Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 11, Nº 1, enero-junio 1993

Acerca de la solución de los problemas planos mixtos de conductibilidad térmica no estacionaria

TARAS IVAKHNENKO *
ANATOLI USOV **

Examinemos el problema de contorno de conductibilidad térmica no estacionaria para el semiplano $x \geq 0$, sobre la frontera del cual fluye hacia el interior de la zona $|y| < l$ una corriente calórica $\frac{\partial T}{\partial x} = f(x,\tau)$ (fig. 1). En el resto de la frontera, $x = 0, |y| > l$, tiene lugar intercambio calórico de conve cción con el medio externo, la temperatura del cual, para simplificar, se considera nula. La temperatura del semiplano en el infinito también se considera nula.

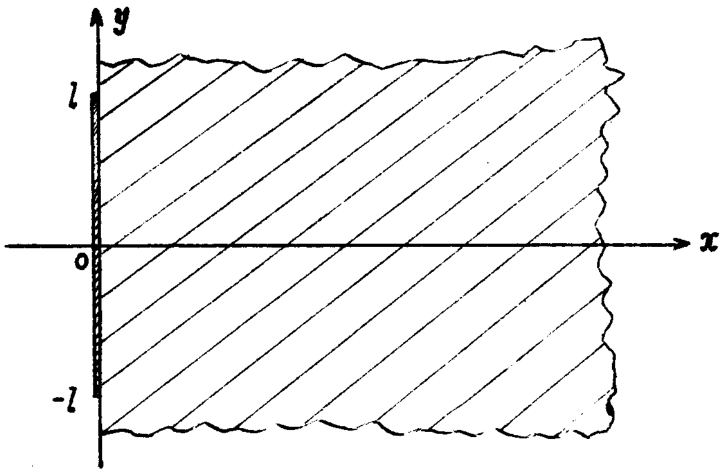

Figura 1
Esquema del problema

* Catedrático de la Universidad Autónoma de Bucaramanga; Investigador de la Corporación Tecnológica de Santander (Colombia).
** Profesor del Instituto Politécnico de Odessa (Ucrania).

La formulación matemática del problema tiene el siguiente aspecto:

(1) $$\frac{\partial T}{\partial x} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \ (0 \leq x < \infty, \ -\infty < y < \infty, \ 0 \leq t)$$

(2) $$T(x, y, 0) = 0 = T(\infty, y, t),$$

(3) $$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = f(y, t), \ |y| > l \ ,$$

(4) $$-\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} + \gamma T|_{x=0} = 0, \ |y| > l.$$

En las expresiones anteriores $T(x, y, t)$ es la temperatura
de un punto arbitrario (x, y) del semiplano en cualquier tiempo t ;
λ es la termodifusividad del material de que está hecho el semiplano ;
γ es el coeficiente de intercambio calórico con el medio ambiente .
Resolvemos el problema propuesto utilizando la transformada de Fourier
para la variable y:

(5) $$T_\alpha(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(x, y, t) e^{i\alpha y} dy \ .$$

La ecuación (1) se convertirá entonces en

(6) $$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t}(x, t) = a \left(\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2}(x, t) - \alpha^2 T_\alpha(x, y)\right).$$

Si las condiciones de frontera (2)-(4) las escribimos como

(7) $$\left[\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\gamma T}{\lambda}\right]_{x=0} = \begin{cases} 0, & si \ |y| > l \ , \\ X(y, t), & si \ |y| < l \ , \end{cases}$$

en donde $X(y, t)$ es una función desconocida , entonces la
transformada de Fourier de (7) será

(8) $$\left[\frac{\partial T_\alpha}{\partial x} + \frac{\gamma}{\lambda} T_\alpha\right]_{x=0} = \int_{-l}^{l} X(\eta, t) e^{i\alpha\eta} d\eta = X_\alpha(t).$$

De tal suerte, el problema inicial de frontera tendrá en transformadas de Fourier la forma

(9) $$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T_\alpha}{\partial x^2} - \alpha^2 T_\alpha\right),$$

(10) $$\frac{\partial T_\alpha}{\partial x} + \frac{\gamma}{\lambda} T_\alpha = X_\alpha(t),$$

(11-12) $$T_\alpha(0, x) = T_\alpha(t, \infty) = 0.$$

Aplicando a las iqualdades (9)-(12) la transformada de Laplace en la variable t, i. e.,

(13) $$\int_0^\infty e^{-pt} T_\alpha(x, t) dt = T_{\alpha p}(x),$$

obtenemos

(14) $$pT_{\alpha p} = a\left(\frac{d^2 T_{\alpha p}}{dx^2} - \alpha^2 T_{\alpha p}\right),$$

(15) $$\frac{dT_{\alpha p}}{dx} + \gamma T_{\alpha p} = X_{\alpha p}.$$

La ecuación (14), o sea

$$\frac{d^2 T_{\alpha p}}{dx^2} - (\alpha^2 + \frac{p}{a}) T_{\alpha p} = 0,$$

es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes, cuya correspondiete ecuación característica será $k^2 - b = 0$, $k_{1,2} = \sqrt{b}$, en donde $b = \sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}$.

