Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 10, No. 1, enero-junio 1992

Fundamentación Matemática de la Transformación discreta de Hartley

IVAN CASTRO CHADID[1]
FABIO MOLINA FOCAZZIO
YOLIMA UMAÑA HERNANDEZ
DIONICIO VILLALBA ALDAÑA
ALVARO DUQUE HOYOS, S.J.

RESUMEN

Se presenta una deducción rigurosa en forma matricial de la transformada discreta de Hartley para 2^n datos .

ABSTRACT

In this paper we give a rigorous deduction in matrix form of the Hartley discrete transform for 2^n data.

TRANSFORMADA DISCRETA DE HARTLEY

Notaremos TDH cuando hagamos referencia a la transformada discreta de Hartley.

DEFINICION 1:

Sea { f(0), f(1), ... , f(N-1) } un conjunto de datos reales; se define su TDH como el conjunto { H(0), H(1), ... , H(N-1) }, en donde :

---

[1]Todos los autores son participantes del Seminario de Investigación en Transformada Rápida de Fourier , del Departamento de Matemáticas de la Universidad Javeriana de Bogotá , Colombia.

$$\boxed{H(\vartheta) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\tau}{N}\right)},$$

$\vartheta = 0, 1, \ldots, N-1$ y
$\mathrm{cas}\ \phi = \cos\phi + \mathrm{sen}\ \phi$.

EJERCICIO 1:

Calcular la TDH para dos datos .

Desarrollo :

$$\{ f(0), f(1) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{H(0),H(1)\};$$

$$H(0)= \tfrac{1}{2}\left(f(0) + f(1) \right);$$

$$H(1)= \tfrac{1}{2}\left(f(0) - f(1) \right);$$

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix};$$

si notamos

$$\mathcal{H}_2 = \begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{F_2} = \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \end{bmatrix},$$

entonces

$$\boxed{\mathcal{H}_2 = \tfrac{1}{2}\ \mathcal{M}^{(1)}\ \vec{F_2}}.$$

RELACION ENTRE LAS TRANSFORMADAS DISCRETAS DE HARTLEY Y FOURIER

TDF representa la Transformada Discreta de Fourier.
La TDF de $\{ f(0), f(1), \cdots, f(N-1) \}$ se define como el conjunto $\{ F(0), F(1), \cdots, F(N-1) \}$,

en donde

$$F(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\ e^{\left(\frac{-2\pi\vartheta\tau i}{N}\right)},$$

$\vartheta = 0, 1, \ldots, N-1$.

TEOREMA 1:

$$F(\vartheta) = \frac{N}{4\pi}\Big((H(\vartheta) + H(-\vartheta)) - i\ (H(\vartheta) - H(-\vartheta)) \Big),$$

$\vartheta = 0, 1, \ldots, N-1$.

OBSERVACION 1:
La TDH transforma únicamente datos reales.

TEOREMA 2:

Si los datos $\{ f(0), f(1), \cdots, f(N-1) \}$ tienen TDH $\{ H(0), H(1), \cdots, H(N-1) \}$,
entonces los datos $\{ f(0), 0, f(1), 0, \cdots, f(N-1), 0 \}$
tienen TDH
$\{ \tfrac{1}{2}H(0), \tfrac{1}{2}H(1), \cdots, \tfrac{1}{2}H(N-1), \tfrac{1}{2}H(0), \tfrac{1}{2}H(1), \cdots, \tfrac{1}{2}H(N-1) \}$.

Demostración:

Sea

$$g(\beta) = \begin{cases} f(\frac{\beta}{2}), & \text{si } \beta \text{ es par}, \\ 0, & \text{si } \beta \text{ es impar}, \end{cases}$$

$0 \le \beta \le 2N-1$.

Supongamos que el conjunto $\{ g(0), g(1), \cdots, g(2N-1) \}$ tiene TDH
$\{ H^*(0), H^*(1), \cdots, H^*(2N-1)\}$, siendo

$$H^*(\vartheta) = (2N)^{-1} \sum_{\beta=0}^{2N-1} g(\beta)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\beta}{2N}\right)$$

$$(\vartheta = 0, 1, \ldots, N-1),$$

$$H^*(\vartheta) = (2N)^{-1} \sum_{k=0}^{N-1} g(2k)\ \mathrm{cas}\left(\frac{\pi\vartheta 2k}{N}\right) =$$

$$= (2N)^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\tau}{N}\right) =$$

$$= \tfrac{1}{2}\ H(\vartheta) \quad ;$$

si $N \leq \vartheta \leq 2N-1$, entonces $\vartheta = \vartheta' + N$, con $0 \leq \vartheta' \leq N-1$.
En forma similar, tenemos

$$H^*(\vartheta) = (2\,N)^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi(\vartheta'+N)\tau}{N}\right) =$$
$$= (2\,N)^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta'\tau}{N}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\ H(\vartheta')\ .$$

TEOREMA 3 *(DE DESPLAZAMIENTO)*.

