

## Geometría en el Bachillerato

Por: MYRIAM ACEVEDO DE MANRIQUE  
Prof. Universidad Nacional de Colombia  
Sede Santafé de Bogotá

Desde hace ya varios años es común escuchar en todos los encuentros de profesores de matemática de los distintos niveles, comentarios referentes a la problemática de la geometría. Se habla entonces del abandono total en que se encuentra esta área, pero en la generalidad de los casos se hace referencia exclusivamente al espacio reducido que tiene la geometría en los programas curriculares, pero, el factor de mayor importancia; la actitud que los profesores de matemática han tomado frente a este hecho no merece mención.

¿Cuál ha sido esta actitud?

- Dejarla de lado totalmente dedicándose al trabajo usual (rutinario) con la operatoria aritmética o algebraica; o en el peor de los casos dedicarse a introducir temas "modernos" generalmente sin fundamentos firmes ni claridad en los objetivos que se persiguen.

- En otros casos repetir sin ningún asomo renovador y con el limitante del tiempo los cursos de Geometría Euclidiana diseñados 50 o más años atrás.

¿Cuál es en esta ocasión mi pretensión, se preguntarán ustedes?

¿Será proponer un listado de los temas de geometría que se deben enseñar en el bachillerato?

No, realmente no es ese mi interés. Presentaré una serie de comentarios y espero que reflexionemos sobre tres preguntas que me parece pertinente plantear.

¿Cuáles son las tendencias actuales para enseñanza de la geometría a nivel medio?

¿Cuáles son los principales obstáculos que tienen los estudiantes de Bachillerato para aprender Geometría?

¿Existen algunos parámetros que nos permitan diseñar y orientar un programa de geometría que involucre directamente al alumno en el proceso Enseñanza-Aprendizaje?

Para responder a la primera pregunta reseñaré apertes de la publicación de la UNESCO

"Estudios en Educación Matemática", Vol. 5 (1986) dedicado en su totalidad a la Geometría. Así como algunas notas aparecidas en la Revista Thales (1986) donde se presentan los informes del "Especial Symposium Internacional Renovación Enseñanza de las Matemáticas". Ponentes de diferentes países, ilustran la situación actual de esta área en su respectiva región. Veamos:

Comentarios de Países Arabes: "Un equilibrio entre la enseñanza tradicional de la geometría y una enseñanza de la geometría basada en las estructuras algebraicas".

Escuela Media Italiana: "Los programas italianos sugieren una geometría dinámica que conduzca al concepto de función... los programas hablan de transformación pero enfatizando aquellas que interesan a los muchachos que no son ni las isometrías ni tampoco las semejanzas sino aquellas que cambian la forma de la figura... transformaciones afines... aquellas que lleven al estudio de la naturaleza por medio de la matemática... es decir se trata de matematizar un fenómeno natural..."

España: (Miguel de Guzmán - Universidad Complutense de Madrid). Comenta al respecto: "No es nada fácil encontrar el justo medio entre algunos intentos de presentación axiomática rigurosa que a veces se proponen y la mera manipulación superficial de objetos geométricos que están muy cerca de convertir la geometría en un ejercicio de manualidades con papel. La geometría que hemos visto hasta ahora en muchos textos y programas no es sino un álgebra lineal, muy a menudo privada casi totalmente del sentido intuitivo del espacio resucitando retazos de la geometría sintética elemental... ¿Este es el camino? o más bien o el único camino para restaurar la intuición perdida? Veamos!... La actual teoría de grafos y la geometría combinatoria pueden constituirse sobre unos pocos elementos obvios, cercanos a la intuición que surgen de modo natural a partir de juegos y de situaciones de la vida cotidiana... piensa que la actividad alrededor de tales núcleos de ideas podría ser muy adecuada por su naturaleza lúdica y por su extensa aplicabilidad..."