La solución de la ecuación (14) según las raíces halladas tendrá la forma $T_{\alpha p}(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$. Para garantizar un valor finito de la temperatura en el infinito pongamos $C_1 = 0$. Entonces la solución será

$$T_{\alpha p}(x) = C e^{-\sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}\,x}. \tag{16}$$

Para la determinación en (16) de la constante arbitraria C utilizamos la condición de frontera (15) :

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dT_{\alpha p}}{dx}\right|_{x=0} = -C\sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}; \\ -C\sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}} - \gamma C = X_{\alpha p}. \end{cases} \tag{17}$$

Asi pues , la solución del problema (14)-(15) , considerando las relaciones (16) y (17) , va a tener la forma

$$\begin{cases} C = \dfrac{X_{\alpha p}}{\gamma + \sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}}; \\ T_{\alpha p}(x) = \dfrac{X_{\alpha p} e^{-\sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}\,x}}{\gamma + \sqrt{\alpha^2 + \frac{p}{a}}}. \end{cases} \tag{18}$$

La transformada inversa de Fourier para α en la expresión (18) nos da

$$T_p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\alpha p}(x) e^{-i\alpha y} d\alpha. \tag{19}$$

Teniendo en cuenta la expresión (8) para $X_p(y)$, la última igualdad la podemos escribir como

$$(20) \qquad T_p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{l} X_p(\eta)\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha y + i\alpha\eta - \sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}\,x}}{\gamma+\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}}\, d\alpha\, d\eta\,.$$

Puesto que

$$e^{-i\alpha(y-\eta)} = cos\big(\alpha(y-\eta)\big) - i\,sen\big(\alpha(y-\eta)\big),$$

entonces

$$(21) \qquad T_p(x,y) = \int_{-l}^{l} K_p(y-\eta,x)X_p(\eta)d\eta.$$

Utilizemos ahora la condición de frontera (3) después de aplicarle la transformada inversa de Fourier para α :

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial x}(0,y) = F_p(y), |y| < l;$$

entonces

$$(22) \qquad \begin{cases} \frac{\partial T_p}{\partial x}(x,y)\Big|_{x=0} = \int_{-l}^{l} X_p(\eta)\frac{\partial}{\partial x}K_p(y-\eta,x)d\eta\Big|_{x=0} = \\ = \int_{-l}^{l} X_p(\eta)d\eta\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{cos\big(\alpha(y-\eta)\big)\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}+\gamma}d\alpha = F_p(y). \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}+\gamma} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}+\gamma-\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}+\gamma} = 1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}}+\gamma},$$

y utilizando la conocida propiedad de la función δ de Dirac ,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}d\alpha = \frac{1}{\pi},$$

pasemos en (22) a la ecuación integral con respecto a la transformada de Laplace de $X_p(y)$:

$$\int_{-l}^{l} X_p(\eta)\left[\delta(y-\eta)+\frac{\gamma}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\alpha(y-\eta)\right)}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}+\gamma}}d\alpha\right]d\eta =$$

$$= X_p(y)+\frac{\gamma}{\pi}\int_{-l}^{l} X_p(\eta)\int_0^{\infty}\frac{\cos\left(\alpha(y-\eta)\right)}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}+\gamma}}d\alpha d\eta = F_p(y);$$

$$X_p(y)+\frac{\gamma}{\pi}\int_{-l}^{l} X_p(\eta)K_p(y-\eta,\alpha)d\eta = F_p(y). \tag{23}$$

Para la solución de la ecuación integral resultante nos valemos del método de los polinomios ortogonales propuesto en [1] , suponiendo que la función buscada $X(y,t)$ puede ser representada en forma de serie en polinomios de Laguerre :

$$X(y,t)=\sum_{m=0}^{\infty} X_m(y)2e^{-t}L_m(2t). \tag{24}$$

Entonces , utilizando la fórmula 7.414.6 de [2] tenemos

$$X_p(y)=\sum_{m=0}^{\infty} X_m(y)\int_0^{\infty} 2e^{-t-pt}L_m(2t)dt=\sum_{m=0}^{\infty} X_m(y)\left[\frac{p-1}{p+1}\right]^m\cdot\frac{2}{p+1}. \tag{25}$$