Dadas f y g funciones periódicas, de período N, tales que $g(\tau) = f(\tau+a)$, $a \in \mathbb{Z}$ (a fijo), si el conjunto

$$\{\ f(0),\ f(1),\ \cdots,\ f(N-1)\ \}$$

tiene TDH

$$\{\ H(0),\ H(1),\ \cdots,\ H(N-1)\ \},$$

entonces el conjunto

$$\{\ g(0),\ g(1),\ \cdots,\ g(N-1)\ \}$$

tiene TDH

$$\{\ G(0),\ G(1),\ \cdots,\ G(N-1)\},$$

siendo

$$G(\vartheta) = H(\vartheta)\ \cos\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right) - H(N-\vartheta)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right),$$
$$0 \leq \vartheta \leq N-1\ .$$

Demostración:

$$G(\vartheta) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} g(\tau)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\tau}{N}\right) =$$
$$= N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau+a)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\tau}{N}\right).$$

Sea $\mu=\tau+a$; entonces

$$G(\vartheta) = N^{-1} \sum_{\mu=a}^{a+N-1} f(\mu)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta(\mu-a)}{N}\right);$$

pero

$$\mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta(\mu-a)}{N}\right) = \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\mu}{N}\right)\cos\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right) - \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\mu(N-\vartheta)}{N}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right),$$

de donde

$$G(\vartheta) = N^{-1}\left(\sum_{\mu=a}^{a+N-1} f(\mu)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\mu}{N}\right)\right)\cos\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right) -$$
$$- N^{-1}\left(\sum_{\mu=a}^{a+N-1} f(\mu)\ \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi\mu(N-\vartheta)}{N}\right)\right)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right);$$

por lo tanto,

$$G(\vartheta) = H(\vartheta)\ \cos\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right) - H(N-\vartheta)\ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi\vartheta a}{N}\right).$$

OBSERVACION 2:

En general, asumiremos que la función f que vamos a utilizar es periódica de período N.

EJERCICIO 2:
Calcular la TDH para el conjunto
$\{\ 0,\ f(0),\ 0,\ f(1),\ 0,\ \cdots,\ f(N-1)\ \}$.

Desarrollo:
Sean h y g funciones periódicas, de período 2N tales que

$$h(\beta) = \begin{cases} f(\frac{\beta}{2}), & \text{si } \beta \text{ es par},\\ 0, & \text{si } \beta \text{ es impar},\end{cases}$$

$0 \leq \beta \leq 2N-1$ y $g(\vartheta) = h(\vartheta-1)$ $\forall\ \vartheta$.

Si la TDH de $\{\ h(0),\ h(1),\ \cdots,\ h(2N-1)\ \}$ es

$$\{\ \hat{H}(0),\ \hat{H}(1),\ \cdots,\ \hat{H}(2N-1)\ \},$$

entonces

$$\hat{H}(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ H(\vartheta), & \text{si } 0 \leq \vartheta \leq N-1,\\ \frac{1}{2}\ H(\vartheta-N), & \text{si } N \leq \vartheta \leq 2N-1,\end{cases}$$

siendo

$$H(\vartheta) = N^{-1} \sum_{\tau=0}^{N-1} f(\tau) \operatorname{cas}\left(\frac{2\pi\vartheta\tau}{N}\right) \quad \text{para} \quad 0 \le \vartheta \le N-1$$

(Teorema 2) ;

por otra parte, si la TDH de $\{ g(0), g(1), \cdots, g(2N-1) \}$

es $\{ \hat{G}(0), \hat{G}(1), \cdots, \hat{G}(2N-1) \}$,

entonces

$$\hat{G}(\vartheta) = \hat{H}(\vartheta) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) + \hat{H}(2N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right)$$

para $0 \le \vartheta \le 2N-1$ (Teorema 3) ;

luego

$$\hat{G}(\vartheta) = \tfrac{1}{2} H(\vartheta) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) + \tfrac{1}{2} H(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right),$$

si $0 \le \vartheta \le N-1$;

$$\hat{G}(\vartheta) = \tfrac{1}{2} H(\vartheta-N) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) + \tfrac{1}{2} H(2N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right),$$

si $N \le \vartheta \le 2N-1$;

de donde

La TDH de $\{ 0, f(0), 0, f(1), 0, \cdots, f(N-1) \}$ es

$\{ \hat{G}(0), \hat{G}(1), \cdots, \hat{G}(N-1), \hat{G}(N), \cdots, \hat{G}(2N-1) \}$,

siendo

$$\hat{G}(\vartheta) = \tfrac{1}{2}\left(H(\vartheta) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) + H(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right)\right) \text{ y}$$

$$\hat{G}(N+\vartheta) = \tfrac{1}{2}\left(- H(\vartheta) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) - H(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$

si $0 \le \vartheta \le N-1$.

