Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 11, Nº 1, enero-junio 1993

Ortogonalidad Compleja de Sistemas de Polinomios *

JAIRO CHARRIS **

En las relaciones de recurrencia que definen los sistemas ortogonales clásicos de polinomios (Laguerre, Jacobi, etc.) es casi siempre necesario restringir el dominio de los parámetros para garantizar la ortogonalidad de dichos sistemas con respecto a medidas positivas en el eje real.

Sin embargo, es frecuentemente posible establecer la ortogonalidad con respecto a funcionales de momentos fuera de estos dominios naturales, y es natural indagar por otros tipos de representación de estos funcionales cuando no la admiten por medidas positivas.

Un primer paso en esta dirección fue dado por R.P. Boas al establecer representaciones por medidas no positivas. El suyo es, sin embargo, un teorema de existencia no constructivo, el cual dice poco o nada acerca de las propiedades de dichas medidas, ni de cómo obtenerlas explícitamente.

Posteriomente, R. Morton y A. Krall estudiaron el problema de la representación por medio de distribuciones, y lograron obtener representaciones distribucionales explícitas del funcional de momentos de varios sistemas clásicos. Su procedimiento entraña, sin embargo, una doble dua-

* Texto base para un curso de Introducción a los Polinomios Ortogonales, dictado por el autor en el transcurso del XI Coloquio Nororiental de Matemáticas, en la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 5-8 de agosto de 1993.

** Profesor Titular, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

lización mediante la transformada de Fourier, que lo hace realmente factible sólo cuando los sistemas de polinomios son soluciones de ecuaciones diferenciales y las tranformadas inversas son fácilmente calculables. Este no es el caso, por ejemplo, de los llamados polinomios de Bessel, a pesar de que satisfacen ecuaciones diferenciales de la clase exigida, y, menos, de los de Pollaczek, que no lo hacen.

Con el fin de superar estas dificultades, S. Kim y K. Kwon han investigado la representación mediante hiperfunciones, teniendo éxito en el caso de Bessel. Sin embargo, tal punto de vista necesita aún de la relación de los polinomios con ciertas ecuaciones diferenciales.

Recientemente, M. Ismail, D. Masson y M. Rahman han abogado por la representación de los funcionales mediante integrales de contorno. De hecho, representaciones de este tipo eran conocidas para ciertos sistemas, incluidos los polinomios de Bessel. Sin embargo, no existía ningún procedimiento sistemático para obtener las medidas complejas necesarias, y ellos han sugerido, motivados por un resultado célebre de Márkov, que tales medidas deberían poderse construir a partir de la función límite de la fracción continua de los polinomios. Más precisamente, su idea es la de verificar directamente si, escogido un contorno, tal función límite sumistra la medida buscada, o si, dada la función límite, un contorno apropiado dentro de su dominio de analiticidad permite la representación. Esto requiere, frecuentemente, de cálculos no triviales. Sin embargo, una vez establecida la representación integral, es usualmente fácil obtener representaciones distribucionales.

Durante una conferencia del autor del presente trabajo en el Seminario de Posgrado de la Universidad de los Andes, el Profesor Xavier Caicedo sugirió estudiar la representación de los funcionales de momento mediante la integral de Dunford, ya que en el caso de estar los parámetros dentro de sus dominios naturales esto se podía hacer mediante las resoluciones espectrales de ciertos operadores asociados a los sistemas de polinomios (Teorema de Márkov), y la integral de Dunford tiene como uno de sus oficios sustituir tales resoluciones cuando éstas no están disponibles. Más aún, pensando en la insistencia de Ismail, Masson y Rahman sobre las fracciones continuas, conjeturó que debía existir alguna conexión entre éstas y las resolventes de los operadores.

El objetivo de este trabajo fue el de examinar esta sugerencia y establecer, de ser posible, la conjetura, lo cual se logró en el caso acotado, dando, al menos en estas circunstancias, una base sólida a las sospechas de los tres autores antes citados.

El artículo está dividido en dos secciones. La primera examina los antecedentes del problema y da las nociones básicas dentro del cual éste se enmarca. La segunda demuestra la conjetura de X. Caicedo, al establecer la conexión entre las fracciones continuas y las resolventes de los operadores asociados, y confirma plenamente, dentro de un cierto contexto, la sospecha de Ismail, Masson y Rahman.

