Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 9 No. 1, enero-junio 1991

Ultrafiltros en R

YU TAKEUCHI

1. **Introducción:** Sea $\mathcal{F}$ un ultrafiltro regular en $\mathbb{N}$, decimos que una sucesión (a_n) satisface una propiedad "p" para casi todo n si

$$\{n \mid a_n \text{ satisface la propiedad } p\} \in \mathcal{F}$$

En $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ se establece una relación de equivalencia "~"

$$(a_n) \sim (b_n) \quad \text{sí y sólo si} \quad a_n = b_n \quad \text{para casi todo } n.$$

$\mathbb{R}^*$ es el conjunto de todas las clases de equivalencia, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$; en el presente trabajo lo denotaramos por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/F$ ya que $\mathbb{R}^*$ así obtenido depende del ultrafiltro F (ver [3]).

Dado un $\sigma \in R^*-R$, sea $\mathcal{U}_\sigma$ la colección de los conjuntos reales definida por:

$$\mathcal{U}_\sigma = \{ S \subset R \mid \sigma \in S^* \},$$

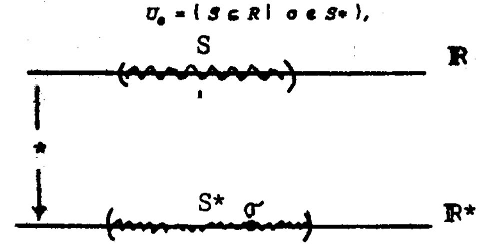

FIGURA 1

entonces U_σ es un ultrafiltro no-trivial en R, donde S^* es la extensión elemental de S.

Demostración:

(i) Evidentemente $\phi \notin U_\sigma$ ya que $\phi^* = \phi$

(ii) Si $T, S \in U_\sigma$ entonces $\sigma \in S^*$ $\sigma \in T^*$, luego:

$$\sigma \in S^* \cap T^* = (S \cap T)^*,$$

esto es, $S \cap T \in U_\sigma$.

(iii) Si $S \in U_\sigma, T \supseteq S$ entonces $S^* \ni \sigma, T^* \supseteq S^*$, luego,

$T^* \ni \sigma$, esto es, $T \in U_\sigma$

De lo anterior, U_σ es un filtro sobre R

(iv) Sea $S \subset R$. Supongamos que $S \notin U_\sigma$, esto es, $\sigma \notin S^*$.

Entonces:

$$\sigma \in R^* - S^* = (R - S)^*,$$

luego, $R - S \in U_\sigma$. Por lo tanto, U_σ es un ultrafiltro en R.

(v) Si U_σ fuera trivial entonces existiría un $a \in R$ tal que

$\{a\} \in U_\sigma$,

luego $\sigma \in \{a\}^* = \{a\}$ (absurdo!) ya que

$\sigma \notin R$ ■

Ejemplo 1. Sea F un ultrafiltro regular en N, si

$$\hat{F} = \{S \subset R \mid S \cap N \in F\} \tag{2}$$

entonces $\hat{F}$ es un ultrafiltro no trivial en R (inmediato).

Sean $R^* = R^N/F$, $\lambda = [(1,2, \qquad)] \in N^*$, entonces:

$$\hat{F} = U_\lambda \tag{3}$$

Demostración: Supongamos que $S \in U_\lambda$, entonces $\lambda = [(n)] \in S^*$ o sea, $n \in S$ para casi todo n, esto es:

$$S \cap N = \{n \in N \mid n \in S\} \in F,$$

por lo tanto se tiene que $S \in \hat{F}$, o sea, $U_\lambda \subseteq \hat{F}$.

Como U_λ es un ultrafiltro en R, entonces se obtiene la igualdad (3). ■

Se surgen naturalmente las siguientes preguntas:

(i) ¿Es "uno a uno" la correspondencia $\sigma \to U_\sigma$? o sea:

si $\alpha \neq \beta$ entonces ¿ $U_\alpha \neq U_\beta$?

(ii) ¿Es "sobre" la correspondencia $\sigma \to U_\sigma$? o sea:

dado un ultrafiltro U en R, ¿existirá un $\sigma \in R^*$ tal que $U = U_\sigma$?

El propósito del presente trabajo es contestar a estas dos preguntas.