OBSERVACION 3:
Con base en la definición 1 se ve claramente que la TDH es lineal.

Teorema 4 (*TEOREMA DE HARTLEY*).

Si $\{ f(0), f(1), \cdots, f(N-1) \}$ tiene TDH

$\{ H'(0), H'(1), \cdots, H'(N-1) \}$,

y $\{ g(0), g(1), \cdots, g(N-1) \}$ tiene TDH

$\{ H^*(0), H^*(1), \cdots, H^*(N-1)\}$,

entonces

$\{ f(0), g(0), f(1), g(1), \cdots, f(N-1), g(N-1) \}$ tiene TDH

$\{ \widetilde{H}(0), \widetilde{H}(1), \cdots, \widetilde{H}(2N-1) \}$, siendo

$$\widetilde{H}(\vartheta) = \tfrac{1}{2} H'(\vartheta) + \tfrac{1}{2}\left(H^*(\vartheta) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) + H^*(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$

$$\widetilde{H}(N+\vartheta) = \tfrac{1}{2} H'(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\left(H^*(\vartheta) \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) + H^*(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$

si $0 \le \vartheta \le N-1$.

Demostración :

$\{ f(0), 0, f(1), 0, \cdots, f(N-1), 0 \}$ tiene TDH

$\{ H_2(0), H_2(1), \cdots, H_2(2N-1) \}$, y

$\{ 0, g(0), 0, g(1), \cdots, 0, g(N-1) \}$ tiene TDH

$$\{ H_3(0),\ H_3(1),\ \cdots ,\ H_3(2N-1) \},$$

siendo

$$H_2(\vartheta) = \tfrac{1}{2} H'(\vartheta),$$
$$H_3(\vartheta) = \tfrac{1}{2}\left(H^*(\vartheta) \cos\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right) + H^*(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$
$$H_2(N+\vartheta) = \tfrac{1}{2} H'(\vartheta),$$
$$H_3(N+\vartheta) = -\tfrac{1}{2}\left(H^*(\vartheta) \cos\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right) + H^*(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$

para $0 \le \vartheta \le N-1$.

Por la linealidad de la TDH tenemos

$$\widetilde{H}(\vartheta) = \tfrac{1}{2} H'(\vartheta) + \tfrac{1}{2}\left(H^*(\vartheta) \cos\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right) + H^*(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$
$$\widetilde{H}(N+\vartheta) = \tfrac{1}{2} H'(\vartheta) - \tfrac{1}{2}\left(H^*(\vartheta) \cos\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right) + H^*(N-\vartheta) \operatorname{sen}\left(\tfrac{\pi\vartheta}{N}\right)\right),$$

si $0 \le \vartheta \le N-1$.

NOTACION MATRICIAL:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}(\vartheta) \\ \widetilde{H}(N+\vartheta) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H'(\vartheta) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi\vartheta}{N}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^*(\vartheta) \\ H^*(N-\vartheta) \end{bmatrix}$$

si $0 \le \vartheta \le N-1$.

OBSERVACION 4:

Al calcular la TDH de 2^n datos , aplicamos el *TEOREMA DE HARTLEY* y el problema se reduce a calcular dos transformadas discretas de Hartley de 2^{n-1} datos que corresponden a los mismos datos iniciales, pero colocadas en forma intercalada; por lo tanto, si antes de aplicar el teorema hacemos las correspondientes permutaciones de datos, colocando los de puesto par (empezando en cero) en primer lugar, y los de posición impar en segundo lugar y en orden secuencial, se simplifica el procedimiento para obtener la regla de composición. El mismo método se debe aplicar para calcular cada una de los 2^{n-1} datos seleccionadas anteriormente, y en general se procede de esta misma forma hasta obtener grupos de dos datos .

EJERCICIO 3:

Calcular la TDH para 2N=4 .

