Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 9, No. 2, julio-diciembre 1991

# LA CONEXIDAD Y EL AXIOMA DE COMPLETEZ EN UN CONJUNTO TOTALMENTE ORDENADO K DENSO, SIN ELEMENTOS PRIMERO Y ULTIMO

**Rafael Ahumada Barrios** *
**Fernando Puerta Ortiz** *

## Introducción

En [1] se probó que en un cuerpo totalmente ordenado, el axioma de completez es equivalente a la conexidad; en este artículo se prueba que dicha equivalencia es independiente de las operaciones y sólo depende del orden.

## Definición 1

Un conjunto K se dice totalmente ordenado si en K está definida una relación $\leq$ que cumple: (i) es reflexiva; (ii) es antisimétrica; (iii) es transitiva; (iv) dados $x, y \in K$, entonces $x \leq y$ ó $y \leq x$.

* Profesores Asociados, Universidad Nacional, Seccional Medellín, Colombia.

**Definición 2**

Sea K un conjunto totalmente ordenado por $\leq$ ; dados $x, y \in K$, decimos que $x < y$ si y sólo si $x \leq y$ y $x \neq y$ .

**Definición 3**

Sea K un conjunto totalmente ordenado por $\leq$ ; decimos que K es denso si dados $x, y \in K$, con $x < y$ , entonces existe $z \in K$ tal que $x < z < y$.

**Definición 4**

Sea K un conjunto totalmente ordenado, $S \subseteq K$, $S \neq \emptyset$; decimos que S es acotado superiormente si existe $\alpha \in K$ tal que $x \leq \alpha$ , para todo $x \in S$ .

**Definición 5**

Sea K un conjunto totalmente ordenado, $S \subseteq K$ , $S \neq \emptyset$ ; acotado superiormente; decimos que $\alpha$ es el supremo de S (notado $\alpha$ = Sup S) si es cota superior de S y, además, para toda cota superior $\beta$ de S, $\alpha \leq \beta$ .

**Definición 6**

Sea K un conjunto totalmente ordenado, $a,b \in K$ con $a < b$; definimos V(a,b) como el conjunto siguiente:

$$V(a,b) = \{ x \in K \mid a < x < b \} .$$

**Definición 7**

Sea K un conjunto totalmente ordenado, $S \subset K$, $S \neq \emptyset$; decimos que S es abierto, si para todo $x \in S$ existen $a, b \in K$, con $a<b$, tales que $x \in V(a,b) \subset S$.



**Definición 8**

Sea K un conjunto totalmente ordenado; el conjunto

$$\tau = \{ S \subseteq K \mid S \text{ es abierto } \} \cup \emptyset$$

es una topología para K, llamada la topología de orden para K.

**Definición 9**

Sea K un conjunto totalmente ordenado; decimos que K cumple el axioma de completez, si para todo

$$S \subseteq K , \quad \text{con } S \neq \emptyset$$

y acotado superiormente, se tiene que Sup S existe.

**PROPOSICION 1**

Si K cumple el axioma de completez, entonces $(K, \tau)$ es conexo.

**Prueba:**

Sea $F \subseteq K$, $F \neq \emptyset$ y $F \neq K$ con F cerrado; sean $x \notin F$ , $y \in F$ ; supongamos que $y < x$.

Sea $S = \ t \in F \mid t < x \}$ ; $S \neq \emptyset$ , puesto que $y \in S$ ;

además S es acotado superiormente, entonces Sup S existe.

Sea $z$ = Sup S; entonces $y \leq z \leq x$ ; si $y = z$ entonces $z \in F$ ; ahora, si $y \neq z$ entonces $y < z \leq x$; sea $z \in V(a,b) = \{x \in K \mid a < x < b\}$ ; entonces V(a,b) es una vecindad de z, luego $a < z < b$ ; como K es denso, existe $c \in K$ tal que $a < c < z < b$ ; como z = Sup S, existe $u \in S$ tal que $a < c \ u_0 < z < b$. luego $V(a,b) \cap S \neq \emptyset$ ; entonces $z \in \bar{F} = F$, ya que F es cerrado, luego tenemos que $z < x$ y $z \in F$;

entonces, para todo $u \in V(z,x) = \{ t \in K \mid z < t < x \}$ tenemos que $u \notin F$ ; luego z no es punto interior de F, y por lo tanto F no es abierto, luego $(K, \tau)$ es conexo ■

**PROPOSICION 2**

Si $(K, \tau)$ es conexo, entonces K cumple el axioma de completez.

**Prueba:**

Sea $S \subseteq K$, $S \neq \emptyset$, $S$ acotado superiormente; consideremos

$$A = \{ \alpha \in K \mid \alpha \text{ es cota superior de } S \} ;$$

$A = \emptyset$ , porque S es acotado superiormente y $A \neq K$:

Si existe $\alpha_o \in S$ tal que $\alpha_o \in A$ , entonces $\alpha_o =$ Sup S; supongamos que ningún punto de S pertenece a A; sea $B = A^c$; veamos que B es abierto: en efecto, sea $x \in B$ ; entonces $x \in A$, luego x no es cota superior de S, entonces existe $y \in S$ tal que $x < y$. Como K es denso, existe $b \in K$ tal que $x<b<y$; como K no tiene primer elemento, existe $a \in K$ tal que $a<x<b<y$, luego $x \in V(a,b)$ , y además, si $z \in V(a,b)$ tenemos que $a<z<b<y$ ; luego z no es cota superior de S, o sea que $z \notin A$ , luego $z \in B$ ; de donde tenemos que $V(a,b) \subseteq B$, o sea que x es un punto interior de B; luego B es abierto y por lo tanto A es cerrado; como K es conexo, A no es abierto, luego existe $\alpha_o \in A$ tal que para toda vecindad V de $\alpha_o$ se tiene que $V \subseteq A$.

Sea $\beta < \alpha_o$ y $\beta \in A$ ; como K no tiene último elemento, existe $b \in K$ tal que $\alpha_o < b$ ; entonces, para $x \in V(\beta, b)$ tenemos que $\beta<x$, luego $x \in A$, y por lo tanto $V(\beta, b) \subseteq A$ y $\alpha_o \in V(\beta, b)$ lo cual es absurdo; luego para todo $\beta \in A$ se tiene que $\beta < \alpha_o$ , entonces $\alpha_o$ es el mínimo de A, o sea que $\alpha_o = S$ y por lo tanto K cumple el axioma de completez ■



**BIBLIOGRAFIA**

[1] AHUMADA BARRIOS, Rafael Enrique. "La conexidad y el axioma de completez". Boletín de Matemáticas, Vol. XXI, No. 1 (1987). Departamento de Matemáticas, U. Nacional, Bogotá.