

Esferas Dodecaédricas Rómbicas Afines *

LUIS ENRIQUE RUIZ **

Abstract. Norms ϕ are constructed on \mathbb{R}^3 so that their closed spheres are affine rhombic dodecahedrons \mathcal{D} (images of rhombic dodecahedron under an affine automorphism of \mathbb{R}^3). Conversely, each closed solid \mathcal{D} is a unitary sphere with respect to a norm ϕ on \mathbb{R}^3 . In both cases ϕ is the maximum of six absolute values. This norm yields, in addition to a unified representation, a characterization of the points of the rhombic dodecahedron in terms of the diagonals of the cuboctahedron through its center.

INTRODUCCION. El dodecaedro rómbico fue descubierto por Johannes Kepler ([6], p.123) alrededor de 1611 ***, y corresponde al modelo construido de la siguiente manera ([3], p.130): tomar dos cubos sólidos iguales; cortar uno de ellos en seis pirámides basadas en las seis caras, con su ápice común en el centro del cubo; colocar esas pirámides sobre las respectivas caras del otro cu-

* Versión ampliada de la conferencia pronunciada en el IX Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística (Bogotá, 30.11-04.12.92).

** Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama, Colombia.

*** Estrictamente debería llamarse el **primer** dodecaedro rómbico, puesto que en 1960 Bilinski ([1], p. 251-263) halló otro a partir del icosaedro rómbico.

bo. El sólido resultante es el dodecaedro rómbico (ver Figura 1). Otra construcción alternativa puede verse en [5], p.26.

Cada cara rómbica tiene diagonales en la razón $1: \sqrt{2}$, y la más corta es una arista del cubo (ver Figura 1). Además, la insfera del dodecaedro rómbico es la esfera media de dicho cubo, de radio $\frac{\sqrt{2}}{2} \ell$, donde ℓ es la arista del cubo ([4], p.407; [7], pp.51-52).

Hasta el presente se ha mantenido una descripción global de este 12-edro sin aludir a una distinción específica de sus puntos en R^3 . Su geometría euclídea no ha incorporado de manera contundente los modernos conceptos topológicos del Análisis Convexo que permitan determinar sus propiedades puntuales.

En este sentido el objetivo del presente artículo es aportar una heurística y una metodología en el estudio del dodecaedro rómbico, considerándolo como una esfera respecto a una norma ϕ sobre R^3 , tan adecuada que permita caracterizar sus puntos (Corolario 2), entrelazando elementos familiares del cuboctaedro (uno de los sólidos convexos cuasi -regulares, [5], pp.17-19): bajo ciertas condiciones, seis rectas a través de sus diagonales por el centro, y un real positivo generan un dodecaedro rómbico.

Además la norma ϕ es de tal suerte que sus esferas son en general dodecaedros rómbicos afines (ver Definición 1), esto es, imágenes del dodecaedro rómbico bajo un automorfismo afín sobre R^3 (Teorema 1). Y viceversa, cada uno de estos sólidos afines es una esfera respecto a una cierta norma ϕ sobre R^3 (Corolario 1).

En todos los casos anteriores ϕ es el máximo de seis valores absolutos. Los alcances de esta norma llevarían a un posterior estudio y a una visión retrospectiva de las propiedades más notables del dodecaedro rómbico afín ([5], pp. 31, 256; [7], pp.51-52; [8], pp. 44, 48, 85-86, 88, 98). Denotaremos con letra impresa mayúscula los vectores (o puntos) en R^3 .

El Lema 1, el Teorema 1 y los Corolarios 1 y 2 del presente trabajo de investigación constituyen resultados nuevos.

OBSERVACION 1. Consideremos (como subconjunto de \mathbb{R}^3) el dodecaedro rómbico $v'_1 \dots v'_{14}$ de centro

$$G' = \frac{1}{2}(v'_i + v'_{i+7}), \quad i = 1, \dots, 7,$$

mostrado en la Figura 1. Partiendo de las anteriores propiedades se establecen fácilmente las siguientes relaciones:

$$\left. \begin{aligned} v'_4 &= v'_1 - v'_2 + v'_3, & v'_5 &= v'_1 - v'_2 + G', \\ v'_6 &= v'_1 - v'_3 + G', & v'_7 &= v'_2 - v'_3 + G', \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde los vectores $v'_i - G'$, $i = 1, 2, 3$ son linealmente independientes (esto es, G', v'_1, v'_2, v'_3 son afínmente independientes en \mathbb{R}^3).