1.— *INTRODUCCION*

Sea $\mathbb{C}[x]$ el espacio de los polinomios con coeficientes en el campo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Un *funcional de momentos* $\mathcal{L}$ ([8], Chap. I) es una aplicación $\mathbb{C}$—lineal de $\mathbb{C}[x]$ en $\mathbb{C}$ tal que $\mathcal{L}(1)=1$. Un sistema $\{P_n(x) \mid n \geq 0\}$ de polinomios en $\mathbb{C}[x]$ con $P_n(x)$ de grado n y $P_0(x)=1$ es *ortogonal con respecto a* $\mathcal{L}$ ([8], Chap. I) si

$$\mathcal{L}\{P_n(x)P_m(x)\} = \lambda_n \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \tag{1.1}$$

con

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_n \neq 0, \quad n > 0. \tag{1.2}$$

Se dice en tal caso que $\mathcal{L}$ es un *funcional de momentos* o un *funcional de ortogonalidad de* $\{P_n(x)\}$.

Es bien conocido que $\{P_n(x)\}$ *es ortogonal con respecto a un funcional de momentos* $\mathcal{L}$ *si y solo si existen números complejos* A_n, B_n, C_n *tales que*

$$A_n C_{n+1} \neq 0, \quad n \geq 0, \tag{1.3}$$

y que

$$(A_n x + B_n) P_n(x) = P_{n+1}(x) + C_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.4}$$

con $P_{-1}(x)=0$, $P_0(x)=1$. *Además,* $\{P_n(x)\}$ *determina unívocamente a* $\mathcal{L}$ *mediante*

$$\mathcal{L}(1) = 1; \quad \mathcal{L}(P_n(x)) = 0, \quad n \geq 1, \tag{1.5}$$

y se tiene que

$$\lambda_n = \mathcal{L}(P_n^2(x)) = \frac{A_0}{A_n} C_1 C_2 \dots C_n, \quad n \geq 1. \tag{1.6}$$

Esto se conoce como el *Teorema de Favard* ([8], Chap. I). Si $\{P_n(x)\}$ satisface (1.4) con $P_{-1}(x)=P_0(x)=1$, y si (1.3) se verifica, el funcional de momentos

$\mathcal{L}$ de $\{P_n(x)\}$ puede entonces obtenerse mediante (1.5) y extensión lineal. *Si* ([8], Chap II; [1], [4]) A_n, B_n *y* C_n *son números reales y*

$$A_n A_{n+1} C_{n+1} > 0, \quad n \geq 0, \tag{1.7}$$

y solamente en tal caso, $\mathcal{L}$ *puede representarse en la forma*

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, d\mu(x), \tag{1.8}$$

donde μ *es una medida positiva con soporte en la recta real* $\mathbb{R}$. *Si además existe* $M > 0$ *tal que*

$$\left|\frac{B_n}{A_n}\right| \leq \frac{M}{3}, \quad \sqrt{\frac{C_{n+1}}{A_n A_{n+1}}} \leq \frac{M}{3}, \quad n \geq 0,$$

entonces el soporte $\operatorname{Supp}\mu$ *de* μ *está contenido en* $[-M, M]$, *y* μ *es la única medida para la cual* (1.8) *se verifica.* Se dice que μ es una *medida ortogonalidad* o una *medida espectral* de $\{P_n(x)\}$, y que $\{P_n(x)\}$ es *ortogonal con respecto a* μ.

Una relación de recurrencia

$$x\, p_n(x) = b_n\, p_{n-1}(x) + a_n\, p_n(x) + b_{n+1}\, p_{n+1}, \quad n \geq 0, \tag{1.10}$$

tal que

$$b_{n+1} \neq 0, \quad n \geq 0, \tag{1.11}$$

es de la forma (1.4), y define entonces, con $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1$, un sistema ortogonal con respecto a un funcional de momentos $\mathcal{L}$ tal que

$$\mathcal{L}(p_n(x)\, p_m(x)) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0. \tag{1.12}$$

La condición (1.7) se traduce, para (1.10), en que a_n, b_n son números reales y

$$b_{n+1}^2 > 0, \quad n \geq 0, \tag{1.13}$$

y la (1.9), en

$$|a_n| \leq \frac{M}{3}, \qquad |b_{n+1}| \leq \frac{M}{3}, \quad n \geq 0. \tag{1.14}$$

Si (1.13) se satisface y el funcional de momentos $\mathcal{L}$ tiene la representación (1.8), entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(x)\, p_m(x)\, d\mu(x) = \delta_{mn}, \quad m, n \geq 0, \tag{1.15}$$

y se dice que μ es una ***medida de ortonormalidad*** de $\{p_n(x)\}$ y que $\{p_n(x)\}$ es ***ortonormal con respecto a*** μ.