Desarrollo:

$$\{f(0),f(1),f(2),f(3)\} \xmapsto{\text{TDH}} \{H(0),H(1),H(2),H(3)\},$$
$$\{f(0),f(2)\} \xmapsto{\text{TDH}} \{H'(0),H'(1)\},$$
$$\{f(1),f(3)\} \xmapsto{\text{TDH}} \{H^*(0),H^*(1)\};$$

por el ejercicio 1 tenemos que

$$\begin{bmatrix} H'(0) \\ H'(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(2) \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$\begin{bmatrix} H^*(0) \\ H^*(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1) \\ f(3) \end{bmatrix} ,$$

entonces

$$\begin{bmatrix} H'(0) \\ H'(1) \\ H^*(0) \\ H^*(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(1) \\ f(3) \end{bmatrix} .$$

(Asumimos que las entradas vacías en las matrices que tratemos serán ceros).

Por el teorema de Hartley

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(2) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H'(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi 0}{2}) & \mathrm{sen}(\frac{\pi 0}{2}) \\ -\cos(\frac{\pi 0}{2}) & -\mathrm{sen}(\frac{\pi 0}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^*(0) \\ H^*(0) \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} H(1) \\ H(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H'(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi 1}{2}) & \mathrm{sen}(\frac{\pi 1}{2}) \\ -\cos(\frac{\pi 1}{2}) & -\mathrm{sen}(\frac{\pi 1}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^*(1) \\ H^*(1) \end{bmatrix};$$

luego

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2^2} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & \vdots & \mathcal{R}_2 \\ \cdots & . & \cdots \\ \mathbb{I}_2 & \vdots & -\mathcal{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(2) \\ f(1) \\ f(3) \end{bmatrix},$$

siendo

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi 0}{2}) + \mathrm{sen}(\frac{\pi 0}{2}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi 1}{2}) + \mathrm{sen}(\frac{\pi 1}{2}) \end{bmatrix} .$$

EJERCICIO 4:

Calcular la TDH para $2N=8$.

Desarrollo :

Sean

$$\{ f(0), \ldots, f(7) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H(0), \ldots, H(7) \},$$

$$\{ f(0), f(2), f(4), f(6) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'(0), H'(1), H'(2), H'(3) \},$$

$$\{ f(1), f(3), f(5), f(7) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^*(0), H^*(1), H^*(2), H^*(3) \},$$

$$\{ f(0), f(4) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H''(0), H''(1) \},$$

$$\{ f(2), f(6) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'^*(0), H'^*(1) \},$$

$$\{ f(1), f(5) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{*\prime}(0), H^{*\prime}(1) \},$$

$$\{ f(3), f(7) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{**}(0), H^{**}(1) \} .$$

Por los ejercicios 1 y 3 tenemos que:

$$\begin{bmatrix} H''(0) \\ H''(1) \\ H'^*(0) \\ H'^*(1) \\ H^{*\prime}(0) \\ H^{*\prime}(1) \\ H^{**}(0) \\ H^{**}(1) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(0) \\ f(4) \\ f(2) \\ f(6) \\ f(1) \\ f(5) \\ f(3) \\ f(7) \end{bmatrix};$$

también

$$\begin{bmatrix} H'(0) \\ H'(1) \\ H'(2) \\ H'(3) \\ H^*(0) \\ H^*(1) \\ H^*(2) \\ H^*(3) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_2 & \vdots & \mathcal{R}_2 & \vdots & & & \\ \cdots & . & \cdots & \vdots & & & \\ \mathbb{I}_2 & \vdots & -\mathcal{R}_2 & & & & \\ & \cdots & & . & & \cdots & \\ & & & & \mathbb{I}_2 & \vdots & \mathcal{R}_2 \\ & & & \vdots & \cdots & . & \cdots \\ & & & & \mathbb{I}_2 & \vdots & -\mathcal{R}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H''(0) \\ H''(1) \\ H'^*(0) \\ H'^*(1) \\ H^{*\prime}(0) \\ H^{*\prime}(1) \\ H^{**}(0) \\ H^{**}(1) \end{bmatrix},$$

y además

$$\begin{bmatrix} H(0) \\ H(1) \\ H(2) \\ H(3) \\ H(4) \\ H(5) \\ H(6) \\ H(7) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_4 & \vdots & \mathcal{R}_4 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbb{I}_4 & \vdots & -\mathcal{R}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H'(0) \\ H'(1) \\ H'(2) \\ H'(3) \\ H^*(0) \\ H^*(1) \\ H^*(2) \\ H^*(3) \end{bmatrix} ,\ \text{siendo}$$

$$\mathcal{R}_4 = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\pi 0}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi 0}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi 1}{4}) & 0 & \operatorname{sen}(\frac{\pi 1}{4}) \\ 0 & 0 & \cos(\frac{\pi 2}{4}) + \operatorname{sen}(\frac{\pi 2}{4}) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(\frac{\pi 3}{4}) & 0 & \cos(\frac{\pi 3}{4}) \end{bmatrix}$$