2. No todos los ultrafiltros son de la forma U_σ .

Existen ultrafiltros no triviales que no sean de la forma U_σ .

Demostración: Sabemos que existen 2^c ultrafiltros en N (ver [1], [5]), entonces el número de ultrafiltros en R es "mayor o igual" a 2^c. Sin embargo, como

$$|R^*| = |R^N/\sim| = \mathcal{C},$$

entonces los ultrafiltros de la forma U_a con $a \in R+$ no cubren la totalidad de los ultrafiltros en R. ■

3. Una partición de un conjunto relacionada con una función.

Para estudiar la inyectividad de la correspondencia $a \to U_a$ veremos primero el siguiente teorema que es indispensable para el desarrollo del presente trabajo.

Teorema 1. Sean X un conjunto, f una función de X en X, entonces X puede subdividirse, a lo más, en 4 subconjuntos P,Q,R,S, dos a dos disyuntos, tales que

$$f(P)\cap P = \phi, \quad f(Q)\cap Q = \phi, \quad f(R)\cap R = \phi, \qquad (1)$$
$$S = \{x\in X \mid f(x) = x\}.$$

Nótese que R y S pueden ser vacíos. (# Nota)

(#) $X = P\cup Q\cup R\cup S$ así (P,Q,R,S) es una partición del conjunto X.

S es el conjunto de todos los puntos fijos de la función f en X.

Demostración: Dado $x \in X$, sea:

$$D_x = (x, f(x), f(f(x)), \dots, f^n(x), \dots)$$

donde

$$f^n = \underbrace{f\circ f\circ f\circ \dots \circ f}_{n \text{ veces}}, \quad f^0(x) = x.$$

D_x puede ser una sucesión de elementos distintos, ó, D_x posee algunos dos elementos iguales, por ejemplo:

$$f^m(x) = f^{m+l}(x)$$

En el último caso la sucesión D_x es "periódica" a partir del m-ésimo término. Al mínimo número natural "l" que satisface la igualdad anterior se le llama "el período" de la sucesión D_x. Especialmente, si m=0 entonces la sucesión D_x es "periódica" a partir del

primer término, así:

$$D_x = (\underbrace{x, f(x), \dots, f^{l-1}(x)}_{l \text{ términos}}, \underbrace{x, f(x), \dots, f^{l-1}(x)}_{l \text{ términos}}, \underbrace{x, f(x), \dots}).$$

En el conjunto de sucesiones $D = \{D_x \mid x \in X\}$ se establece una relación "~" como sigue:

$D_x \sim D_y$ si D_x, D_y poseen algún elemento común, o sea que existen n,m tales que

$$f^n(x) = f^m(y)$$

En consecuencia:

$$f^{n+k}(x) = f^{m+k}(y) \quad \text{para todo} \quad k = 0,1,2,3,$$

esto es, la cola de la sucesión D_x coincide con la cola de la sucesión D_y. Por lo tanto, $D_x \sim D_y$ si y sólo si las dos sucesiones D_x, D_y poseen la misma cola. De lo anterior se ve inmediatamente que "~" es una relación de equivalencia en el conjunto D. Especialmente,

D_x es equivalente a su propia cola:

$$D_x \sim Df^m(x) = (f^m(x), f^{m+1}(x), f^{m+2}(x), \quad) \text{ para cualquier } m.$$

Por lo tanto, si D_x es periódica a partir de algún término, ésta es equivalente a sucesiones periódicas a partir del primer término.

En el conjunto cociente D/~ podemos escoger una representante de cada clase de equivalencia de tal manera que la representante de la clase de sucesiones periódicas a partir de algún término sea una de las sucesiones periódicas a partir del primer término. Sea $\{D_t \mid t \in B\}$ el conjunto de todas estas representantes; dado $x \in X$ existe $t \in B$ tal que

$$D_x \sim D_t \quad (t \in B) \qquad (2)$$

Vamos a clasificar $x \in X$ en cuatro bloques P,Q,R y S como sigue:

(i) Si D_x es una sucesión de <u>elementos distintos</u> (no periódica) también lo es D_t, como $D_x \sim D_t$ entonces existen n,m tales que

$$f^n(x) = f^m(t) \qquad (3)$$

Sean:

$$\begin{cases} x \in P & si\ m\text{-}n\ es\ par \\ x \in Q & si\ m\text{-}n\ es\ impar \end{cases}$$