Supóngase ahora que $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.4) con $P_{-1}(x) = 0$ y $P_0(x) = 1$. Si (1.9) se satisface y $\{\hat{P}_n(x)\}$ se define por (1.10) con $\hat{P}_{-1}(x) = 0$, $\hat{P}_0(x) = 1$ y

$$a_n = -\frac{B_n}{A_n}; \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{C_{n+1}}{A_n A_{n+1}}}, \quad n \geq 0, \tag{1.16}$$

donde $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(\sqrt{\alpha}\,) \leq \frac{\pi}{2}$, así que $\sqrt{\alpha} \geq 0$ si $\alpha \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}(\hat{P}_n(x)\hat{P}_m(x)) = \delta_{mn} \tag{1.17}$$

para el funcional de momentos $\mathcal{L}$ de $\{P_n(x)\}$. De hecho,

$$\hat{P}_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{\mathcal{L}(P_n^2(\lambda)}}, \quad n \geq 0, \tag{1.18}$$

y se dice que $\{\hat{P}_n(x)\}$ es el ***sistema ortonormal de*** $\{P_n(x)\}$ ***para*** $\mathcal{L}$.

Nótese que si A_n, B_n, C_n satisfacen (1.7) y a_n, b_n están dados por (1.16), entonces (1.13) se satisface. También (1.14) se satisfará si (1.9) lo hace.

Para la mayor parte de los sistemas de polinomios definidos por una relación de recurrencia (1.4), tales como los de Jacobi, Laguerre y Askey—Wilson, A_n, B_n, C_n dependen de ciertos parámetros α, β, λ, $\cdots$, y (1.7) vale para ciertos rangos de estos parámetros, sus ***rangos naturales***, pero falla para la mayor parte de los valores de éstos. Sin embargo, (1.3) se verifica usualmente para todos los valores de α, β, λ, $\cdots$, excepto, tal vez, para un número enumerable de los mismos. Esto ha motivado la búsqueda de representaciones de $\mathcal{L}$ en términos de distribuciones (Krall [15], Morton and Krall [16]) o de hiperfunciones (Kim [13], Kim and Kwon [14]) cuando (1.3) vale pero (1.4) falla.

En [12], Ismail, Masson y Rahman han propuesto representar $\mathcal{L}$, de ser posible, en la forma

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C} P(z)\,\chi(z)\,dz \qquad (1.19)$$

donde $\chi(z)$ es, bajo la hipótesis (1.3), la función límite de la fracción continua

$$\frac{A_0|}{|A_0 z + B_0} - \frac{C_1|}{|A_1 z + B_1} - \frac{C_2|}{|A_2 z + B_2} - \cdots \qquad (1.20)$$

de $\{P_n(x)\}$ y C es un contorno apropiado de $\mathbb{C}$ (o, de la esfera de Riemann $\mathbb{C}_\infty$), y luego intentar obtener, a partir de (1.19), representaciones distribucionales o hiperfuncionales de $\mathcal{L}$.

En [12], ellos han dado representaciones distribucionales de $\mathcal{L}$ para los polinomios de Jacobi, a partir de (1.19).

A su vez, Charris y Soriano en [7] han obtenido representaciones distribucionales para los polinomios cribados ultraesféricos, siguiendo la misma técnica. En todos los casos, esto requería verificar por medio de un cálculo directo que, escogido un contorno C en el dominio de analiticidad de $\chi(z)$, $\mathcal{L}$, dado por (1.19), satisfacía (1.5).

La idea de basar la búsqueda de representaciones distribucionales o hiperfuncionales de $\mathcal{L}$ en (1.19) está inspirada en el siguiente *Teorema de Márkov* ([1], [4], [8], [19], [20]).