Holanda: (Jan de Lange - Universidad de Utrecht) "Geometría para todos o ninguna geometría" ¿Cómo se debería enseñarse la geometría para todos?... en el orden en que la pueda estudiar el estudiante... deberíamos comenzar la geometría como una actividad con experimentos... el eslogan "Matemática como actividad humana" (Freudenthal) debería ser nuestro punto de partida para una geometría para todos... el principio podría ser: Problemas de la vida cotidiana - percepción espacial - como ven las cosas - el mundo que nos rodea... la geometría para todos debería tener una fuerte componente tridimensional comenzando en la escuela primaria y continuando hasta el final de la etapa secundaria".

Investigación Norteamericana: Después de analizar los contenidos curriculares; la metodología utilizada por los profesores y los logros de los estudiantes norteamericanos en geometría se presenta una conclusión que me pareció pertinente anotar:

"El cuadro del currículo de matemática de América del Norte en geometría, en la escuela secundaria, que emerge de un análisis y de los datos del segundo estudio internacional de matemáticas (1984) no es particularmente alentador.

Queda la impresión de la falta de una clara dirección o progreso hacia una meta identificada. Figura, Geometría en el currículo, pero nadie parece estar seguro de: ¿Por qué está allí? ¿Cuánto tiempo dedicarle? O, ¿Cómo estudiarla mejor? En realidad más de la mitad de los maestros dedicaron menos del 10% del tiempo disponible para matemática, para trabajar en Geometría".

Sin embargo, más adelante plantean una interesante experiencia "Curso de Geometría Plana para la Escuela Secundaria Basada en el Computador" dicen en su presentación: "La geometría de la escuela secundaria en los Estados Unidos de América, está en estado de profunda preocupación. Pero es una materia que bien merece el esfuerzo de replantearse y de hacerla más accesible a un mayor número de personas. Para lograrlo se necesitan

nuevas técnicas de enseñanza que puedan proporcionar bajo el control del usuario un mayor número de figuras dinámicas, introducción gradual de las demostraciones, práctica amplia con ellas, contenido y enfoques más variados, mecanismos que permitan a los estudiantes que necesitan más tiempo para el aprendizaje pueden disponer de él..." Las anteriores son razones suficientes valideras según los autores para considerar la alternativa del computador.

Quiero reforzar el comentario anterior con apartes de planteamientos presentados por el profesor Luis Moreno Armella (Méjico) en reciente visita a la Universidad Nacional hablando de las ventajas de utilizar el logo en geometría "Analizar relaciones entre estructuras geométricas y estructuras computacionales, donde las estructuras computacionales están representadas por programas escritos en Logo... Pensamos que a través de tales análisis se hace accesible al estudio de la geometría en sus aspectos: visual - descriptivo y teórico... Promueve el aprendizaje a través de la acción, el estudiante descubre que es su accionar lo que le conduce a su aprendizaje... Puede usarse para profundizar temas en dos niveles: visual y descriptivo y a través de ellos acceder al nivel teórico".

- Planteamiento de profesores de Checoslovaquia

Investigadores en Educación Matemática. Se dedican a analizar el problema de la enseñanza de la geometría para alumnos de 13 a 14 años iniciando diciendo... "Debe estar basada en consideraciones psicológicas y prácticas".

Para luego anotar... "Es necesario enfatizar que la geometría se originó en el estímulo y las necesidades prácticas de la sociedad humana..." "Consideramos que tales necesidades prácticas son en cierto sentido más importantes para los alumnos, que la construcción de un sistema de conocimientos en un orden lógico, especialmente un sistema como la axiomática EUCLIDIANA clásica... Un curso de matemáticas bajo esta influencia conduce necesariamente a demasiados conceptos que tienen pocas aplicaciones..."

"Nosotros estamos convencidos que el movimiento debe jugar un papel importante en la geometría escolar "Geometría del movimiento". Enfoque cinemático permite a los alumnos captar la concepción funcional de la geometría".

Comentario de la URSS. Introducen con una premisa: "La enseñanza de la Geometría promueve en los graduandos escolares la formación de una visión científica del mundo.