Si llamamos $\mathcal{R}_1 = [1]$ e $\mathbb{I}_1 = [1]$, podemos notar

$$\mathcal{H}_{2^3} = \frac{1}{2^3} \left(\prod_{k=1}^{3} \operatorname{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(4-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(4-k)} \right) \right) \vec{F}_{2^3} ,$$

$$\text{con} \qquad \mathcal{M}_j^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & \mathcal{R}_{2^{k-1}} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & -\mathcal{R}_{2^{k-1}} \end{bmatrix} \qquad \text{y}$$

$$\vec{F}^{T}_{2^3} = [\ f(0), f(4), f(2), f(6), f(1), f(5), f(3), f(7)\ ].$$

Ejercicio 5 :

Calcular la TDH para 2N=16 .

Desarrollo :

$$\{ f(0), f(1), \cdots, f(14), f(15) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H(0), H(1), \cdots, H(14), H(15) \} ;$$

$$\{f(0),f(2), \ldots ,f(12),f(14)\} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'(0),H'(1), \ldots ,H'(6),H'(7) \} ;$$

$$\{f(1),f(3), \ldots ,f(13),f(15)\} \xmapsto{\text{TDH}} \{H^*(0),H^*(1), \ldots ,H^*(6),H^*(7)\} ;$$

$$\{ f(0), f(4), f(8), f(12) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H''(0), H''(1), H''(2), H''(3) \} ;$$

$$\{ f(2), f(6), f(10), f(14) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'^*(0), H'^*(1), H'^*(2), H'^*(3) \};$$

$$\{ f(1), f(5), f(9), f(13) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{*\prime}(0), H^{*\prime}(1), H^{*\prime}(2), H^{*\prime}(3) \};$$

$$\{ f(3), f(7), f(11), f(15) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{**}(0), H^{**}(1), H^{**}(2), H^{**}(3) \};$$

$$\{ f(0), f(8) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'''(0), H'''(1) \} ;$$

$$\{ f(4), f(12) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H''^*(0), H''^*(1) \};$$

$$\{ f(2), f(10) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'^{*\prime}(0), H'^{*\prime}(1) \} ;$$

$$\{ f(6), f(14) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H'^{**}(0), H'^{**}(1) \};$$

$$\{ f(1), f(9) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{*\prime\prime}(0), H^{*\prime\prime}(1) \} ;$$

$$\{ f(5), f(13) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{*\prime *}(0), H^{*\prime *}(1) \};$$

$$\{ f(3), f(11) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{**\prime}(0), H^{**\prime}(1) \};$$

$$\{ f(7), f(15) \} \xmapsto{\text{TDH}} \{ H^{***}(0), H^{***}(1) \};$$

$$\vec{F}^{T}_{2^4} =$$

$$=[\ f(0),f(8),f(4),f(12),f(2),f(10),f(6),f(14),f(1),f(9),f(5),f(13),f(3),f(11),f(7),f(15)\ ] .$$

Es fácil observar que la representación matricial del problema será

$$
\mathcal{H}_{2^4} = \frac{1}{2^4}
\begin{bmatrix}
\mathbb{I}_{2^3} & \vdots & \mathfrak{R}_{2^3} \\
\cdots & \cdot & \cdots \\
\mathbb{I}_{2^3} & \vdots & -\mathfrak{R}_{2^3}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbb{I}_4 & \mathfrak{R}_4 & & \\
\mathbb{I}_4 & -\mathfrak{R}_4 & & \\
& & \mathbb{I}_4 & \mathfrak{R}_4 \\
& & \mathbb{I}_4 & -\mathfrak{R}_4
\end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot
\begin{bmatrix}
\mathbb{I}_2 & \mathfrak{R}_2 & & & & & & \\
\mathbb{I}_2 & -\mathfrak{R}_2 & & & & & & \\
& & \mathbb{I}_2 & \mathfrak{R}_2 & & & & \\
& & \mathbb{I}_2 & -\mathfrak{R}_2 & & & & \\
& & & & \mathbb{I}_2 & \mathfrak{R}_2 & & \\
& & & & \mathbb{I}_2 & -\mathfrak{R}_2 & & \\
& & & & & & \mathbb{I}_2 & \mathfrak{R}_2 \\
& & & & & & \mathbb{I}_2 & -\mathfrak{R}_2
\end{bmatrix} \cdot
$$

$$
\cdot
\begin{bmatrix}
\mathcal{M}_1^{(1)} & & & & & & & \\
& \mathcal{M}_2^{(1)} & & & & & & \\
& & \mathcal{M}_3^{(1)} & & & & & \\
& & & \mathcal{M}_4^{(1)} & & & & \\
& & & & \mathcal{M}_5^{(1)} & & & \\
& & & & & \mathcal{M}_6^{(1)} & & \\
& & & & & & \mathcal{M}_7^{(1)} & \\
& & & & & & & \mathcal{M}_8^{(1)}
\end{bmatrix}
\vec{F}_{2^4}.
$$