Si (1.7) *y* (1.9) *se verifican, así que* $\mathcal{L}$ *admite la representación* (1.19) *con el soporte* $\operatorname{Supp}\mu$ *de* μ *contenido en* $[-M, M]$, *entonces*

$$\chi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t}, \qquad z \notin [-M, M]. \tag{1.21}$$

Claramente $\chi(z)$ es analítica para $z \in \mathbb{C} - [-M, M]$. Si C es entonces un contorno positivamente orientado de $|z| > M$ que contiene a $z = 0$ en su interior, se obtiene (v. [2], [7], [12]) que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C P(z)\chi(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C P(z)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{z-t}\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\,d\mu(t), \tag{1.22}$$

y, en tal caso, (1.8) y (1.19) son ambas representaciones de $\mathcal{L}$. Sin embargo, si (1.7) falla, también lo hace (1.8), aunque es de esperar que (1.19) valga aún (siempre que se tenga (1.4), condición sin la cual (1.1) no es posible). La verificación de (1.19) es, tanto en [7] como en [12], consecuencia de un cálculo directo. Es de observar que $\chi(z)$ puede determinarse frecuentemente, en forma independiente de (1.21), mediante la fórmula (v. [8], Chap. III; [4])

$$\chi(z) = A_0 \lim_{n \to \infty} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}, \tag{1.23}$$

donde, si $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.4), $\{P_n^{(1)}(x)\}$ lo está por

$$\left(A_{n+1}x + B_{n+1}\right)P_n^{(1)}(x) = P_{n+1}^{(1)}(x) + C_{n+1}\, P_{n-1}^{(1)}(x), \quad n \geq 0, \tag{1.24}$$

con $P_{-1}^{(1)}(x) = 0$, $P_0^{(1)}(x) = 1$, y se denomina, como lo sugiere (1.23), el sistema de los ***polinomios numeradores de*** $\{P_n(x)\}$.

Ahora, existe una conexión importante entre la teoría de los funcionales de momentos, los polinomios ortogonales y la teoría de operadores en los espacios de Hilbert.

Una matriz tridiagonal simétrica infinita

$$J = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0\ldots & 0 \\ . & . & . & . & .... & . \\ . & . & . & . & .... & . \end{bmatrix} \tag{1.25}$$

se denomina una ***matriz de Jacobi***. Escribiremos

$$J = [a_n ; b_n]. \tag{1.26}$$

Claramente existe una correspondencia biyectiva entre los sistemas de polinomios $\{p_n(x)\}$ dados por (1.10) y la matrices de Jacobi $[a_n ; b_n]$. Esto permite hablar de los ***polinomios de*** J o de ***la matriz de*** $\{p_n(x)\}$. Más aún, si $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.4) bajo la hipótesis (1.3), denominaremos ***matriz de*** $\{P_n(x)\}$ a la matriz J del sistema $\{\hat{P}_n(x)\}$ determinado por (1.10) con a_n, b_n dados por (1.16).

Si $J=[a_n;b_n]$ y existe $M>0$ tal que

$$|a_n|\le \frac{M}{3}, \quad |b_{n+1}|\le \frac{M}{3}, \quad n\ge 0, \tag{1.27}$$

se dice que J es ***acotada.***

Una matriz acotada de Jacobi $J=[a_n;b_n]$ define un operador $\hat{J}$ del espacio de Hilbert ℓ_2 de las sucesiones complejas (x_n) tales que $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2<+\infty$. El producto escalar de ℓ_2 es

$$\left[(x_n);(y_n)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}x_n\,\bar{y}_n. \tag{1.28}$$

Si $\{e_n\,|\,n\ge 0\}$ es la base canónica de ℓ_2, $e_n=(\delta_{0n},\delta_{1n},\ldots)$, $n\ge 0$, y e_{-1} es la sucesión (x_n) con $x_n=0$, $n\ge 0$, el operador $\hat{J}$ está determinado por

$$\hat{J}e_n=b_n e_{n-1}+a_n e_n+b_{n+1}e_{n+1}, \quad n\ge 0, \tag{1.29}$$

(con $b_0=0$) y extensión lineal continua. Si J verifica (1.27), entonces

$$\|\hat{J}\|\le M. \tag{1.30}$$

Supóngase ahora que a_n, b_n son números reales y que J es acotada. Entonces $\hat{J}$ es autoadjunto, y su espectro $\sigma(\hat{J})$ está contenido en $[-M,M]$. Sea $\{E_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una resolución de la identidad continua por la derecha para $\hat{J}$, así que

$$\hat{J}=\int_{-\infty}^{+\infty}t\,dE_t. \tag{1.31}$$

Si $P(x)\in\mathbb{C}[x]$ es un polinomio entonces

$$P(\hat{J})=\int_{-\infty}^{+\infty}P(t)\,dE_t \tag{1.32}$$

y, como se verifica fácilmente por inducción a partir de (1.10) (v. [1], [4]), si