"Curso sistemático de geometría aprobado en una base sólida de conceptos claros asimilados durante la etapa introductoria... La importancia que atribuimos al desarrollo de un punto de vista científico nos lleva a concluir que un curso sistemático de geometría debe estar basado en la estructura axiomática..."

Planteamientos del Reino Unido. "Actualmente se aprecia en las situaciones especiales, un campo rico para un enfoque de investigación, todos los documentos que se publican tienen invitaciones para explorar (geometría activa).

La geometría involucrada en ellos es, en gran medida, geometría sintética, que se ocupa de formas, configuraciones, clasificación y relaciones mutuas. ¡Ha vuelto EUCLIDES al fin, pero con una apariencia enteramente nueva!

Tratemos de responder ahora a nuestro segundo interrogante

¿Cuáles son los obstáculos que tienen los estudiantes de Bachillerato para aprender geometría?

Enfasis que se da en el nivel elemental a la aritmética (especialmente limitada a operativa sin vislumbrar correlaciones interesantes).

- Presentación formal de los conceptos en lugar de una presentación empírica o intuitiva. Dicha presentación sugiere a los alumnos que la geometría está divorciada de la realidad y es irrelevante frente a ella.
- Desfase entre las experiencias del alumno frente al mundo espacial y las ideas y concepciones geométricas desarrolladas en la escuela.
- A pesar de ser innegable la importancia de los materiales concretos para la enseñanza de la geometría es muy pobre la experiencia a este respecto.
- Visión estrecha de la representación, confusión entre forma y contenido. Utilización, de diagramas inadecuados. Rigidez geométrica... etc.
- Ninguna interrelación aritmética, álgebra, medición... etc.

¿Bueno y qué hacer entonces con la geometría en el B--hillerato? ¿Abolir formalismos? ¿Abolir formalización?

Veamos: "La geometría no es de ninguna manera una matemática sin demostración y sin deducción".

Pero, y ¿qué ocurre con la dificultad de los alumnos para demostrar y la motivación para hacerlo?

Anteriormente el énfasis tradicional en la geometría EUCLIDIANA se situaba en la demostración; se argumentaba que la forma de demostrar consistía en aprender a instrumentalizar el algoritmo de la prueba. Sin embargo en la mayoría de los casos esta secuencia degeneraba en un proceso memorístico dirigido a aprender la demostración que alguien había dado de un teorema (formalización prematura). El formato de la demostración se constituía de esta manera en un presunto modelo de razonamiento deductivo.

En la actualidad todos sabemos (eso espero) que el demostrar constituye un objetivo final en un largo camino que incluye conjeturas, argumentaciones, razonamientos... etc. Aparece de esta manera como accesible a todos los alumnos y puede considerarse así como una forma refinada de razonar, que mantiene conexiones con el razonar y discutir el mundo real.

Y ¿Qué consideraciones debemos tener en cuenta para alcanzar este objetivo final?

EN PRIMER LUGAR:

Una propuesta ideal consistiría en proponer que el curso de geometría en los niveles básicos desarrollara en el estudiante toda una serie de habilidades. Algunas de las cuales seguramente nosotros ya hemos intuido. Pero que fueron explicitadas y analizadas por HOFFER en 1981. (No sobraría que nos cuestionáramos abiertamente sobre cada una de ellas).

- 1) **Habilidades visuales:** Reconocimiento de figuras planas en el espacio, partes de una figura y sus interrelaciones, identificación de planos y ejes de simetría en una figura dada, clasificar, deducir información de observaciones visuales, visualizar modelos geométricos.
- 2) **Habilidades verbales:** Visualizar figuras con base a una descripción verbal, describir figuras dadas y sus propiedades, formular definiciones apropiadas, describir relaciones entre figuras, reconocer estructura lógica de problemas verbales y formular enunciados de generalizaciones y abstracciones.
- 3) **Habilidades para dibujar.** Esbozar figuras, asignar puntos específicos, esbozar figuras a partir de su descripción verbal, construir figuras con propiedades

dadas, esbozar secciones planas e intersecciones, agregar elementos auxiliares, reconocer el papel y limitaciones de los esquemas y figuras construidas, esbozar o construir modelos geométricos.