Nótese que la pareja (n, m) que satisface (3) no es única, pero sí es única la diferencia m-n. Tenemos:

$$f^n(f(x)) = f(f^n(x)) = f(f^m(t)) = f^{m+1}(t) \ ,$$

como la paridad de (m+1) - n = (m-n) + 1 es contraria a la paridad de m-n, entonces se tiene que: si $x \in P$ entonces $f(x) \in Q$, y, si $x \in Q$ entonces $f(x) \in P$, o sea:

$$f(P) \subset Q \qquad f(Q) \subset P \ . \bullet$$

Supongamos ahora que D_x es una <u>sucesión periódica</u> de período "l" a partir de algún término. Hemos escogido D_t $(t \in B)$ como una sucesión <u>periódica</u> a partir del <u>primer término</u>, y, $D_x \sim D_t$ entonces D_t es una <u>cola</u> de la sucesión D_x, luego existe n tal que $f^n(x) = t$, sea "n" el
<u>mínimo número</u> natural tal que

$$f^n(x) = t \qquad (4)$$

Consideremos los siguientes tres casos.

(ii) Cuando l=1, o sea:

$$D_x = (x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x), t, t, t, \ldots) \ ,$$

sean

$$\begin{cases} x \in S\ si\ n=0 \\ x \in P\ si\ n\ \ es\ impar \\ x \in Q\ si\ n\ \ es\ par\ ,\ n \neq 0 \end{cases}$$

Si $x \in S$ entonces $f(x)=x$, o sea que S sería el conjunto de todos los puntos fijos de la función f en X. Si $x \in Q$ entonces $f(x) \in P$; si $x \in P$ entonces $f(x) \in Q$, ó, $f(x) \in S$.

(iii) Cuando l es <u>par</u>, o sea:

$$D_x = (x, \ldots, f^{n-1}(x), \underbrace{t, f(t), \ldots, f^{l-1}(t)}_{par}, \underbrace{t, f(t), \ldots, f^{l-1}(t)}_{par}, \underbrace{t, f(t), \ldots}\,)$$

sean:

$$\begin{cases} x \in P & si\ \ n\ es\ impar, \\ x \in Q & si\ \ n\ es\ \ par \end{cases}$$

Se observa inmediatamente que $f(P) \subset Q$, $f(Q) \subset P$. $\bullet$

(iv) Cuando l es <u>impar,</u> $l \neq 1$, sean:

$$\begin{cases} x \in P\ si\ n = 0,\ \ ó\ \ n\ es\ impar,\ n \neq 1, \\ x \in Q\ si\ n\ es\ par,\ n \neq 0, \\ x \in R\ si\ n = 1. \end{cases}$$

Tenemos que: si $x \in R$ entonces $f(x) \in P$; si $x \in P$ entonces $f(x) \in Q$; si $x \in Q$ entonces
$f(x) \in P$, ó, $f(x) \in R$. $\bullet$

De lo anterior, se ve que los conjuntos P,Q,R,S son <u>disyuntos dos a dos</u>, y que

$$f(P) \subset Q \cup S\ ,\ f(Q) \subset P \cup R\ ,\ f(R) \subset P \quad f(S) = S\ ,$$

lo cual garantiza las condiciones exigidas en (1). ∎

<u>Ejemplo 2.</u> Sean: X = {1,2,3,4} f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 4

Tenemos: $D_1 \sim D_2 \sim D_3$. Si D_1 es la representante de la clase de equivalencia (D_1, D_2, D_3) entonces tenemos:

$$P = (1)\ ,\quad Q = (2)\ ,\quad R = (3)\ ,\quad S = (4)\ .$$

Corolario 1. Sean X un conjunto, f una función de X en X tal que

$$x \neq f^{l}(x) \text{ para } l \text{ impar, para todo } x \in X,$$

entonces existe una partición (P,Q) de X tal que

$$f(P) \cap P = \phi\ ,\quad f(Q) \cap Q = \phi\ .$$

Demostración: En la demostración del teorema 1 se tiene que $R = \phi$ ya que el caso (iv) no se presnta. Además, la función f no tiene punto fijo en X puesto que $x \neq f(x)$ para todo $x \in X$, en consecuencia: $S = \phi$. ■

