Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 9, No. 2, julio-diciembre 1991

# UNA REPRESENTACION UNIFICADA DE LAS FUNCIONES POLIGONALES

Luis Enrique Ruiz Hernández*

## Introducción

En este trabajo se presentan los elementos básicos que permiten identificar las funciones poligonales (o sea, lineales a trozos y continuas en **R**) con un número finito de vértices. Se caracterizan en una fórmula corta y unificadora como una combinación lineal de trasladados de la función idéntica y la función valor absoluto.

Los resultados obtenidos son nuevos.

## Definición

Una función poligonal es una función continua $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ para la cual existen números reales

* Profesor Titular, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Seccional Duitama.

$\alpha_1 < . \quad < \alpha_n$ *que definen intervalos*

$$A_o = -\infty,\ \alpha_1] \quad , \quad A_n = [\alpha_n,\ +\infty) \ ,$$

$$A_k = [\alpha_k \ , \ \alpha_{k+1}] \quad , \quad k=1 \ , \ \ldots \ , \ n-1 \ ,$$

tales que

$$(1) \qquad f_k(x) = f \mid A_k)(x) = m_k\, x + l_k \quad , \quad x \in A_k$$

donde $m_k$ y $l_k$ son números reales, $k=0,1, \ldots, n$, y

$$(2) \qquad m_k \neq m_{k+1} \qquad \textit{para todo} \quad k=0,1, \ \ldots \ , n-1 \ .$$

**TEOREMA.** Una función $f{:}R \to R$ es poligonal si y sólo si existen números $a$, $b$, $a_1 < \ldots < a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ no nulos tales que

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \,| x - a_k | + ax + b \ ,$$

para todo $x \in R$.

**Demostración.** Si $f$ es poligonal, existen números reales

$a_1 < \ldots < a_n, m_o, m_1, \ldots, m_n, l_o, l_1, \ldots, l_n$

tales que (1) y (2) se cumplen. Por la continuidad de $f$ se obtiene de (1)

$$\lim_{x \to a_k^-} f(x) = f_{k-1}(a_k) = m_{k-1}\, a_k + l_{k-1} =$$

$$= \lim_{x \to a_k^+} f(x) \quad f_k(a_k) = m_k\, a_k + l_k \ ,$$



de donde

$$(4) \qquad (m_{k-1} - m_k)\, a_k = l_k - l_{k-1} \qquad k=1, \ldots, n$$

Hagamos $\quad b_k = \dfrac{m_k - m_{k-1}}{2} \qquad k=1, \ \ldots \ , n \ ,$

$$a = \frac{m_o + m_n}{2} \quad y \quad b = \frac{l_o + l_n}{2}$$

Dado

$$x \in R = \bigcup_{k=0}^{n} A_k \ , \ \textit{existe}\ p \ , \ 0 \le p \le n \ \ \textit{tal que} \ \ x \in A_p .$$

De manera que tomando en cuenta (4) obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \,| x - a_k | + ax + b =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_k \,| x - a_k | + \sum_{k=p+1}^{n} b_k \,| x - a_k | + ax + b =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} b_k \,(x - a) + \sum_{k=p+1}^{n} b_k \,(a_k - x) + ax + b =$$

$$\left( \sum_{k=1}^{p} b_k - \sum_{k=p+1}^{n} b_k + a \right) x - \sum_{k=1}^{p} a_k\, b_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k\, b_k + b =$$

$$\left\{ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p} (m_k - m_{k-1} \qquad \frac{1}{2}\sum_{k=p+1}^{n} (m_k - m_{k-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(m_o + m_n) \right\} x +$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}(m_k - m_{k-1})\, a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=p+1}^{n} (m_k - m_{k-1})\, a_k +$$

$$+ \frac{1}{2}(l_o + l_n) =$$

$$= \frac{1}{2}\{ [\, (m_p - m_o) - (m_n - m_p) + (m_o + m_n) \,]\, x +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} (l_k - l_{k-1}) - \sum_{k=p+1}^{n} l_k\, (- l_{k-1}) + l_o + l_n \Big\}$$

$$= \frac{1}{2} \quad 2m_p\, x + \; l_p - l_o) - (l_n - l_p) + l_o + l_n \} =$$

$$= \frac{1}{2}(2m_p\, x + 2\, l_p) = m_p\, x + l_p = f_p(x) = f(x)\,.$$

Recíprocamente, suponiendo la forma (3) para f(x) y $b_k \neq$ o para todo k=1, ... , n , entonces f es continua en **R**, y el mismo cálculo anterior muestra que f satisface (1) en la definición, donde $m_p$ es el coeficiente de x y $l_p$ el término independiente. Si $m_p = m_{p+1}$ para algún p , $0 \leq p \leq n-1$, entonces $b_{p+1} = 0$, contrario a lo supuesto acerca de los $b_k$. De



acuerdo con la definición anterior, concluimos que f es poligonal ■

En nuestros argumentos hemos aceptado la convención de que

$$\sum_{k=s}^{t} \qquad _k = 0 \quad \text{si} \quad s > t)\,.$$

Usando explícitamente las partes lineales de f, obtenemos el siguiente

**COROLARIO 1.** Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es la función poligonal definida en (1), entonces

$$(5) \qquad f(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (m_k - m_{k-1}) \quad x - a_k \quad +$$

$$+ \frac{1}{2}(m_o + m_n)\, x + \frac{1}{2} \quad l_o + l_n) \;,$$

$$\text{para } todo \;\; x \in R\,. \;■$$

De la misma manera, a la luz de (5) obtenemos el

**COROLARIO 2.** Si $V_1 V_2 \ldots V_n$ es una curva poligonal de vértices $V_k = (x_k, y_k)$, k=1, ... , n , y $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, entonces su ecuación cartesiana está dada por

$$y = \frac{1}{2}\left\{ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}(x - x_n) \right.$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} \left( \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \right) | x - x_k | + y_1 + y_n \Bigg\} ,$$

para todo $x \in [x_1 , x_n]$ (ver Figura 1).

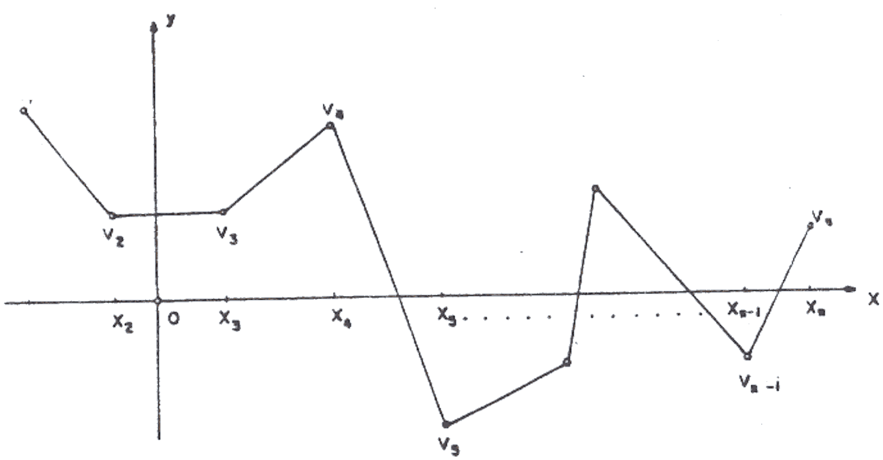


FIGURA 1. La curva poligonal $v_1 v_2 \cdots v_{n-1} v_n$