- 4) **Habilidades lógicas:** Reconocer diferencias y similitudes entre figuras dadas, reconocer que las figuras se pueden clasificar por sus propiedades, comprender y aplicar propiedades, identificar consecuencias lógicas de datos dados, desarrollar demostraciones y reconocer el papel y limitaciones del método deductivo.
- 5) **Habilidades de aplicación:** Reconocer modelos físicos de figuras geométricas, esbozar o construir modelos geométricos para conjeturar propiedades de objetos físicos, reconocer la utilidad que tienen los modelos geométricos para los objetivos físicos, desarrollar modelos geométricos para fenómenos naturales (ciencias físicas), usar modelos geométricos en la resolución de problemas.

EN SEGUNDO LUGAR:

Para iniciar y desarrollar un trabajo coherente en geometría con nuestros estudiantes podríamos tener en cuenta los niveles de desarrollo mental en geometría apoyados en los indicadores de nivel propuestos por William F. Burger.

¿Qué significa esto?

P.H. VAN NIELE y su esposa en 1959 y 1973 propusieron un modelo para describir el desarrollo mental en geometría basados en sus experiencias e investigaciones. Dicho modelo ha sido descrito, experimentado y analizado por IZAAK WIRSZUP (9176) ALAM HOFFER, J. MICHAEL SCHAUGHNESSY (1986).

Ellos plantean:

- |          |   |
|----------|---|
| NIVEL 0. | <b>Visualización.</b> (Reconocimiento) En él los estudiantes razonan acerca de conceptos geométricos básicos; tales como formas simples; primero a través de consideraciones visuales, para luego aprender algunos términos y describir propiedades de sus componentes. |
| NIVEL 1. | <b>Análisis.</b> Los estudiantes razonan acerca de conceptos geométricos a través de un análisis informal de componentes, partes y atributos. Se establecen las propiedades más claramente.   |
| NIVEL 2. | <b>Abstracción.</b> (Orden). El estudiante ordena lógicamente las propiedades de los conceptos, formula definiciones abstractas y puede distinguir entre la necesidad y suficiencia de un conjunto de propiedades para determinar un concepto.                          |
| NIVEL 3. | <b>Deducción.</b> Razona formalmente en el contexto de un sistema matemático $K$ (con términos indefinidos, axiomas, definiciones, teoremas). Entiende lo que significa deducir y el papel de los postulados, teoremas y demostraciones.                                |
| NIVEL 4. | <b>Rigor.</b> Puede comparar sistemas basados en diferentes axiomas y puede estudiar varias geometrías prescindiendo de modelos concretos. Entiende la importancia de la precisión.   |