Corolario 2. Sean X un conjunto ordenado, f una función de X en X tal que $f(x) > X$ (ó $f(x) < x$) para todo $x \in X$, entonces existe una partición (P,Q) de X tal que

$$f(P) \cap P = \phi\ ,\quad f(Q) \cap Q = \phi$$

Demostración: Si $f(x) > x$ (ó $f(x) < x$) entonces $f^{l}(x) > x$ (ó $f^{l}(x) < x$ resp.) para cualquier l, o sea: $x \neq f^{l}(x)$ para cualquier l. Aplicar el Corolario 1. ■

4. La inyectividad de $\alpha \to U_\alpha$

Teorema 2. Sea $\alpha = [(a_n)] \in R^*$ tal que $a_n \neq a_k$ para $n \neq k$, entonces:

$\beta \neq \alpha$ *implica* $U_\beta \neq U_\alpha$

Demostración: Sea F el ultrafiltro regular en N con que construye R^*:

$$R^* = R^N/F\ .$$

Supongamos que $\beta = [(b_n)] \in R^*$ $\quad U_\beta = U_\alpha$

Como $a_n \in \{a_k \mid k \in N\}$ para todo n, entonces $\alpha \in \{a_k \mid k \in N\}^*$, luego:

$\{a_k \mid k \in N\} \in U_\alpha = U_\beta$, así $\beta \in \{a_k \mid k \in N\}^*$, o sea

$b_n \in \{a_k \mid k \in N\}$ para casi todo n.

Por esta razón, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que

$$\{b_k \mid k \in N\} \subseteq \{a_k \mid k \in N\} \qquad (1)$$

Supongamos que $\alpha \neq \beta$ y llegaremos a un absurdo.

Sean f, g: $N \to N$ definidas por:

$f(n) = a_n$, $g(n) = b_n$ para $n \in N$,

entonces la función f es uno a uno puesto que $a_n \neq a_k$ para $n \neq k$. Se define la función $h : N \to N$ como sigue:

$h(n) = f^{-1}(g(n))$ para $n \in N$,

entonces $h(n) \neq n$ para casi todo n puesto que $a_n \neq b_n$ para casi todo n

Luego: $\{n \mid h(n) \neq n\} \in F$

Según el teorema 1, el conjunto $\{n \mid h(n) \neq n\}$ puede subdividirse en tres subconjuntos P,Q,R tales que

$$h(P) \cap P = \phi\ ,\ h(Q) \cap Q = \phi\ ,\ h(R) \cap R = \phi \qquad (2)$$

Como $\{n \mid h(n) \neq n\} = P \cup Q \cup R \in F$, y , F es un ultrafiltro, entonces uno de los tres subconjuntos P,Q,R debe pertenecer al ultrafiltro F. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $P \in F$, entonces

$$a_n \in \{a_k \mid k \in P\} = f(P)\ ,\ b_n \in \{b_k \mid k \in P\} = g(P)$$

para casi todo n, o sea:

$$\alpha \in f(P)^*\ ,\quad \beta \in g(P)^*$$

esto es, $f(P) \in U_\alpha$, y $g(P) \in U_\beta$ Por lo tanto se debe tener que

$$f(P) \cap g(P) \in U_\alpha = U_\beta ,$$

luego: $f(P) \cap g(P) \neq \phi$, lo cual contradice a:

$$f^{-1}(g(P)) \cap P = h(P) \cap P = \phi \qquad (absurdo!)$$

Por lo tanto se debe tener que $\alpha = \beta$ ■

<u>Ejemplo 3.</u> Sea

$\lambda = [(1,2,3, \qquad)] \in R^*$, *entonces* $U_\lambda = U_\beta$ *si y sólo si* $\lambda = \beta$ ■

El siguiente teorema nos muestra que la correspondencia $\sigma \to U_\sigma$ es <u>inyectiva</u> cuando el ultrafiltro F utilizado para construir R* es <u>"especial"</u> de tal manera que en R* todo infinitesimal es representable por sucesión convergente a cero (ver [2]).