$\{p_n(x)\}$ es el sistema de polinomios de J entonces

$$p_n(\hat{J})e_0 = e_n, \quad n \geq 0. \tag{1.33}$$

La fórmula (1.33) es fundamental en la teoría de polinomios ortogonales. En particular, tal fórmula implica que

$$\delta_{n0} = \left(p_n(\hat{J})e_0, e_0\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t)\, d(E_t e_0; e_0), \tag{1.34}$$

lo cual muestra que

$$\mathcal{L}(P(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\, d(E_t e_0; e_0) \tag{1.35}$$

es una representación del funcional de momentos $\mathcal{L}$ de $\{p_n(x)\}$ y, de hecho, que $\sigma(t) = (E_t e_0; e_0)$, $-\infty < t < +\infty$, es la función de distribución de la medida de ortonormalidad μ del sistema $\{p_n(x)\}$; es decir,

$$\sigma(x) = \int_{-\infty}^{x} d\mu(t), \quad \mu((-\infty, x]) = \int_{-\infty}^{x} d\sigma(t), \quad -\infty < x < +\infty, \tag{1.36}$$

donde la segunda integral es una integral de Riemann—Stieljes, y también es posible expresar E_λ en términos de μ mediante

$$E_\lambda e_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\lambda} p_n(t) p_k(t)\, d\mu(t) \right) e_k \tag{1.37}$$

y extensión lineal continua.

Si a_n, b_n no son números reales, $\hat{J}$ no es auto—adjunto, y no disponemos de resoluciones de la identidad para $\hat{J}$. Sin embargo, si J es acotada, es aún posible representar a $\hat{J}$ mediante su operador resolvente $R(\hat{J}, z) = (z - \hat{J})^{-1}$. En efecto, si (1.27) se satisface, $R(\hat{J}, z)$ existe para todo $|z| > M$, y si C es un contorno positivamente orientado de $|z| > M$ que contiene al 0 en su interior, entonces

$$P(\hat{J}) = \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\hat{J},z)P(z)\,dz. \tag{1.38}$$

La relación (1.38) se conoce como la *Fórmula de Cauchy–Dunford* (v. [9], [22]). Se deduce que

$$\delta_{no} = \left[p_n(\hat{J})e_0;e_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[R(\hat{J},z)e_0;e_0\right]p_n(z)\,dz, \tag{1.39}$$

así que

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[R(\hat{J},z)e_0;e_0\right]P(z)\,dz \tag{1.40}$$

es una representación del funcional de momentos $\mathcal{L}$ de $\{p_n(x)\}$. El propósito de este trabajo es demostrar, como lo ha conjeturado el Profesor Xavier Caicedo, que $\left[R(\hat{J},z)e_0;e_0\right]$ *es la función límite* $\chi(x)$ *de la fracción continua de* $\{p_n(x)\}$. Esto implicará que la representación (1.19) de $\mathcal{L}$ es válida en general, y la verificación directa de este hecho, como en [7] y [12], una tarea en general difícil, es innecesaria.

2.— *RESULTADOS PRINCIPALES*

Si T es un operador lineal acotado del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (con producto interno $(x;y)$) y si $P(x)$ es un polinomio, entonces

$$P(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_C R(T,z)P(z)\,dz\ , \tag{2.1}$$

donde C es cualquier contorno positivamente orientado de $|z|>\|T\|$ que contiene a 0 en su interior, y

$$R(T,z)=(z-T)^{-1},\quad |z|>\|T\|, \tag{2.2}$$

es el *operador resolvente de* T. Si $x,\ y\in\mathcal{H}$,

$$R(z)=(R(T,z)x;y),\ |z|>\|T\|, \tag{2.3}$$

es una función analítica de z.