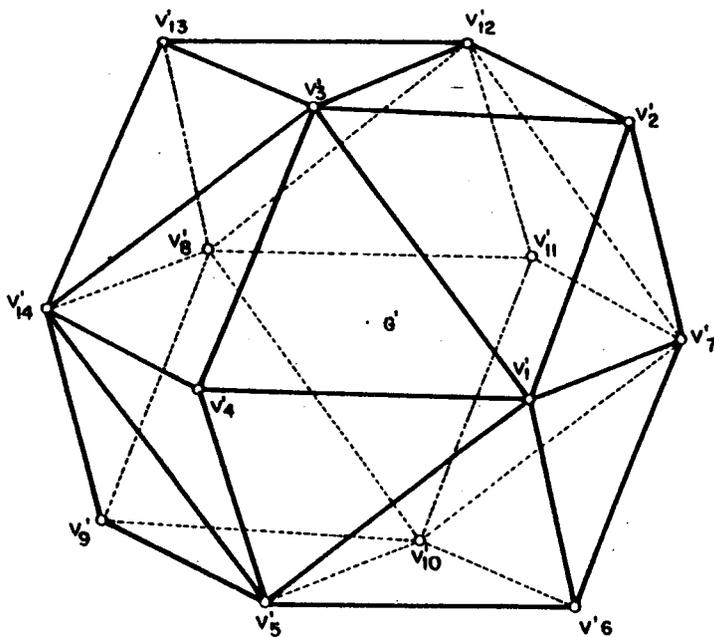


Figura 1. El dodecaedro rómbico.



DEFINICION 1. Un dodecaedro rómbico afín es la imagen de un dodecaedro rómbico bajo un automorfismo afín de \mathbb{R}^3 (ver Figura 2).

LEMA 1. Si A_1, \dots, A_6 son seis vectores dados en \mathbb{R}^3 tales que $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, entonces la función $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(X) = \max_{1 \leq k \leq 6} |A_k \cdot X|, \quad X \in \mathbb{R}^3 \quad (2)$$

es una norma sobre \mathbb{R}^3 .

Demostración. Las relaciones

$$0 \leq |A_k \cdot X| \leq \phi(X) = 0, \quad k = 1, \dots, 6,$$

son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$A_k \cdot X = 0, \quad k = 1, \dots, 6.$$

Por ser $\det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, el rango de la matriz de los coeficientes es 3, y el sistema tiene como solución única $X = 0$. La misma definición de ϕ nos da $\phi(\lambda X) = |\lambda| \phi(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y

$$\begin{aligned} |A_k \cdot (X + Y)| &= |A_k \cdot X + A_k \cdot Y| \leq \\ &\leq |A_k \cdot X| + |A_k \cdot Y| \leq \phi(X) + \phi(Y), \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, 6$, lo cual implica

$$\phi(X + Y) \leq \phi(X) + \phi(Y).$$

The first part of the proof shows that if \mathcal{A} is a \mathcal{C} -algebra, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra for any \mathcal{B} . This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} .

The second part of the proof shows that if \mathcal{A} and \mathcal{B} are \mathcal{C} -algebras, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra. This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} and \mathcal{B} .

$$(5) \quad \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

The third part of the proof shows that if \mathcal{A} and \mathcal{B} are \mathcal{C} -algebras, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra. This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} and \mathcal{B} .

The fourth part of the proof shows that if \mathcal{A} and \mathcal{B} are \mathcal{C} -algebras, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra. This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} and \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

The fifth part of the proof shows that if \mathcal{A} and \mathcal{B} are \mathcal{C} -algebras, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra. This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} and \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

The sixth part of the proof shows that if \mathcal{A} and \mathcal{B} are \mathcal{C} -algebras, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra. This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} and \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

The seventh part of the proof shows that if \mathcal{A} and \mathcal{B} are \mathcal{C} -algebras, then $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ is a \mathcal{C} -algebra. This is done by checking that the operations on $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ are well-defined and satisfy the same axioms as those on \mathcal{A} and \mathcal{B} .