Aplicando ahora la fórmula de inversión de Riemann-Mellin , pasamos en la ecuación integral (23) a la siguiente :

$$X(y,t)-\frac{\gamma}{\pi}\int_{-l}^{l}\left[\frac{1}{2\pi i}\oint_L X_p(\eta)K_p(y-\eta)e^{pt}dp\right]d\eta = f(y,t). \tag{26}$$

Esta última ecuación la podemos reescribir , con ayuda de (24) , como

$$\sum_{m=0}^{\infty} X_m(y)2e^{-t}L_m(2t)+$$

$$
(27) \qquad +\frac{\gamma}{\pi}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \sum_{m=0}^{\infty} X_m(\eta)\left[\frac{p-1}{p+1}\right]^m \cdot \frac{2}{p+1}K_p(y-\eta)e^{pt}dp\right)d\eta = f(y,t).
$$

Si multiplicamos ambos miembros de (27) por $L_n(2t)e^{-t}$,
y luego integramos entre 0 y ∞ , tendremos

$$
(28) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{\infty} X_m(y)2e^{-t}L_m(2t)L_n(2t)e^{-t}dt + \\
& +\frac{\gamma}{\pi}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \left[\sum_{m=0}^{\infty} X_m(\eta)\left[\frac{p-1}{p+1}\right]^m \cdot \frac{2}{p+1}K_p(y-\eta)\times\right.\right. \\
& \left.\left.\times\int_0^{\infty} e^{-pt}L_n(2t)e^{-t}dt\right]dp\right)d\eta = \int_0^{\infty} f(y,t)L_n(2t)e^{-t}dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Puesto que

$$
\int_0^{\infty} e^{-t(1-p)}L_n(2t)dt = \left[\frac{p+1}{p-1}\right]^n \frac{1}{1-p},
$$

entonces la relación (28) la podemos escribir como

$$
(29) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} X_m(y)\cdot 2\int_0^{\infty} e^{-2t}L_m(2t)L_n(2t)dt + \\
& +\frac{\gamma}{\pi}\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=0}^{\infty} X_m(\eta)\oint_L \left[\frac{p+1}{p-1}\right]^{n-m} \cdot \frac{1}{1-p^2}K_p(y-\eta)dp\right)d\eta = \delta^{n}(-1)^{n}.
\end{aligned}
\right.
$$

Llegamos así finalmente al siguiente sistema de ecuaciones
integrales con respecto a la función X (y , t) como
se buscaba en la relación (24) (para ello se han
utilizado las propiedades de ortogonalidad de los polinomios Laguerre) :

(30)
$$C_i A_k^{(p)} + \frac{\gamma l}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(p)} B_{ij}^{(p)} = -\frac{q}{\lambda p},$$

(31)
$$B_{ij}^{(p)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_{2i}(x)P_{2j}(\xi)d\xi dx \int_0^{\infty} \frac{cos\big(\alpha l(x-\xi)\big)}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}+\frac{\gamma}{\lambda}}}d\alpha$$

(en donde P_{2i} y P_{2j} son polinomios de Legendre).
Examinemos el caso en el cual el flujo es una constante sobre la zona $|y|<l$, es decir, cuando

$$f(y,t) = q^* = constante\,.$$

Entonces el sistema de ecuaciones integrales (30), teniendo en cuenta la identidad

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_{2j}(\xi)P_{2i}(x)cos\big(\alpha l(x-\xi)\big)d\xi dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} P_{2j}(\xi)cos(\alpha l\xi)d\xi \int_{-1}^{1} P_{2i}(x)cos(\alpha l\xi)dx,$$

tendrá la forma

$$C_k A_k^{(p)} + \frac{\gamma l}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} A_j^{(p)} B_{jk}^{(p)} = q^*,$$

ó

$$C_0 A_0^{(p)} + \frac{\gamma l}{\pi}\big(A_0^{(p)}B_{00}^{(p)} + A_1^{(p)}B_{10}^{(p)} + A_i B_{20}^{(p)}\big) = q^*.$$

Para $k=0$ tenemos

$$B_{00}^{(p)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_0(\xi)P_0(x)d\xi dx \int_0^{\infty} \frac{cos\big(\alpha l(x-\xi)\big)}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}+\frac{\gamma}{\lambda}}}d\alpha,$$

$$B_{10}^{(p)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} P_1(\xi)P_0(x)d\xi dx \int_0^{\infty} \frac{cos\big(\alpha l(x-\xi)\big)}{\sqrt{\alpha^2+\frac{p}{a}+\frac{\gamma}{\lambda}}}d\alpha.$$

REFERENCIAS

[1] **POPOV Guenadi Y.** Problemas de contacto para base linealmente deformable. Visha Shkola, Kíev-Odessa, 1982 (en ruso).

[2] **GRADSHTEIN Israíl S., RYZHIK Iósif M.** Tablas de integrales, sumas, series y productos. Moscú, Naúka, 1971 (en ruso).