La representación (2.1) se conoce como *la representación de Cauchy—Dunford de* P(T). De hecho, (2.1) es válida para toda función analítica P en $|z|>\|T\|$. Obsérvese que $\sigma(T)$ está contenido en $|z|\leq\|T\|$; por lo tanto, en el interior de C. Para información adicional sobre la representación de Cauchy—Dunford, véanse [9], [22]. Como lo hemos mencionado en la introducción, si J es una matriz de Jacobi y si el operador de ℓ_2 definido por J mediante (1.29) es acotado y satisface $\|\hat{J}\|\leq M$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (R(\hat{J},z)e_0;e_0)P_n(z)\,dz=\delta_{n0},\quad n\geq 0, \tag{2.4}$$

donde C en $|z|>M$ es un contorno positivo, como arriba, y $\{P_n(x)\}$ es el sistema de polinomios de J, así que

$$\mathcal{L}(P(z)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (R(\hat{J},z)e_0;e_0)P(z)\,dz \tag{2.5}$$

es una representación del funcional de momentos $\mathcal{L}$ de $\{P_n(x)\}$.

Si $\{P_n(x)\}$ es ahora cualquier sistema de polinomios, ortogonal para el funcional de momentos de $\mathcal{L}$, y J es la matriz de Jacobi asociada al sistema $\{\hat{P}_n(x)\}$ de $\{P_n(x)\}$ (dado por (1.18)), $\mathcal{L}$ queda representado en la forma (2.5) mediante el operador $\hat{J}$ de J.

Demostraremos que $(R(\hat{J},z)e_0;e_0)$ es la función límite $\chi(z)$ de la fracción continua de $\{P_n(x)\}$, tal como fue conjeturado por el Profesor X. Caicedo. No hay pérdida de generalidad al suponer que $\{P_n(x)\}$ está dado por (1.10) y que $J=[a_n;b_n]$. Sea

$$J_n' = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad n \geq 1. \tag{2.6}$$

Si I_n es la matriz identidad de orden n, se verifica inmediatamente que

$$b_1 \dots b_n P_n(x) = \mathrm{Det}(xI_n - J_n'), \quad n \geq 1. \tag{2.7}$$

A su vez,

$$b_2 \dots b_{n+1} P_n^{(1)}(x) = \mathrm{Det}(xI_n - J_n''), \quad n \geq 1, \tag{2.8}$$

donde J_n'' es la matriz que se obtiene de J_{n+1}' deshechando la primera fila y la primera columna. Nótese que $b_2 \dots b_n P_{n-1}^{(1)}(x)$ es el menor correspondiente a $x - a_0$ en $xI_n - J_n'$. Considérese ahora la matriz de Jacobi

$$J_n := \begin{bmatrix} J_n' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

y sea $\hat{J}_n$ su operador asociado en ℓ_2. El operador $\hat{J}_n$ aplica $\mathbb{C}^n$, considerado de la manera obvia como subespacio de ℓ_2, en $\mathbb{C}^n$. En efecto, $\hat{J}e_k = b_k e_{k-1} + a_k e_k + b_{k+1} e_{k+1}$ para $k = 0, 1, \dots, n-2$, mientras que $\hat{J}e_{n-1} = b_{n-1} e_{n-2} + a_{n-1} e_{n-1}$ y $\hat{J}_n e_k = 0$ si $k \geq n$.

Por lo tanto, según la regla de Cramer, si x no es valor propio de $\hat{J}_n$ (es decir valor propio de J_n'), entonces

$$\big((R(\hat{J}_n, z)e_0; e_0\big) = \frac{\textit{menor de } (x - a_0) \text{ en } (x - J_n')}{b_1 \dots b_{n-1} P_n(x)} = \frac{1}{b_1} \frac{P_{n-1}^{(1)}(x)}{P_n(x)}. \tag{2.10}$$

Si ahora suponemos que J es acotada, es decir que

$$\sup_{n \geq 0} \left\{ |a_n|, |b_{n+1}| \right\} \leq M < +\infty, \tag{2.11}$$

así que $\sigma(\hat{J}) \subseteq \{z \,|\, |z| \leq M\}$, se tiene que

$$(R(\hat{J}_n, z)e_0; e_0) = \frac{1}{b_1} \frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)}, \quad |z| > M. \tag{2.12}$$

Demostremos que

$$\lim_{n \to \infty} (R(\hat{J}_n, z)e_0; e_0) = (R(\hat{J}, z)e_0; e_0). \tag{2.13}$$

Esto es consecuencia de que

Teorema 2.1. *Para todo* $|z| > M$,

$$\lim_{n \to \infty} \left\| \big(R(\hat{J}_n, z) - R(\hat{J}, z) \big) e_0 \right\| = 0, \tag{2.14}$$

y el límite es uniforme para $|z| \geq M' > M$.