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \cong \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$$

TEOREMA 1. Sea ϕ la norma sobre \mathbb{R}^3 definida en (2) tal que

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta &= \det(A_1, A_2, A_3) = \det(A_1, A_2, A_4) \\
 &= -\det(A_1, A_2, A_6) = \det(A_1, A_3, A_4) \\
 &= \det(A_1, A_3, A_5) = -\det(A_1, A_3, A_6) \\
 &= \det(A_1, A_4, A_5) = \det(A_1, A_5, A_6) \\
 &= \det(A_2, A_3, A_4) = \det(A_2, A_3, A_5) \\
 &= \det(A_2, A_4, A_5) = \det(A_2, A_4, A_6) \\
 &= \det(A_2, A_5, A_6) = \det(A_3, A_4, A_6) \\
 &= \det(A_3, A_5, A_6) = \det(A_4, A_5, A_6) \neq 0, \\
 &\det(A_1, A_2, A_5) = \det(A_1, A_4, A_6) \\
 &= \det(A_2, A_3, A_6) = \det(A_3, A_4, A_5) = 0 ;
 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

y sean

$$\left. \begin{aligned}
 V_1 &= G + cA_2 \times A_3, & V_2 &= G + cA_1 \times A_3, \\
 V_3 &= G + cA_1 \times A_4, & V_4 &= G + cA_2 \times A_4, \\
 V_5 &= G + cA_3 \times A_4, & V_6 &= G + cA_5 \times A_6, \\
 V_7 &= G + cA_1 \times A_2, \\
 V_{i+7} &= 2G - V_i, & i &= 1, \dots, 7,
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

donde $c = \frac{\lambda}{\Delta}$, $\lambda > 0$.

Entonces $S_A[G]$ (la esfera cerrada de centro G y radio r respecto a la norma ϕ) es un dodecaedro rómbico afín sólido cerrado centralmente simétrico en G de vértices V_1, \dots, V_{14} dados en (4) y dispuestos como se muestra en la Figura 2.

Además los vectores A_1, \dots, A_6 son normales, respectivamente, a las caras

$$\left. \begin{array}{l} V_1 V_4 V_5 V_6, \quad V_5 V_9 V_{10} V_6, \quad V_6 V_{10} V_{11} V_7, \\ V_1 V_6 V_7 V_2, \quad V_1 V_2 V_3 V_4, \quad V_4 V_5 V_9 V_{14}, \end{array} \right\} \quad (5)$$

y a sus respectivas caras opuestas (y paralelas) respecto a G ,

$$\left. \begin{array}{l} V_8 V_{11} V_{12} V_{13}, \quad V_{12} V_2 V_3 V_{13}, \quad V_{13} V_3 V_4 V_{14}, \\ V_8 V_{13} V_{14} V_9, \quad V_8 V_9 V_{10} V_{11}, \quad V_{11} V_{12} V_2 V_7. \end{array} \right\} \quad (6)$$

Demostración. Usando las relaciones (3), (4) y $(A \times B) \times (C \times D) = (A \times B \cdot D)C - (A \times B \cdot C)D$, obtenemos

$$\det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = c^3 \Delta^2 \neq 0,$$

es decir, G, V_1, V_2, V_3 son afinmente independientes en \mathbb{R}^3 , lo mismo (según la Observación 1) que G', V_1', V_2', V_3' . Por tanto existe un único automorfismo afín $\delta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\delta(G') = G, \quad \delta(V_k') = V_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad (7)$$

([2], p. 429; [9], p. 8).

