto de vista de Matte esta analogía es suficiente para convencerse de la existencia real de las ondas Gravitatorias [6].
Para el caso particular visto por nosotros, donde $\mathcal{R}_{\alpha\beta} = 0$, $\mathcal{R} = 0$ (espacio vacío), tenemos que

$$\mathcal{W}_{\alpha\beta\nu\mu} = \mathcal{R}_{\alpha\beta\nu\mu}$$

y

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \mathcal{W}_{\alpha\nu\beta\mu}\tau^{\nu}\tau^{\mu}, \qquad \mathcal{B}_{\alpha\beta} = -\mathcal{W}^{*}_{\alpha\nu\beta\mu}\tau^{\nu}\tau^{\mu}.$$

Los tensores $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ por definición son simétricos y su traza es nula.

6 El tensor de Weyl en el formalismo de las mónadas en términos de $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$

Si expresamos el tensor de Weyl en términos de $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$ (los llamados campos cuasieléctricos y cuasimagnéticos),

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{\alpha\beta\mu\nu} \;:=\;& 4\tau_{[\alpha}\mathcal{E}_{\beta][\nu}\tau_{\mu]} + 2\mathcal{E}_{\alpha[\nu}b_{\mu]\beta} - 2\mathcal{E}_{\beta[\nu}b_{\mu]\alpha} \\ & -2E_{\alpha\beta\omega\epsilon}(\tau^{\omega}\mathcal{B}^{\epsilon}_{[\nu}\tau_{\mu]} + \mathcal{B}^{\omega}_{[\nu}b^{\epsilon}_{\mu]}) - 2E_{\nu\mu\omega\epsilon}(\tau^{\omega}\mathcal{B}^{\epsilon}_{[\beta}\tau_{\alpha]} + \mathcal{B}^{\omega}_{[\beta}b^{\epsilon}_{\alpha]})\,,\end{aligned} \qquad (1)$$

encontramos con ayuda del operador * de Hodge su dual:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}^{*}_{\alpha\beta\mu\nu} \;:=\;& -4\tau_{[\alpha}\mathcal{B}_{\beta][\nu}\tau_{\mu]} - 2\mathcal{B}_{\alpha[\nu}b_{\mu]\beta} + 2\mathcal{B}_{\beta[\nu}b_{\mu]\alpha} \\ & +2E_{\alpha\beta\omega\epsilon}(\tau^{\omega}\mathcal{E}^{\epsilon}_{[\nu}\tau_{\mu]} + \mathcal{E}^{\omega}_{[\nu}b^{\epsilon}_{\mu]}) + 2E_{\nu\mu\omega\epsilon}(\tau^{\omega}\mathcal{E}^{\epsilon}_{[\beta}\tau_{\alpha]} + \mathcal{E}^{\omega}_{[\beta}b^{\epsilon}_{\alpha]})\,,\end{aligned} \qquad (2)$$

donde $E_{\alpha\beta\omega\epsilon} = \sqrt{-\mathrm{g}}\,\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}$ es el tensor axial de Levi–Civita, y $\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}$ es el símbolo de Levi–Civita. El tensor de Weyl así definido tiene las mismas propiedades de simetría del tensor de Riemann:

1. $\mathcal{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = \mathcal{W}_{\mu\nu\alpha\beta} = \mathcal{W}_{[\alpha\beta][\mu\nu]}$;
2. $\mathcal{W}_{\alpha[\beta\mu\nu]} = 0$;
3. $\mathrm{g}^{\alpha\nu}\mathcal{W}_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$

(los corchetes [ ] indican antisimetría para los índices contenidos).

7 Clasificación del campo gravitacional según los invariantes fundamentales

En la teoría general de la relatividad la base del sistema de invariantes consta de catorce elementos. Tomando el tensor de Weyl expresado según (1) y (2), se halla la forma explícita de los invariantes distintos de cero, llamados también invariantes fundamentales:

$$\begin{aligned} I_{g1} &= \mathcal{W}_{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{W}^{\alpha\beta\mu\nu}\,, & I_{g1} &= 8(\mathcal{E}_{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\alpha\beta} - \mathcal{B}_{\alpha\beta}\mathcal{B}^{\alpha\beta})\,; \\ I_{g2} &= \mathcal{W}^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{W}^{\alpha\beta\mu\nu}\,, & I_{g2} &= 8\mathcal{E}_{\alpha\beta}\mathcal{B}^{\alpha\beta}\,; \\ I_{g3} &= \mathcal{W}^{\alpha\beta\lambda\varrho}\mathcal{W}_{\alpha\beta\sigma\tau}\mathcal{W}_{\lambda\varrho}{}^{\sigma\tau}\,, & I_{g3} &= -18\mathcal{B}_{\alpha\beta}\mathcal{B}^{\alpha\theta}\mathcal{E}^{\beta}_{\theta}\,; \\ I_{g4} &= \mathcal{W}^{*\nu\mu\lambda\varrho}\mathcal{W}_{\nu\mu\sigma\tau}\mathcal{W}_{\lambda\varrho}{}^{\sigma\tau}\,, & I_{g4} &= 18\mathcal{E}_{\alpha\beta}\mathcal{E}^{\alpha\theta}\mathcal{B}^{\beta}_{\theta}\,. \end{aligned}$$

Definiendo un campo gravitacional isotrópico con la condición

$$I_{g1} = I_{g2} = I_{g3} = I_{g4} = 0 \,,$$

obtenemos el llamado segundo criterio de Bell acerca de la existencia de las ondas gravitatorias [7].
Los invariantes fundamentales en su forma explícita, al ser comparados con los dos únicos invariantes electrodinámicos, nos permiten corroborar la profunda analogía existente entre la gravitación y el electromagnetismo.
Postulamos ahora algunas condiciones necesarias -pero creemos no suficientes- para clasificar los campos cuasieléctricos y los cuasimagnéticos.
En analogía con el caso electrodinámico podemos considerar $I_{g2} = I_{g3} = I_{g4} = 0$ y $I_{g1} \neq 0$.
El signo de I_{g1} determinará entonces el carácter del campo:
si $I_{g1} > 0$ el campo tendrá carácter cuasieléctrico;
si $I_{g1} < 0$ el campo tendrá carácter cuasimagnético.

8 Tensor de superenergía

El tensor de superenergía de Bell se define como un tensor de cuarto rango de la forma

$$T_{\alpha\mu\lambda\varrho} = \frac{1}{8}\left(\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{R}_{\lambda}{}^{\beta}{}_{\varrho}{}^{\nu}\mathcal{R}^{*}_{\alpha\beta\mu\nu}\mathcal{R}_{\lambda^{*}}{}^{\beta}{}_{\varrho}{}^{\nu}\right) .$$

En nuestro caso, en el cual $\mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \mathcal{W}_{\alpha\beta\mu\nu}$ es posible encontrar una expresión para el tensor de Bell en términos de los tensores $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ y $\mathcal{B}_{\alpha\beta}$, la cual nos permite ver más claramente la analogía con el tensor de energía–impulso del campo electromagnético.
Esta analogía algebraica entre los tensores de Bell y de energía–impulso puede ser usada para definir "la densidad de energía–impulso" del campo gravitatorio.
En la actualidad se lleva a cabo el trabajo de calcular la forma explícita del tensor de super–energía en términos de los campos cuasieléctricos y cuasimagnéticos [8].

Referencias

[1] MITSKIEVICH N. V., NESTEROV A. I., YEFREMOV A. P. Dinámica de los campos en la teoría general de la relatividad. Energoatomizdat, Moscú, 1985 (en ruso).

[2] MITSKIEVICH N. V. Campos físicos en la teoría general de la relatividad. Naúka, Moscú, 1966 (en ruso).

[3] VLADIMIROV Y.S., MITSKIEVICH N. V., JORSKI I. **Espacio, Tiempo, Gravitación.** Naúka, Moscú, 1982 (en ruso).

[4] VLADIMIROV Y.S., **Sistemas de referencia en la teoría general de la relatividad.** Energoatomizdat, Moscú, 1982 (en ruso).

[5] LOPEZ BONILLA J.L., **"Electrodinámica de partículas cargadas". Revista Colombiana de Física, Vol. 17 (1986), N° 1.**

[6] MATTE A. **Canadian Journal of Math. 5,1 (1953).**

[7] MISNER CH.W., THORNE K.S., WHEELER J.A. **Gravitation.** Freeman, San Francisco, 1973.

[8] CHACON A.J. **Analogía entre la Gravitación y el Electromagnetismo.** Tesis de Grado, Universidad de la Amistad de los Pueblos, Moscú, 1990 (en ruso).