Demostración. Obsérvese, en primer lugar, que

$$R(\hat{J}, z) - R(\hat{J}_{n+1}, z) = R(\hat{J}_{n+1}, z)(\hat{J} - \hat{J}_{n+1}) R(\hat{J}, z), \tag{2.15}$$

y que

$$R(\hat{J}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{J}^k}{z^{k+1}}, \quad R(\hat{J}_{n+1}, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{J}_{n+1}^k}{z^{k+1}} \tag{2.16}$$

para $|z| > M$ (v. [9], [20], [22]). Por otra parte,

$$\hat{J}_{n+1}\hat{J}^k e_0 = \hat{J}^{k+1} e_0 \tag{2.17}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Entonces

$$\left[R(\hat{J},z) - R(\hat{J}_{n+1},z)\right]e_0 = R(\hat{J}_{n+1},z)\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\hat{J}^{k+1} - \hat{J}_{n+1}\hat{J}^k}{z^{k+1}}e_0, \tag{2.18}$$

así que, teniendo en cuenta que $\|\hat{J}_{n+1}\| \le M$, $\|\hat{J}\| \le M$, y que

$$\left\|R(\hat{J}_{n+1},z)\right\| \le \frac{M/M'}{M'-M}, \quad |z| \ge M' > M, \tag{2.19}$$

se concluye que

$$\sup_{|z|\ge M'}\left\|\left[R(\hat{J},z) - R(\hat{J}_{n+1},z)\right]e_0\right\| \le 2\frac{M/M'}{M'-M}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{M}{M'}\right)^{k+1}. \tag{2.20}$$

Como la serie $\sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{M}{M'}\right)^{k+1}$ es convergente, el teorema está demostrado. ■

Corolario. *Si la matriz de Jacobi de* $\{P_n(x)\}$ *satisface* (1.27), *el límite* $\chi(x)$ *de la fracción continua de* $\{P_n(x)\}$ *existe para todo* $|z| > M$. *Más aún*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_1}\frac{P_{n-1}^{(1)}(z)}{P_n(z)} = \chi(z) = (R(\hat{J},z)e_0;e_0), \quad |z| > M, \tag{2.21}$$

donde $\hat{J}$ *es el operador de* ℓ_2 *definido por* J *mediante* (1.29), *y el límite es uniforme en* $|z| \ge M' > M$. *Por lo tanto,* $\chi(z)$ *es analítica en* $|z| > M$.

Si $\mathcal{L}$ es el funcional de momentos de $\{P_n(x)\}$ se tiene entonces que

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C P(z)\chi(z)\,dz \tag{2.22}$$

para todo polinomio $P(x)$, donde C es cualquier contorno de $|z| > M$ que contenga a 0 en su interior y $\chi(z)$ es la función límite de la fracción continua de $\{P_n(x)\}$. Además

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C P_m(z)P_n(z)\chi(z)\,dz = \lambda_n\delta_{mn}, \quad m,n \ge 0, \tag{2.23}$$

donde $\lambda_n = 1$ para todo n si $\{P_n(x)\}$ está definido por (1.10), mientras que

$$\lambda_0 = 1; \quad \lambda_n = \frac{A_0}{A_n} C_1 \cdots C_n, \quad n \geq 1, \tag{2.24}$$

si $\{P_n(x)\}$ está determinado por (1.4). En particular,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P_0(z) \chi(z)\, dz = 1; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_C P_n(z) \chi(z)\, dz = 0, \quad n \geq 1. \tag{2.25}$$

Observamos que las relaciones (2.7), (4.8) y (5.9) de [12], así como las representaciones de $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en [7], son consecuencia de los resultados generales de este capítulo, y no necesitan verificarse directamente, como se hizo en esos trabajos. De todas maneras, tales verificaciones directas son de algún interés, en vista del siguiente resultado.