En forma resumida tenemos:

$$
\boxed{
\begin{gathered}
\mathcal{H}_{2^4} = \frac{1}{2^4}\left(\prod_{k=1}^{4} \mathrm{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(5-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(5-k)} \right) \right) \vec{F}_{2^4}, \\
\text{con} \qquad \mathcal{M}_j^{(k)} =
\begin{bmatrix}
\mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & \mathfrak{R}_{2^{k-1}} \\
\cdots & \cdot & \cdots \\
\mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & -\mathfrak{R}_{2^{k-1}}
\end{bmatrix}.
\end{gathered}
}
$$

OBSERVACION 5:

Si llamamos $\mathcal{C}_q = \mathrm{diag}\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\, 0\right), \cos\left(\frac{\pi}{q}\, 1\right), \ldots, \cos\left(\frac{\pi}{q}\,(q-1)\right)\right)$;

$$\mathfrak{S}_q = (a_{ij})_{q\mathrm{x}q}, \qquad \text{en donde}$$

$$
a_{ij} = \begin{cases} \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{q}\,(i-1)\right), & \text{si } j=q-i+2,\ 2 \le i \le q, \\ 0, & \text{en otros casos;} \end{cases}
$$

$$\mathfrak{R}_q = \mathcal{C}_q + \mathfrak{S}_q;$$

$\mathcal{H}_p$ al vector columna de las transformadas discretas de Hartley para los datos $\{f(0), f(1), \cdots, f(p-1)\}$; y $\vec{F}_p$ al vector columna de los datos $\{f(0), f(1), \cdots, f(p-1)\}$, ordenados en la forma sugerida por el Teorema de Hartley, podemos observar que la representación matricial del problema va tomando la siguiente forma para el caso de 2^n datos:

$$\mathcal{H}_{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(\prod_{k=1}^{n} \operatorname{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}\right)\right)\cdot \vec{F}_{2^n},$$

siendo

$$\mathcal{M}_j^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & \mathcal{R}_{2^{k-1}} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & -\mathcal{R}_{2^{k-1}} \end{bmatrix}, \ \forall\ 1 \le j \le 2^{k-1} \ \text{ y}$$

$\forall\ 1 \le k \le n$.

TEOREMA 5:

La representación matricial del teorema de Hartley para el caso de 2^n datos es

$$\mathcal{H}_{2^n} = \frac{1}{2^n}\left(\prod_{k=1}^{n} \operatorname{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}\right)\right)\cdot \vec{F}_{2^n},$$

siendo

$$\mathcal{M}_j^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & \mathcal{R}_{2^{k-1}} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & -\mathcal{R}_{2^{k-1}} \end{bmatrix},$$

$\forall\ 1 \le j \le 2^{k-1}$ y $\forall\ 1 \le k \le n$.

Demostración (*Por indución sobre n*):

1º) Para n=1 ver el ejercicio 1.

2º) Supongamos que se tiene para n ; demostrémoslo para n+1. Al permutar totalmente los datos para poder emplear la T.D.H., obtenermos el vector $\vec{F}_{2^{n+1}}$, el cual en sus 2^n primeras coordenadas es un vector del tipo $\vec{F}_{2^n}$ y en sus 2^n últimas coordenadas también es de este tipo; por lo tanto, aplicando dos veces la hipótesis de inducción para 2^n datos, el problema se transforma en

$$\mathcal{H}_{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2^n} & \vdots & \mathcal{R}_{2^n} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbb{I}_{2^n} & \vdots & -\mathcal{R}_{2^n} \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\operatorname{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}\right) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & \vdots & \frac{1}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\operatorname{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}\right) \end{bmatrix} \vec{F}_{2^{n+1}};$$

luego

$$\mathcal{H}_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \mathcal{M}_1^{(n+1)} .$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathrm{diag}(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}) \end{bmatrix} \vec{F}_{2^{n+1}};$$

por lo tanto,

$$\mathcal{H}_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \mathcal{M}_1^{(n+1)} .$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n} \mathrm{diag}(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}, \mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}) \; \vec{F}_{2^{n+1}};$$

como $\mathcal{M}_j^{(k)} = \mathcal{M}_h^{(k)}$, $\forall$ j y $\forall$ h , entonces

$$\mathcal{H}_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \mathcal{M}_1^{(n+1)} .$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{n} \mathrm{diag}(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^k}^{(n+1-k)}) \; \vec{F}_{2^{n+1}} ,$$

$$\mathcal{H}_{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \prod_{k=1}^{n+1} \mathrm{diag}(\mathcal{M}_1^{(n+2-k)}, \cdots, \mathcal{M}_{2^k}^{(n+2-k)}) \; \vec{F}_{2^{n+1}}.$$

POST SCRIPTUM :

De acuerdo con lo visto en la observación 4 , es necesario

estudiar la forma de permutar los 2^n datos iniciales para poder aplicar el teorema de Hartley .