Notando que A_4, A_5 y A_6 son combinaciones lineales de A_1, A_2, A_3 , dado que $\Delta = \det(A_1, A_2, A_3) \neq 0$, tenemos

$$A_4 = A_1 - A_2 + A_3, \quad A_5 = A_1 - A_2, \quad A_6 = A_2 - A_3,$$

y de aquí las relaciones

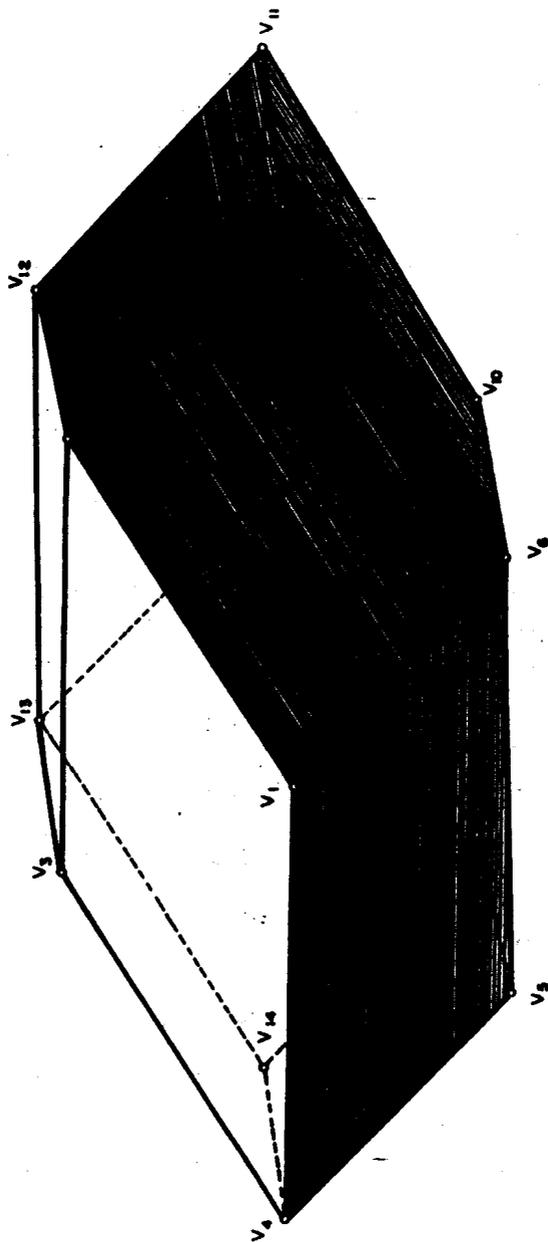


Figura 2

La esfera poliédrica $S_h[G]$ respecto de la norma ϕ .

$$\left. \begin{aligned} v_4 &= v_1 - v_2 + v_3, & v_5 &= v_1 - v_2 + G, \\ v_6 &= v_1 - v_3 + G, & v_7 &= v_2 - v_3 + G. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Atendiendo a éstas y a las expresiones en (7), las combinaciones lineales promedio (la suma de cuyos coeficientes es uno)

$$v'_{\lambda+7} = 2G' - v'_{\lambda}, \quad \lambda = 1, \dots, 7,$$

y las listadas en (1) nos aportan

$$f(v'_{\lambda}) = v_{\lambda}, \quad \lambda = 1, \dots, 14$$

([2], p.423).

Concluimos de acuerdo con la Definición 1 que $v_1 \dots v_{14}$ es un dodecaedro rómbico afín de centro G y vértices dispuestos como se muestra en la Figura 2.

Puede verificarse (acudiendo a las relaciones en (3)) que los paralelogramos en (5) están en los planos

$$(X-G)A_k = \lambda, \quad k = 1, \dots, 6 \quad (9)$$

y los listados en (6) en

$$(X-G)A_k = -\lambda, \quad k = 1, \dots, 6,$$

respectivamente.