Teorema 2.2. Si $\{P_n(x)\}$, *dado por* (1.10), *satisface* (2.11), *la función límite* $\chi(z)$ *de la fracción continua de* $\{P_n(x)\}$ *satisface*

$$\chi(z) \sim \frac{1}{z}, \quad z \to \infty. \tag{2.26}$$

Por otra parte, si el funcional de momentos $\mathcal{L}$ *de* $\{P_n(x)\}$ *admite la representación*

$$\mathcal{L}(P(x)) = \frac{1}{2\pi i} \int_C P(z) F(z)\, dz, \tag{2.27}$$

donde F *es analítica en* $|z| > M$ *y* $\lim_{z \to \infty} F(z) = 0$, *y C es cualquier contorno positivamente orientado que contiene a* 0 *en su interior, entonces*

$$F(z) = \chi(z), \quad |z| > M. \tag{2.28}$$

Demostración. De (2.21) se obtiene que

$$|z\chi(z) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{|z|^n} = \frac{M/|z|}{1 - M/|z|} \longrightarrow 0, \quad z \to \infty, \tag{2.29}$$

así que la primera afirmación es clara. Supóngase ahora que

$$\chi(z) - F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| > M, \tag{2.30}$$

es el desarrollo de Laurent en $|z| > M$. Como

$$\int_C \left[\chi(z) - F(z)\right] P_n(z)\, dz = 0, \quad n \geq 0, \tag{2.31}$$

y $\{P_n(x)\}$ es una base de $\mathbb{C}[x]$, también

$$a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\chi(z) - F(z)\right] z^n \, dz = 0, \quad n \geq 0, \tag{2.32}$$

así que $\chi(z) - F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es analítica en $\mathbb{C}$. Finalmente, (2.26), la hipótesis sobre F y el teorema de Liouville ([23], p.228) implican que $\chi(z) - F(z) = c$ para todo $z \in \mathbb{C}$ y, de hecho, que $c = 0$. ■

REFERENCIAS

[1] Ahkiezer I. N. *The Clasical Moment Problem.* Hafner, New York, N.Y., 1965.

[2] Askey R., Ismail M.E.H. *Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials.* Mem. Amer. Math. Soc., 300 (1984), p. 100.

[3] Bank E. and Ismail M.E.H. *The attractive Coulomb potential polynomials.* Constructive Aproximation, 1 (1985).

[4] Charris J.A. and Gómez L.A. *Functional analysis, orthogonal polynomials and a theorem of Markov.* Rev. Col. de Mat., 22 (1988), 77–128.

[5] Charris J.A. and Ismail M.E.H. *Sieved orthogonal polynomials V: Pollaczek polynomials.* SIAM J. on Math. Anal., 18 (1987), 1177–1218.

[6] Charris J.A., Rodríguez–Blanco G. and Gómez C.P. *On two systems of orthogonal polynomials related to the Pollaczek polynomials.* Rev. Col. de Mat., por aparecer.

[7] Charris J.A. and Soriano F. *Complex and distributional weights for sieved ultraspherical polynomials.* Pre–impreso.

[8] Chihara T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach, New York, N.Y. 1978.

[9] Dunford N. and Schwartz J.T. *Linear Operators,* Vol I. Interscience, New York, N.Y., 1958.

[10] Fields J.L. *A unified treatment of Darboux's method.* Arch. Rat. Mech. and Anal., 27 (1968), 289–305.

[11] Ismail M.E.H. *Sieved orthogonal polynomials I: Symmetric Pollaczek analogues.* SIAM J. on Math. Anal., 16 (1985), 1093–1113.

[12] Ismail M.E.H., Masson D. and Rahmann M. *Complex weight functions for classical orthogonal polynomials.* Pre–impreso.

[13] Kim S. *Hiperfunctions and orthogonal polynomials.* Pre–impreso.

[14] Kim S. and Kwan K. *Generalized weights for orthogonal polynomials.* Pre–impreso.

[15] Krall A. *Orthogonal polynomials through moment functionals.* SIAM J. on Math. Anal., 9 (1978), 604–626.

[16] Morton R. and Krall A. *Distributional weight functions for orthogonal polynomoals.* SIAM J. on Math. Anal., 9 (1978), 604–626.

[17] Olver F.W.J. *Asymptotics and Special Functions.* Academic Press, New York, N.Y., 1974.

[18] Rainville E.D. *Special Functions. Macmillan,* New York, N.Y., 1974.

[19] Shohat J.A. and Tamarkin J.D. *The Problem of Moments.* Math. Surveys, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1943.

[20] Stone M. *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis.* Colloquium Publications, Amer. Math Soc. Providence, R.I., 1934.

[21] Szegö G. *Orthogonal Polynomials,* 4 th Ed. Colloquium Publications, Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.

[22] Yosida K. *Funtional Analysis.* Springer, Berlin, 1978.

[23] Rudin W. *Real and Complex Analysis,* 2nd. Ed. McGraw—Hill, New York, N.Y., 1974.