DEFINICION 2:

Se define la 2^n-permutación $\sigma_{2^n}^{(k)}$ con $1 \leq k \leq n-1$ como la aplicación de $\mathbb{R}^{2^n}$ en $\mathbb{R}^{2^n}$ de la siguiente manara :

$$\sigma_{2^n}^{(1)} (x_0 , x_1, \cdots, x_{2^n-1}) = \left(x_0, x_2, \cdots, x_{2^n-2} , x_1, x_3, \cdots, x_{2^n-1} \right);$$

$$\sigma_{2^n}^{(k)} (x_0 , x_1, \cdots, x_{2^n-1}) =$$

$$= \left(\sigma_{2^{n-1}}^{(k-1)} (x_0 , x_1, \cdots, x_{2^{n-1}-1}) , \sigma_{2^{n-1}}^{(k-1)} (x_{2^{n-1}} , x_{2^{n-1}+1}, \cdots, x_{2^n-1}) \right).$$

DEFINICION 3:

Se define la matriz $A_n^{(0)} = (a_{ij})$ de orden $2^{n-1} \times 2^n - 1$, en donde

$$a_{ij} = \delta_{j\; 2i-1} .$$

OBSERVACION 6:

La matriz asociada a la transformación lineal $\sigma_{2^n}^{(k)}$ mediante las bases canónicas es

$$A_n^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(0)} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A_{n-1}^{(0)} \end{bmatrix}, \text{ y}$$

$$A_n^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(k-1)} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A_{n-1}^{(k-1)} \end{bmatrix}, \ \forall k = 2, \cdots, n .$$

LEMA 1:

$$A_n^{(k)} \left(A_n^{(k)} \right)^T = \mathbb{I}_{2^{n-\delta_{0n}}} \qquad y$$

$$\left(A_n^{(k)} \right)^T A_n^{(k)} = \mathbb{I}_{2^n - \delta_{0n}} ,$$

$\forall k$ con $0 \le k \le n$.

DEMOSTRACION :

1º) Para k=0 :

Sean $A_n^{(0)} = (a_{ij})_{2^{n-1}\, 2^n-1}$ con $a_{ij} = \delta_{j\, 2i-1}$;

entonces

$\left(A_n^{(0)} \right)^T = (b_{ij})_{2^n-1\, 2^{n-1}}$, $b_{ij} = a_{ji}$; luego

$\left(A_n^{(0)} \right)^T A_n^{(0)} = (c_{ij})_{2^n-1}$ con

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2^n-1} b_{ik}\, a_{kj} = \sum_{k=1}^{2^n-1} a_{ki}\, a_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{2^n-1} \delta_{i\, 2k-1}\, \delta_{j\, 2k-1} = \delta_{ij} .$$

Por lo tanto, $\left(A_n^{(0)} \right)^T A_n^{(0)} = \mathbb{I}_{2^n-1}$.

Similarmente se ve que $A_n^{(0)} \left(A_n^{(0)} \right)^T = \mathbb{I}_{2^{n-1}}$.

2º) Para k = 1 :

Tomemos $A_n^{(1)} = (b_{ij})_{2^n \times 2^n}$ con

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta_{j\, 2i-1} , & \text{si } 1 \le i \le 2^{n-1} \text{ y } 1 \le j \le 2^n-1 , \\ 0 , & \text{si } 1 \le i \le 2^{n-1} \text{ y } j = 2^n , \\ 0 , & \text{si } 2^{n-1}+1 \le i \le 2^n \text{ y } j=1 , \\ \delta_{j\, 2i-2^n} , & \text{si } 2^{n-1}+1 \le i \le 2^n \text{ y } 2 \le j \le 2^n , \end{cases}$$

y $\left(A_n^{(1)} \right)^T = (d_{ij})_{2^n \times 2^n}$, en donde $d_{ij} = b_{ji}$;

entonces $\left(A_n^{(1)} \right)^T A_n^{(1)} = (c_{ij})_{2^n \times 2^n}$,

siendo $c_{ij} = \sum_{k=1}^{2^n} d_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{2^n} b_{ki}\, b_{kj}$.