En otra dirección, si consideramos el dodecaedro rómbico afín $v_1 \dots v_{14}$ como un sólido cerrado \mathcal{C} , entonces

$$\mathcal{C} = \text{conv } S,$$

la envolvente convexa de sus vértices $S = \{v_1, \dots, v_{14}\}$ ([9], p.158, Theorem 17.2; p.12, Corollary 2.3.1). Siendo

cada X en \mathcal{C} una combinación convexa de la forma

$$X = \sum_{j=1}^{14} \lambda_j v_j = G + \sum_{j=1}^7 (\lambda_j - \lambda_{j+7}) (v_j - G),$$

donde

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{14} = 1, \text{ y cada } \lambda_j \geq 0,$$

se desprende

$$\left. \begin{aligned} (X-G)A_1 &= \lambda \{ (\lambda_1 - \lambda_8) + (\lambda_4 - \lambda_{11}) + (\lambda_5 - \lambda_{12}) + (\lambda_6 - \lambda_{13}) \}, \\ (X-G)A_2 &= \lambda \{ (\lambda_9 - \lambda_2) + (\lambda_{10} - \lambda_3) + (\lambda_5 - \lambda_{12}) + (\lambda_6 - \lambda_{13}) \}, \\ (X-G)A_3 &= \lambda \{ (\lambda_{10} - \lambda_3) + (\lambda_{11} - \lambda_4) + (\lambda_6 - \lambda_{13}) + (\lambda_7 - \lambda_{14}) \}, \\ (X-G)A_4 &= \lambda \{ (\lambda_1 - \lambda_8) + (\lambda_2 - \lambda_9) + (\lambda_6 - \lambda_{13}) + (\lambda_7 - \lambda_{14}) \}, \\ (X-G)A_5 &= \lambda \{ (\lambda_1 - \lambda_8) + (\lambda_2 - \lambda_9) + (\lambda_3 - \lambda_{10}) + (\lambda_4 - \lambda_{11}) \}, \\ (X-G)A_6 &= \lambda \{ (\lambda_9 - \lambda_2) + (\lambda_4 - \lambda_{11}) + (\lambda_5 - \lambda_{12}) + (\lambda_{14} - \lambda_7) \}, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

expresiones que de acuerdo con la desigualdad triangular arrojan

$$\phi(X-G) = \max_{1 \leq k \leq 6} |(X-G)A_k| \leq \lambda;$$

en otras palabras, $\mathcal{C} \subseteq S_\lambda[G]$, la esfera cerrada respecto a la norma ϕ .

Por ser $\phi(X-G)$ una función real convexa propia cerrada para todo $X \in \mathbb{R}^3$, se tiene

$$\text{Int}(S_\lambda[G]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(X-G) < \lambda\} = S_\lambda(G),$$

$$\text{Fr}(S_\lambda[G]) = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \phi(X-G) = \lambda\}$$

([9], p.59, Corollary 7.6.1).

Si $X \in \text{conv}\{V_1, \dots, V_4\} \subseteq \mathcal{C}$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ no negativos, $\lambda_1 + \dots + \lambda_4 = 1$, tales que

$$X = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_4 V_4 + 0 \cdot V_5 + \dots + 0 \cdot V_{14},$$

reduciéndose las expresiones en (10) a

$$(X-G)A_1 = \lambda(\lambda_1 + \lambda_4), \quad (X-G)A_2 = \lambda(-\lambda_2 - \lambda_3),$$

$$(X-G)A_3 = \lambda(-\lambda_3 - \lambda_4), \quad (X-G)A_4 = \lambda(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$(X-G)A_5 = \lambda(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = \lambda,$$

$$(X-G)A_6 = \lambda(-\lambda_2 + \lambda_4),$$

lo que implica

$$\phi(X-G) = \lambda \quad \text{y} \quad \text{conv}\{V_1, \dots, V_4\} \subseteq \text{Fr}(S_\lambda[G]).$$

Así, usando (10) en general se prueba (¡con laboriosidad!) que todas las caras de \mathcal{C} están contenidas en $\text{Fr}(S_\lambda[G])$. Por tanto

$$\mathcal{C} \subseteq S_\lambda[G] \quad \text{y} \quad \text{Fr}(\mathcal{C}) \subseteq \text{Fr}(S_\lambda[G]). \quad (11)$$

Si $X \in S_\lambda[G] \cap \mathcal{C}$, entonces X es un punto interior de \mathcal{C} (= $\mathbb{R}^3 \cap \mathcal{C}$) por ser \mathcal{C} cerrado, y el segmento $\overline{GX} \subseteq S_\lambda[G]$ corta a $\text{Fr}(\mathcal{C})$ en un punto P entre G y X (por ser \mathcal{C} un poliedro convexo), esto es, $P \in \text{Int}(S_\lambda[G])$, ([9], p.45, Theorem 6.1), y además por (11) $P \in \text{Fr}(S_\lambda[G])$, lo cual es imposible. Así que $S_\lambda[G] \subseteq \mathcal{C}$.