<u>Teorema 3.</u> Sea F un ultrafiltro especial en N de tal manera que para toda partición $\{ A_k \mid k = 1,2,3,\dots \}$ de N con

$$\bigcup_{k \geq n} A_k \in F \ \ para\ todo\ n ,$$

existe $S \in F$ con $| S \cap A_k | \leq 1$ para todo k. (# Nota)

Si $R^* = R^N/F$ entonces: $\alpha \neq \beta$ *implica* $U_\alpha \neq U_\beta$

\# <u>Nota:</u> $| S \cap A_k$ es el <u>número de elementos</u> del conjunto $S \cap A_k$; luego, $| S \cap A_k | \leq 1$ quiere decir que el conjunto $S \cap A_k$ es "unitario" o "vacío".

<u>Demostración:</u> Dado $\alpha = [(a_n)] \in R^* \quad R$ cualquiera, basta demostrar que existe una representante $(\hat{a}_n)$ de α tal que $\hat{a}_n \neq \hat{a}_k$ *para* $n \neq k$

Sabemos que cualquier número no-estándar finito es la suma de un número real y un infinitesimal, y que un número infinitesimal diferente de cero es el inverso de un número infinito, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\alpha = [(a_n)]$ es un infinito positivo, $a_n > 1$ para todo n.
Consideremos la partición $(A_k ; k = 1,2,3,\dots)$ de N dada por:

$$A_k = \{ j \mid k-1 \leq a_j < k \} \qquad (k = 1,2,3,$$

Como $\alpha = [(a_n)]$ es un infinito positivo, entonces se tiene que

$$\bigcup_{k \geq n} A_k = \{ j \mid a_j \geq n-1 \} \in F \ (para\ todo\ n)$$

luego existe $S \in F$ tal que

$$A_k \cap S | \leq 1 \quad para\ todo\ k$$

Se define $\hat{a}_n$ como sigue:

$$\hat{a}_n = \begin{cases} a_n & si \quad n \in S \\ \frac{1}{n} & si \quad n \in S \end{cases}$$

entonces $\hat{a}_n = a_n$ para <u>casi todo</u> n ya que $S \in F$, además se ve que $\hat{a}_n \neq \hat{a}_m$ para $n \neq m$.
■

5. Un modelo de R* donde $\sigma \to U_\sigma$ no es inyectiva.

A continuación daremos un ejemplo de R* R^N/F donde existen α *y* β *con* $\alpha \neq \beta$ *tales que* $U_\alpha = U_\beta$, o sea que la correspondencia $\sigma \to U_\sigma$ no es inyectiva.

<u>Ejemplo 4.</u> Sean $\mathcal{F}$ un ultrafiltro regular en N , s una función biyectiva de N X N

sobre N. Dado un subconjunto B de N se define:

$$S_B = \{ n \in N \mid \{ i \in N \mid s(n,i) \in B \} \in \Phi \}$$

Por ejemplo, si $N - B$ es "finito" entonces existe un m tal que

$$N-B \subset \{ s(n,i) \mid n, i = 1,2,\ldots,m \}$$

luego se tiene que

$s(n,i) \in B$ para todo $i > m$

Como Φ es un ultrafiltro "regular" en N, entonces $S_B = N$. ●

Consideremos la colección F de todos los subconjuntos B de N tales que

$$S_B \in \Phi$$

entonces es fácil demostrar que F es un ultrafiltro regular en N. (Apéndice)

[I] Sean (a_n), (b_n) definidas por:

$a_{s(k,i)} = k$ para todo k, para todo i,

$b_{s(k,i)} = i$ para todo k, para todo i,

entonces:

$$\alpha = [(a_n)] \neq \beta = [(b_n)] \quad \text{en} \quad R^* = R^N/F. \qquad (1)$$

En efecto, para cada $k \in N$ tenemos:

$a_{s(k,i)} \neq b_{s(k,i)}$ para todo $i \neq k$ (para casi todo i),

sea:

$$i \in N \mid a_{s(k,i)} \neq b_{s(k,i)} \} \in \Phi \quad \text{para cada} \quad k \in N,$$

uego:

$$k \in N \mid \{ i \in N \mid a_{s(k,i)} \neq b_{s(k,i)} \} \in \Phi \} = N$$

esto es, $\{ n \in N \mid a_n \neq b_n \} \in F$. ●

[II] Supongamos que $S \in U_\alpha$, entonces $\in S^*$ o sea:

$$B = \{ n \mid a_n \in S \} = \{ s(k,i) \mid k \in S, \ i \text{ cualquiera} \} \in F$$

