Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 9 No. 1, enero-junio 1991

Esferas Hiper-octaédricas centralmente simétricas (*)

Por: LUIS ENRIQUE RUIZ HERNANDEZ

Abstract. A class $\mathcal{B}_n$ of central n-dimensional 2^n-topes named b_n and norms ϕ on $\mathbb{R}^n$ are coined so that the closed spheres with respect to ϕ are polytopes b_n. Conversely, each b_n is closed unitary sphere with respect to a norm ϕ on $\mathbb{R}^n$. In both cases ϕ is the sum of n absolute values, so that ϕ is a generalization of the norm inducing the taxi-cab metric. Particularly the cross polytope β_n belongs to $\mathcal{B}_n$ and $\mathcal{B}_3$ is just the family of the centrally symmetric solid octahedra. β_n is defined and characterized as a locus whose points satisfy a metric condition.

INTRODUCCION. En el lema 1 se construye una familia de normas ϕ sobre $\mathbb{R}^n$ (una generalización de la norma que induce la métrica del taxista) de modo que las esferas cerradas de centro G respecto a ϕ son 2^n-topos n-dimensionales centralmente simétricos en G, cuyos elementos (o caras) k-dimensionales se describen en el Teorema 1.

En la definición 1 se acuña una clase $\mathcal{B}_n$ de politopos llamados b_n de tal suerte que las esferas cerradas respecto a ϕ (del Lema 1) son politopos b_n. En particular el politopo cruzado β_n ([1],pp. 121-122,292-295) pertenece a $\mathcal{B}_n$ y $\mathcal{B}_3$ es justamente

(*) Versión ampliada de la comunicación pronunciada en el I Coloquio Bolivariano de Matemáticas (Quito, Julio 16-21 de 1990).

la familia de los octaedros sólidos centralmente simétricos. Recíprocamente, en el Corolario 1 se prueba que todo b_n es una esfera cerrada unitaria de centro (de simetría) G respecto a una norma ϕ (del Lema 1), b_n es n-dimensional y $\mathcal{F}_k$ en (S) es la familia de todas sus caracas k-dimensionales.

En el Lema 3 se caracterizan las bases ortogonales en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ usando la noción del producto vectorial en $\mathbb{R}^n$ ([3], pp.77-79), y así hallar en el Corolario 2 las inecuaciones de una sub-clase de politopos b_n y en particular de β_n. En consecuencia se consigue al final (Definición 2) una definición y caracterización puntual de β_n.

Denotaremos en adelante con letra imprenta mayúscula los vectores (o puntos) en $\mathbb{R}^n$ y sus componentes por la misma en minúscula con subíndice, como $A_k = (a_{k1},\dots,a_{kn})$, $X=(x_1,\dots,x_n)$, etc.

Nota Especial. Todos los Lemas, Corolarios y el Teorema 1 (como las Definiciones 1 y 2) consignados en este artículo son originales; fueron concebidos y demostrados por su autor.

LEMA 1. Si $A_1,\dots,A_n$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$, entonces la función $\phi:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(X) = \sum_{k=1}^{n} |A_k \cdot X|, \qquad X \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

es una norma sobre $\mathbb{R}^n$

Demostración. $\phi(X) = 0$ es equivalente a $|A_k \cdot X| = 0$ $k = 1,\dots,n$ o al sistema de ecuaciones

$$A_k \cdot X = 0, \qquad k =$$

con determinante $\det(A_1,\dots,A_n) \neq 0$ y solución única $X = 0$. Es inmediato de la definición de ϕ que $\phi(\lambda X) = |\lambda|\phi(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Además

$$|A_k(X+Y)| \leq |A_k \cdot X| + |A_k \cdot Y|, \qquad k =$$

implica

$$\phi(X+Y) \leq \phi(X) + \phi(Y)$$

OBSERVACION 1. La equivalencia $1-\delta_k \in \{0,1\}$, si y sólo si $\delta_k \in \{0,1\}$, y la definición de valor absoluto permiten para ϕ otra expresión,

$$\phi(X) = \underset{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0,1\}^n}{\text{Máx}} \; X\cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k = \underset{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0,1\}^n}{\text{Máx}} \left|X\cdot \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k\right|$$

