Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 9 No. 1, enero-junio 1991

Notas de Clase: Lateralmente hablando

LUIS H. RODRIGUEZ

En los cursos de cálculo es frecuente encontrar las expresiones:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = M$$

para denotar los límites laterales izquierdo y derecho respectivamente; en el primer caso, x pertenece al intervalo abierto $(-\infty, c)$; en el segundo, al intervalo, también abierto, $(c, +\infty,)$ los cuales son partes disyuntas de la recta real (ver figura 1).

FIGURA 1

Pero para una función como

$$f(x) = 1 \quad \text{si } x \text{ es racional}, \quad f(x) = 0 \quad \text{si } x \text{ es irracional},$$

estudiar la existencia de límites laterales derecho, e izquierdo puede ser complicado;

en este caso es más fácil calcular los límites

$$\lim_{x \to c,\, x\ \text{racional}} f(x) \qquad \lim_{x \to c,\, x\ \text{irracional}} f(x)\ ;$$

en el primer caso x pertenece a Q, en el segundo caso a su complementario R-Q, los cuales son partes disyuntas de R. Como R = QUR - Q podemos hacer un gráfico un poco inusual de los números reales (figura 2),

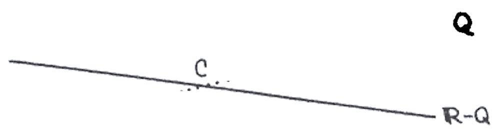

FIGURA 2

el cual nos muestra a R descompuesto en dos partes disyuntas.

¿Qué tienen de común las situaciones anteriores? Fundamentalmente, que hemos considerado dos subconjuntos disyuntos de R en cada caso para acercarnos a c. Por lo tanto, así como hablamos de "límite lateral izquierdo" y "límite lateral derecho", podríamos también hablar de "límite lateral racional" y "límite lateral irracional", según nos acerquemos a c siguiendo el camino Q o el camino R-Q.

Esto nos muestra que la noción de "lateralidad" en matemáticas es algo amplia que la que nos pueda brindar el conocimiento común, y también más útil, como lo veremos más adelante.

Recordando que en el análisis de límite de f en c se puede utilizar la vía $\epsilon - \delta$ (para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que etc. ...) o la vía secuencial (para toda sucesión (c_n) contenida en el dominio de f ... la compuesta tiende a...), tenemos así dos opciones más, la "continua" y la "discreta" respectivamente.

En definitiva, cuando estudiamos límites de funciones tenemos 12 posibilidades que se pueden esquematizar así:

1) lateralidad derecha continua (vía $\epsilon - \delta$);
2) lateralidad derecha discreta (vía secuencial);
3) lateralidad izquierda continua (vía $\epsilon - \delta$);
4) lateralidad izquierda discreta (vía secuencial);

5) lateralidad derecha racional (vía secuencial);
6) lateralidad derecha irracional (vía secuencial);
7) lateralidad izquierda racional (vía secuencial);
8) lateralidad izquierda irracional (vía secuencial);
9) lateralidad racional (vía secuencial);
10) lateralidad irracional (vía secuencial);
11) lateralidad racional (vía $\epsilon - \delta$);
12) lateralidad irracional (vía $\epsilon - \delta$).

La utilización de una de las 12 posibilidades depende del problema.

El siguiente problema está resuelto con las posibilidades 9 y 10.

Sea f la función definida por:

f(x) = 0 si x es irracional; f(x) = 1/n si x = m/n, m y n primos relativos, n > 0. Para simplificar un poco el asunto consideremos $x \in [0, 1]$.

Demostrar que f no es derivable en [0 , 1].

Solución: Se puede probar fácilmente que f no es derivable en los puntos racionales, ya que f no es continua en los racionales ([1] página 111). Para ver que f no es derivable en los irracionales elegimos un irracional c en el intervalo [0 , 1] y (c_n) sucesión de irracionales en [0 , 1] tal que $\lim_{n\to\infty}(c_n) = c$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \{ (f(c_n) - f(c)) / (c_n - c) \} = 0$$

Sea ahora (p_n/q_n) una sucesión de racionales en [0 1] tal que

$$\lim_{n\to\infty} (p_n - q_n c) = 0 \quad ([2])\ pág.\ 45)$$

así que $\lim_{n\to\infty} (p_n/q_n) = c$, *además*:

$$\lim_{n\to\infty} |(f(p_n/q_n) - f(c))| / |(p_n/q_n - c)| \neq 0$$

Por lo tanto no existe $f'(c)$ y en consecuencia f no es derivable en [0   1].

Para la siguiente función el lector podría utilizar las posibilidades (1) y (3) en el estudio de la continuidad y las posibilidades (2) y (4) en el estudio de la derivabilidad.

Para calcular $f(x)$ para cada x de [0 , 1] hacemos lo siguiente:

1. Exprésese x en base 10 $x = 0.c_1 c_2 c_3 \ldots$.
   Cada c_j es 0, 1, 2, 3, ... , 9 ,

2. $f(x)$ se expresará en base 2:

   $f(x) = 0.b_1 b_2 b_3 \ldots$. Cada b_j es 0 ó 1 y se determina a partir de c_j como sigue:

   i) $b_1 = 0$ si c_1 es 0 , $b_1 = 1$ si c_1 no es 0

   ii) Dado b_{j-1} ; $b_j = b_{j-1}$ si $c_{j-1} = c_j$ y

   $b_j \neq b_{j-1}$ si $c_j \neq c_{j-1}$.

   Debe probarse que f es continua pero no derivable [3].

BIBLIOGRAFIA

[1] MICHAEL SPIVAK. Cálculo infinitesimal. 1ed.

[2] TAKEUCHY YU. Sucesiones y series. Tomo I, 1ed., 1971.

[3] SHERMAN K. Stein. Cálculo con geometría analítica. 1ed., 1973.