COROLARIO 1. Si \mathcal{C} es un dodecaedro rómbico afín sólido cerrado de vértices V_1, \dots, V_{14} dispuestos como se muestra en la Figura 2, y centro

$$G = \frac{1}{2} (V_i + V_{i+7}), \quad i = 1, \dots, 7,$$

y si hacemos

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \nabla^{-1} (V_2 - G) \times (V_3 - G), \\ A_2 &= \nabla^{-1} (V_1 - G) \times (V_4 - G), \\ A_3 &= -\nabla^{-1} (V_1 - G) \times (V_2 - G), \\ A_4 &= A_1 - A_2 + A_3, \quad A_5 = A_1 - A_2, \\ A_6 &= A_2 - A_3, \\ \nabla &= \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

entonces A_1, \dots, A_6 satisfacen las relaciones en (3), y para estos vectores $\mathcal{C} = S_1[G]$, respecto a la norma ϕ sobre \mathbb{R}^3 definida en (2).

Demostración. Por la Definición 1 \mathcal{C} es un poliedro no degenerado y por tanto $\nabla \neq 0$. Si $V_1 \dots V_4$ es el paralelogramo en la Figura 2, entonces sus lados opuestos son iguales y paralelos. Así,

$$V_4 - G = (V_1 - G) - (V_2 - G) + (V_3 - G).$$

De esta relación y las propiedades de los determinantes obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla &= \det(V_1 - G, V_2 - G, V_3 - G) = \det(V_1 - G, V_2 - G, V_4 - G) \\ &= \det(V_1 - G, V_3 - G, V_4 - G) = \det(V_2 - G, V_3 - G, V_4 - G). \end{aligned}$$

Es rutinario verificar que A_1, \dots, A_6 satisfacen las relaciones en (3). Para estos vectores consideremos la norma ϕ sobre

\mathbb{R}^3 definida en (2). Por el Teorema 1 la esfera cerrada unitaria $S_1[G]$ (respecto a ϕ) es un dodecaedro rómbico afín de centro G . Acudiendo (además de las de arriba) a las expresiones en (12) y (8), se demuestra que los vértices de $S_1[G]$ son justamente v_1, \dots, v_{14} , es decir, $S_1[G] = \mathcal{E}$.

ILUSTRACION 1. Sea el dodecaedro rómbico de centro el origen, arista $\sqrt{3}$ y vértices dispuestos como en la Figura 2,

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (0, 0, 2), \quad v_3 = (1, -1, 1),$$

$$v_4 = (2, 0, 0), \quad v_5 = (1, 1, -1), \quad v_6 = (0, 2, 0),$$

$$v_7 = (-1, 1, 1), \quad v_{i+7} = -v_i, \quad i = 1, \dots, 7.$$

En este caso $V = \det(v_1, v_2, v_3) = 4$, y las expresiones en (12) se reducen a

$$2A_1 = (1, 1, 0), \quad 2A_2 = (0, 1, -1), \quad 2A_3 = (-1, 1, 0)$$

$$2A_4 = (0, 1, 1), \quad 2A_5 = (1, 0, 1), \quad 2A_6 = (1, 0, -1).$$

Concluimos del Corolario 1 que $X = (x_1, x_2, x_3)$ en \mathbb{R}^3 es un punto de este sólido cerrado si y sólo si satisface su inecuación

$$\max_{\substack{i, j=1, 2, 3 \\ i \neq j}} |x_i \pm x_j| \leq 2.$$

* * *

El hecho de que los vértices de un cuboctaedro sean los puntos medios de las aristas de un cubo ([5], p.17-18) nos permite caracterizar a continuación los puntos del dodecaedro rómbico.