En la demostración del Teorema 1 aparece la evidencia del siguiente

LEMA 2. Si $\lambda_i \geq 0$ y $\lambda_1 + \dots + \lambda_{2n} = 1$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{n+k}| \leq 1 \tag{2}$$

La igualdad ocurre, si y sólo si

$$\lambda_k = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_{n+k} = 0, \quad k = 1,\dots,n$$

Demostración. Si $n = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entonces

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = \sum_{k=1}^{1} |\lambda_k - \lambda_{1+k}| \leq 1.$$

Además,

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \qquad \text{si y sólo si, } \lambda_1 = 0 \text{ ó } \lambda_2 = 0$$

Supongamos que el Lema 2 se cumple para cualesquiera $2n$ reales no-negativos cuya suma es 1, $(n \geq 1)$. Sean $\lambda_1 \geq 0,\dots,\lambda_{2(n+1)} \geq 0$, tales que $\lambda_1 + \dots + \lambda_{2(n+1)} = 1$. Si $\lambda_1 + \lambda_{n+2} = 1$ entonces $\lambda_i = 0$, para todo $i \neq 1, n+2$, y

$$\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k - \lambda_{(n+1)+k}| = |\lambda_1 - \lambda_{n+2}| \leq 1,$$

donde ocurre la igualdad, si y sólo si, $\lambda_1 = 0$ ó λ_{n+2} $\lambda_{(n+1)+1} = 0$.

Sea entonces $\lambda_1 + \lambda_{n+2} \neq 1$, y definamos

$$\ell_k = \begin{cases} \dfrac{\lambda_{k+1}}{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})} & 1 \leq k \leq n \\[2ex] \dfrac{\lambda_{k+2}}{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})} & \text{si} \quad n+1 \leq k \leq 2n; \end{cases}$$

entonces $0 \leq \ell_k \leq 1$ y

$$\sum_{k=1}^{2n} \ell_k = \sum_{k=1}^{n} \ell_k + \sum_{k=n+1}^{2n} \ell_k \quad \frac{}{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})}\left\{\sum_{n=1}^{n} \lambda_{k+1} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \lambda_{k+2}\right\}$$

$$\frac{}{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})}\left\{\sum_{k=1}^{2(n+1)} \lambda_k - (\lambda_1+\lambda_{n+2})\right\}$$

y, por hipótesis de inducción,

$$\sum_{k=1} |\ell_k - \ell_{n+k} \quad \frac{}{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})} \sum_{k=1}^{n} |\lambda_{k+1} \quad \lambda_{(n+1)+(k+1)}|$$

(3)

$$\frac{}{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})}\left\{\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k - \lambda_{(n+1)+k} \quad - |\lambda_1 - \lambda_{n+2}| \leq 1,\right.$$

equivalente a

$$\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k - \lambda_{(n+1)+k} \leq 1 + |\lambda_1 - \lambda_{n+2}| - (\lambda_1 + \lambda_{n+2}) \leq 1.$$

Por hipótesis de inducción

$$\sum_{k=1}^{n} |\ell_k - \ell_{n+k} = 1, \quad \text{si y sólo si} \quad \ell_k = 0 \quad \text{ó} \quad \ell_{n+k} = 0,$$

si y sólo si

$$\lambda_{k+1} = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_{n+k+2} = \lambda_{(n+1)+(k+1)} = 0, \quad k = 1, \ \ldots, n,$$

si y sólo si

$$\lambda_k = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_{(n+1)+k} = 0, \qquad k = 2, \ldots, n+1,$$

obteniéndose de (3)

$$\sum_{k=1}^{n+1} |\lambda_k - \lambda_{(n+1)+k}| = \{1-(\lambda_1+\lambda_{n+2})\} \sum_{k=1}^{n} |\ell_k - \ell_{n+k}| + |\lambda_1 - \lambda_{n+2}|$$

$$= 1 - (\lambda_1 + \lambda_{n+2}) + |\lambda_1 - \lambda_{n+2}| = 1,$$

si y sólo si

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{ó} \quad \lambda_{n+2} = \lambda_{(n+1)+1} = 0.$$