i) Tomemos $1 \le i \le 2^{n-1}$ y $1 \le j \le 2^n-1$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_{i\, 2k-1}\, \delta_{j\, 2k-1} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \delta_{i\, 2k-2^n}\, \delta_{j\, 2k-2^n} ;$$

luego $c_{ij} = \delta_{ij}$.

ii) Si $1 \le i \le 2^{n-1}$ y $j = 2^n$,

tenemos $c_{ij} = 0$.

iii) Si $2^{n-1}+1 \le i \le 2^n$ y $j=1$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_{i\, 2k-1}\, \delta_{1\, 2k-1} = 0 .$$

iv) Si $2^{n-1}+1 \leq i \leq 2^n$ y $2 \leq j \leq 2^n$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_{i\,2k-1}\,\delta_{j\,2k-1} + \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \delta_{i\,2k-2^n}\,\delta_{j\,2k-2^n}.$$

Luego si $i \neq j$, $c_{ij} = 0$. Por otra parte,

$$c_{ii} = \underbrace{\sum_{k=1}^{2^{n-1}} \delta^2_{i\,2k-1}}_{©} + \underbrace{\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \delta^2_{i\,2k-2^n}}_{®}.$$

Podemos observar que el subíndice j de δ_{ij} en © toma sólo valores impares, $1,3,5,\cdots,2^n-1$, mientras que en ® toma únicamente valores pares, $2,4,6,\cdots,2^n$; pero como $2^{n-1}+1 \leq i \leq 2^n$, entonces $c_{ii} = 1$.

De lo visto en *i*), *ii*), *iii*) y *iv*) se desprende que

$$\left(A_n^{(1)}\right)^T A_n^{(1)} = \mathbb{I}_{2^n}.$$

Similarmente se ve que $A_n^{(1)}\left(A_n^{(1)}\right)^T = \mathbb{I}_{2^n}$.

3º) Supongamos que se tiene para k-1 ($k > 2$); veámoslo para k.

Como $A_{n-1}^{(k-1)}\left(A_{n-1}^{(k-1)}\right)^T = \mathbb{I}_{2^{n-1}}$ y

$$A_n^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(k-1)} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A_{n-1}^{(k-1)} \end{bmatrix},$$

entonces

$$A_n^{(k)}\left(A_n^{(k)}\right)^T =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(k-1)} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A_{n-1}^{(k-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(A_{n-1}^{(k-1)}\right)^T & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \left(A_{n-1}^{(k-1)}\right)^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} A_{n-1}^{(k-1)}\left(A_{n-1}^{(k-1)}\right)^T & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & A_{n-1}^{(k-1)}\left(A_{n-1}^{(k-1)}\right)^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2^{n-1}} & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & \mathbb{I}_{2^{n-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbb{I}_{2^n}.$$

En forma similar se demuestra que

$$\left(A_n^{(k)}\right)^T A_n^{(k)} = \mathbb{I}_{2^n - \delta_{0n}}, \forall k \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq n.$$

CONCLUSION

Sea $\{ f(0), f(1), \ldots, f(N-1) \}$ un conjunto de datos reales; si

$$\vec{V} = \left(f(0), f(1), \ldots, f(N-1) \right)^T, \text{ y}$$
$$\vec{W} = \left(H(0), H(1), \ldots, H(N-1) \right)^T \text{ es}$$

la TDH de $\vec{V}$, entonces la representación matricial del teorema de Hartley es :

$$\vec{W} = \frac{1}{2^n} \left(\prod_{k=1}^{n} \operatorname{diag}\left(\mathcal{M}_1^{(n+1-k)}, \ldots, \mathcal{M}_{2^{k-1}}^{(n+1-k)}\right) \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} A_n^{(n+1-k)} \right) \vec{V},$$

siendo

$$\mathcal{M}_j^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & \mathcal{R}_{2^{k-1}} \\ \cdots & \cdot & \cdots \\ \mathbb{I}_{2^{k-1}} & \vdots & -\mathcal{R}_{2^{k-1}} \end{bmatrix},$$

$\forall\ 1 \leq j \leq 2^{k-1}$ y $\forall\ 1 \leq k \leq n$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Bracewell Ronald. *The Fourier Transform and Its Aplications*. McGraw-Hill Book Company, New York,1986.

[2] Bracewell Ronald. *The Fast Hartley Transform*. Proceedings of The IEEE,Vol. 72, N º 8,August 1984 , pp 1010-1018.

[3] O'Neill Mark A. *Faster Than Fast Fourier*. BYTE , April 1988,pp.293-300.

[4] Villasenor John & Bracewell R.N. *Optical Phase Obtained by Analogue Harthey Transformation.* Nature,Vol.330, December 1987, pp.735-737.