Pero como:

$$\{ i \in N \mid s(k,i) \in B \} = \begin{cases} N & si \quad k \in S \\ \phi & si \quad k \notin S \end{cases}$$

entonces:

$$\{ k \in N \mid \{ i \in N \mid s(k,i) \in B \} \in \Phi \} = S \in \Phi. \ \blacktriangle$$

Por otra parte, sea

$$\hat{B} = \{ n \in N \mid b_n \in S \} = \{ s(k,i) \mid i \in S, \ k \text{ cualquiera} \},$$

entonces:

$$\{ i \in N \mid s(k,i) \in \hat{B} \} = S \quad \text{para todo } k,$$

luego:

$$k \in N \mid \{ i \in N \mid s(k,i) \in \hat{B} \} \in \Phi \} = \{ k \in N \mid S \in \Phi \} = N \in \Phi$$

o sea que $\hat{B} \in F$ Por lo tanto, tenemos que $\beta \in S^*$ (esto es, $S \in U_\beta$).

Por lo tanto obtenemos: $U_\alpha \subseteq U_\beta$ Pero como U_α U_β son ultrafiltros, entonces se tiene que $U_\alpha = U_\beta$ ■

<u>Apéndice</u> (Ver [4])

● Evidentemente, $\phi \notin F$ ya que $S_\phi = \phi$

● Supongamos que $B \in F$, $D \supseteq B$ entonces:

$$S_D = \{ n \mid \{ i \mid s(n,i) \in D \} \in \Phi \} \supseteq \{ n \mid \{ i \mid s(n,i) \in B \} \in \Phi \} = S_B$$

Como $S_B \in \mathcal{U}$ entonces $S_D \in \mathcal{U}$, o sea que $D \in F$

- Supongamos que $B, C \in F$ (esto es, S_B, $S_C \in \mathcal{U}$)

Tenemos inmediatamente que $S_B \cap S_C \supseteq S_{B\cap C}$

Por otra parte, si $n \in S_B \cap S_C$ entonces:

$$\{ i \mid s(n,i) \in B \} \in \mathcal{U}, \quad \{ i \mid s(n,i) \in C \} \in \mathcal{U}$$

luego:

$$\{ i \mid s(n,i) \in B \cap C \} = \{ i \mid s(n,i) \in B \} \cap \{ i \mid s(n,i) \in C \} \in \mathcal{U}$$

esto es, $n \in S_{B\cap C}$, o sea que $S_B \cap S_C = S_{B\cap C}$

Por lo tanto, $S_{B\cap C} = S_B \cap S_C \in \mathcal{U}$, esto es, $B \cap C \in F$

De lo anterior, F es un filtro sobre N.

- Supongamos que $B \notin F$, entonces $S_B \notin \mathcal{U}$ luego:

$$S_{N-B} = \begin{array}{l} n \mid \{ i \mid s(n,i) \in N-B \} \in \mathcal{U} \} \\ n \mid \{ i \mid s(n,i) \in B \} \notin \mathcal{U} \} = N - S_B \in \mathcal{U} \end{array}$$

por lo tanto se tiene que N - B $\in$ F. De lo anterior, F es un ultrafiltro.

- Si N-B es <u>finito</u>, entonces $S_B = N \in \mathcal{U}$ o sea, $B \in F$ Por lo tanto F es un ultrafiltro <u>"regular"</u> en N. ■

REFERENCIAS

[1] CAICEDO, Xavier. Aspectos estructurales de R*, Mat. Ens. Univ. No. 34, 1985, pp. 40-46.

[2] CAICEDO, Xavier. ¿Son todos los infinitesimales representables por sucesiones convergentes a 0? Mat. Ens. Univ. No. 38, 1986.

[3] YU TAKEUCHI. Métodos Analíticos del Análisis No-estándar. Universidad Nacional de Colombia, 1988.

[4] YU TAKEUCHI. Superdensidad de conjuntos infinitesimales. Nota del Seminario, 1988.

[5] RUSSELL and WALKER. The Stone-Cech Compactification, Springer, 1974.