Herramientas	Nivel 0 Reconocimiento	Nivel 1 Análisis	Nivel 2 Orden	Nivel 3 Deducción	Nivel 4 Rigor
Visual	¿Cuál de estas figuras es un rectángulo? 1  2  3  4 A  B  C  D	¿Cuántos ejes de simetría tiene un rectángulo? Pliega una lista de propiedades que recuerde del rectángulo.	¿Puede usted mostrar que un tetraedro tiene la forma de rectángulo? Escriba una corta y cuidadosa definición de rectángulo.	¿Existe alguna geometría en la que los rectángulos no sean congruentes? Explique por qué no existen rectángulos en la geometría no euclidiana.	
Verbal	¿Que segmentos son llamados AC y BD? ¿Cuál es el ángulo opuesto al $\angle ABC$ ? ¿Qué lados son adyacentes al lado BC? ... etc. Usando cuadrícula haga un dibujo de un rectángulo con lados de longitud 4 y 7 unidades.	¿Puede usted mostrar que la sección transversal de un tetraedro tiene la forma de rectángulo? Escriba una corta y cuidadosa definición de rectángulo.	¿Cuál es una definición? ¿Cuál un postulado? ¿Cuál un teorema? ¿Un rectángulo es un paralelogramo con un ángulo recto? ¿El área de un rectángulo es igual al producto de la longitud de lados contiguos? ¿El rectángulo cuyos lados son perpendiculares es un cuadrado? Dibuje la región que estos cilindros tienen en común.	Dado un cilindro, ¿es posible construir un rectángulo de igual área con regla y compás? 	
Dibujo	Usando cuadrícula haga un dibujo de un rectángulo con lados de longitud 4 y 7 unidades.	Construya un rectángulo dados la diagonal y un lado.	Dados el triángulo ABC y el rectángulo WXYZ. Usando regla y compás, inscriba el triángulo semejante a WXYZ. 	Dado que no existen rectángulos en la geometría no euclidiana, ¿cómo se determina el área de cualquier figura? ¿Cuál es la forma real de una región de la tierra que en el mapa tiene forma rectangular? 	
Lógica	¿Si un rectángulo se gira, la nueva figura también es un rectángulo? 	¿Es posible determinar el área de un rectángulo conociendo el perímetro? ¿Si dos rectángulos tienen el mismo perímetro, tendrán la misma área? Si un campo rectangular de 100 metros de longitud se quiere dibujar, ¿cuáles son las dimensiones mínimas del papel necesario para dibujarlo en una escala de uno a mil.	Diga si es verdadero o falso. 1. Todo rectángulo es un cuadrado. 2. Todo cuadrado es un rectángulo. 3. Si las diagonales de un paralelogramo son congruentes, tal figura es un rectángulo. Pruebe o refute. Si las diagonales de un cilindro son congruentes, éste es un rectángulo.	Dado que no existen rectángulos en la geometría no euclidiana, ¿cómo se determina el área de cualquier figura? Construya sólidos que atraviesen cada uno de los agujeros (ajusten). 	
Aplicaciones	Describe objetos de forma rectangular que encuentre en el salón de clases o en el patio de deportes.	¿Existe alguna geometría en la que los rectángulos no sean congruentes? Explique por qué no existen rectángulos en la geometría no euclidiana.	Dado que no existen rectángulos en la geometría no euclidiana, ¿cómo se determina el área de cualquier figura? Construya sólidos que atraviesen cada uno de los agujeros (ajusten). 	Dado que no existen rectángulos en la geometría no euclidiana, ¿cómo se determina el área de cualquier figura? Construya sólidos que atraviesen cada uno de los agujeros (ajusten). 	

Investigaciones realizadas en Países Europeos y en Norteamérica muestran que este último nivel raramente se consigue en bachillerato. Naturalmente nuestras condiciones frente a estos niveles merecerían un análisis muy particular.

Sería pertinente preguntarse en este momento. ¿Existen parámetros más específicos, que permitan: Identificar los niveles en un caso concreto?

¿Diseñar un programa (si nos parece) que los tenga en cuenta, e involucrar además las habilidades descritas anteriormente?

En realidad HOFFER ilustra de manera amplia estos aspectos pero no es pertinente en este momento extenderme más a este respecto. En el desarrollo de la conferencia ilustraré con unos ejemplos; pero lo que espero en realidad, es que ustedes discutan la viabilidad y conveniencia de estas propuestas en nuestro caso concreto. Basados naturalmente en sus experiencias y en los comentarios que se reseñaron en esta ocasión.

#### BIBLIOGRAFIA

1. Estudios en Educación Matemática. Volumen 5. Enseñanza de la Geometría. Editado por Robert Morris-UNESCO (1986)
2. Caracterización de los Niveles de VAN NIELE para Desarrollo en Geometría. WILLIAM BURGER. J. MICHAEL SHUGHNESSY. Journal Research in Mathematics Education. Vol. 17 (1986).
3. Niveles de VAN NIELE USISKIN ZALMAN. Final Report of the CDAS6. proyect University of Chicago (1982).
4. HOFFER ALAN. "La Geometría es más que una demostración", Mathematics Teacher. (Enero 1981).
5. Especial Symposium Internacional Renovación Enseñanza de Las Matemáticas. Revista de La Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas, Thales No. 8, Thales Números extraordinario (1987).