COROLARIO 2. Si \mathcal{E} es un dodecaedro rómbico sólido cerrado de centro G y arista a , y si C_1, \dots, C_6 son los centros de seis caras rómbicas no opuestas de \mathcal{E} , entonces

1) La inecuación de \mathcal{E} es

$$\max_{1 \leq k \leq 6} |(C_k - G)(X - G)| \leq \frac{2a^2}{3},$$

donde la igualdad es la ecuación de su frontera.

ii) Si en el cuboctaedro de centro G y vértices C_k , $2G - C_k$, $k = 1, \dots, 6$, la recta L_k contiene la diagonal que une a C_k y $2G - C_k$, entonces

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \max_{1 \leq k \leq 6} \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } L_k \leq \frac{\sqrt{6}}{3} a \}$$

(ver Figura 3).

Demostración. Consideremos a \mathcal{E} de vértices V_1, \dots, V_{14} dispuestos como en la Figura 3. Por el Corolario 1, $\mathcal{E} = S_1[G]$ respecto a la norma ϕ sobre \mathbb{R}^3 definida en (2) sujeta a las condiciones en (12).

Si C_1, \dots, C_6 son los centros (punto medio de la diagonal más corta) de los rombos $V_1V_4V_5V_6$; $V_5V_9V_{10}V_6$; $V_6V_{10}V_{11}V_7$, $V_1V_6V_7V_2$, $V_1V_2V_3V_4$, $V_4V_5V_9V_{14}$, respectivamente, entonces $C_1 - G, \dots, C_6 - G$ son vectores normales a estas caras, respectivamente (la insfera de \mathcal{E} es la esfera media del cubo inscrito en \mathcal{E}).

De acuerdo con la construcción de \mathcal{E} descrita en la Introducción, con la última parte del Teorema 1 y con las relaciones en (9), existen escalares t_k tales que $A_k = t_k(C_k - G)$ y

$$t_k(C_k - G)(V_{i_k} - G) = 1, \quad i = 1, \dots, 6,$$

$$i_1 = 1, \quad i_2 = 5, \quad i_3 = 6, \quad i_4 = 2, \quad i_5 = 3, \quad i_6 = 4,$$

de modo que siendo $|C_k - G| = \frac{\sqrt{6}}{3} a$, $k = 1, \dots, 6$ (el radio de la insfera de \mathcal{E}) la distancia de G a los planos de dichas caras, entonces

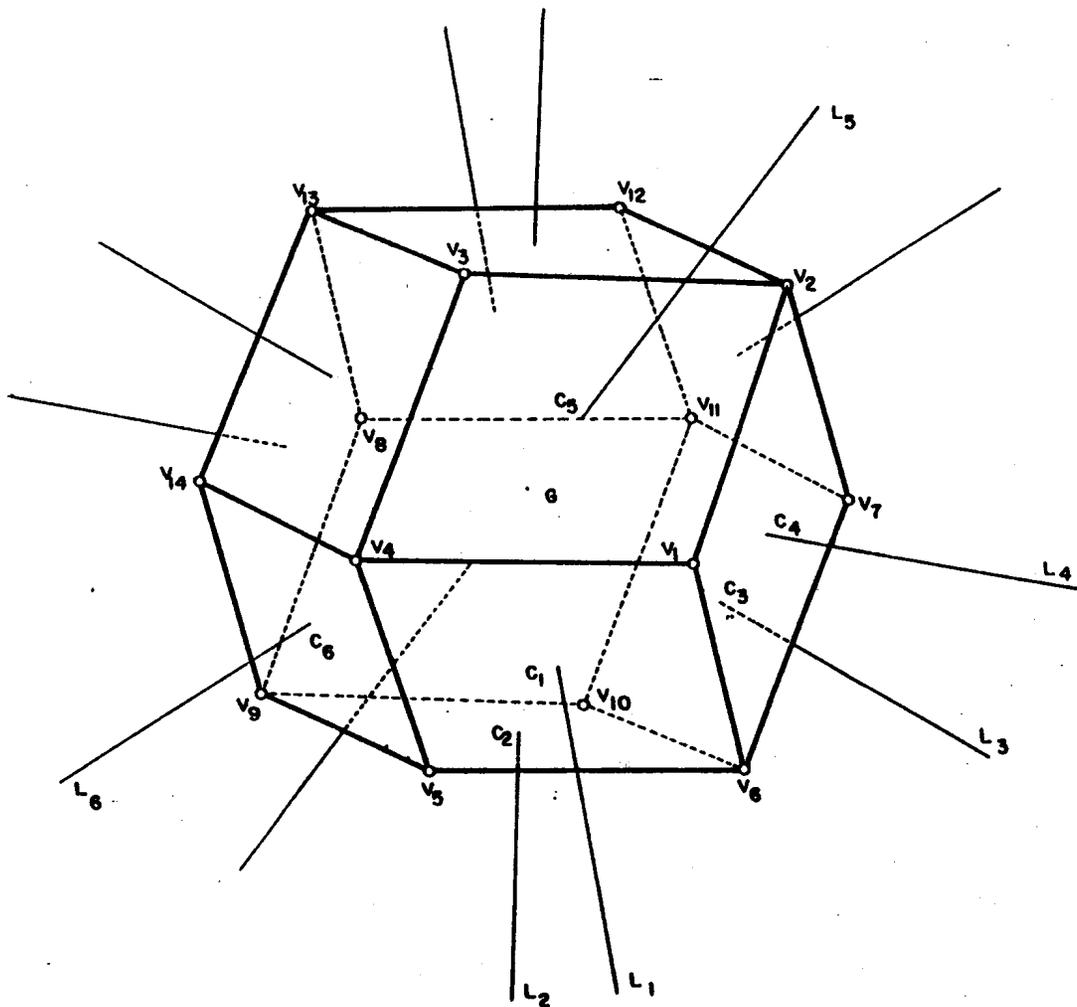


Figura 3

Dado $a > 0$, el lugar geométrico

$$\left\{ X \in \mathbb{R}^3 \mid \max_{1 \leq k \leq 6} \text{Proyección de } \overline{XG} \text{ sobre } L_k < \frac{\sqrt{6}}{3} a \right\}$$

es un dodecaedro rómbico sólido cerrado de centro G y arista a , donde L_1, \dots, L_6 son rectas que pasan por G y contienen diagonales de un cuboctaedro.

$$\frac{\sqrt{6}}{3} a = \frac{|(C_k - G)(V_k - G)|}{|C_k - G|} \quad \text{y} \quad |x_k| = \frac{3}{2a^2},$$

$$k = 1, \dots, 6,$$

reduciéndose $\phi(X-G) < 1$ a

$$\max_{1 \leq k \leq 6} |(C_k - G)(X - G)| < \frac{2a^2}{3},$$

o bien

$$\max_{1 \leq k \leq 6} |X - G| |\cos \theta_k| < \frac{\sqrt{6}}{3} a,$$

donde θ_k es el ángulo entre $X - G \neq 0$ y $C_k - G$, $k = 1, \dots, 6$.

*

BIBLIOGRAFIA

- [1] BILINSKI. *Über die Rhombenoeder*. Glasnik, 15 (1960).
- [2] BIRKHOFF G., MAC LANE S. *Algebra*. The Macmillan Company, Fourth Printing, 1970.
- [3] BRÜCKNER. *Vielecke und Vielfläche*. Leipzig, 1900.
- [4] COXETER H.S.M. *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons, Inc., second edition, Wiley Classics Library Edition, Published 1989.
- [5] ———, *Regular Polytopes*. Dover Publications, Inc., New York, Third edition, 1973.
- [6] KEPLER Johannes. *Harmonice Mundi, Opera Omnia*, Vol. 5. Frankfurt, 1864.

- [7] LYUSTERNIK L.A. *Convex Figures and Polyhedra*. Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [8] MIYAZAKI Koji. *An Adventure in Multidimensional Space*. John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [9] ROCKAFELLAR Ralph T. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey. 1972.