Así completamos la demostración ▲

Denotaremos por $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots$, $e_n = (0,\ldots,0,1)$ los vectores coordenados unitarios de $\mathbb{R}^n$, y por conv$W$ la envolvente convexa de $W \subseteq \mathbb{R}^n$. Si en el Lema 1 hacemos $A_k = e_k$, $k = 1,\ldots,n$ entonces

$$\phi(X) = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \ ,$$

norma que induce la métrica del taxista para $n = 2$.

TEOREMA 1. Sean, ϕ la norma sobre $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) definida en (1), $\Delta = \det(A_1,\ldots,A_n)$, $\alpha_i = (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in})$, α_{ij} el cofactor de a_{ij} en Δ, $r > 0$, $S_r[G]$ la esfera cerrada respecto a ϕ de centro G y radio r,

(4) $$V_k = G + \frac{r}{\Delta}\alpha_k, \qquad V_{k+n} = G - \frac{r}{\Delta}\alpha_k, \quad k = 1,\ldots,n,$$

y $W = \{V_1,\ldots,V_{2n}\}$. Entonces $S_r[G] = $ Conv$W$ es un 2^n-topo centralmente simétrico en G, de dimensión n y que tiene a cada punto en W como punto expuesto. Más exactamente,

(5) $$\mathcal{F}_k = \Big| \qquad \{i_1,\ldots,i_{k+1} \subseteq \{1,\ldots,n\},\ |\{i_1,\ldots,i_{k+1}\}| = k+1,\ (\delta_1,\ldots,\delta_{k+1}) \in \{0,1\}^{k+1} \Big\},$$

es la familia de todas las caras (simplex) k-dimensionales de $S_n[G]$, y

$$|\mathcal{F}_k| = 2^{k+1}\binom{n}{k+1}, \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

Demostración. Por su extensión dividiremos esta demostración en 4 etapas.

ETAPA 1. $\mathcal{C} = \mathrm{Conv}\,\mathcal{V}$ es centralmente simétrico en G y $\mathcal{V}$ es el conjunto de todos sus puntos expuestos.

Cada $X \in \mathcal{C}$ es una combinación convexa de la forma

$$(6) \qquad \begin{cases} X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j V_j = G + \frac{n}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{n+j}) \alpha_j , \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_{2n} = 1 \ \text{ y cada } \lambda_j \geq 0. \end{cases}$$

Se desprende de aquí que

$$2G - X = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{n+j} V_j + \lambda_j V_{n+j}) \in \mathcal{C},$$

y que $\mathcal{C}$ es centralmente simétrico en

$$G = \frac{1}{2}(V_k + V_{n+k}), \qquad k = 1,\dots,n.$$

Además, si X satisface

$$(7) \qquad (X - G)A_k = n,$$

entonces $\lambda_k - \lambda_{n+k} = 1$, y por el Lema 2,

$$\sum_{j \neq k} |\lambda_j - \lambda_{n+j}| \leq 0 \quad \text{si y sólo si,} \quad \lambda_j = \lambda_{n+j} = 0, \quad j \neq k,$$

y X se reduce a

$$X = G + \frac{n}{\Delta}(\lambda_k - \lambda_{n+k})\alpha_k = V_k .$$

Análogamente, si X satisface en (6) la igualdad

$$(8) \qquad (X-G)A_k = -n,$$

entonces $\lambda_{n+k} - \lambda_k = 1$ y $X = V_{n+k}$. La expresión $(X-G)A_k$ $n(\lambda_k - \lambda_{n+k})$ implica

$$(9) \qquad -n \leq (X-G)A_k \quad \text{y} \quad (X-G)A_k \leq n$$

para todo $X \in \mathcal{C}$. De este modo en (9) se definen dos semi-espacios soporte de $\mathcal{C}$ cuyas fronteras en (8) y (7) sólo contienen de $\mathcal{C}$ a V_{n+k} y V_k, respectivamente, $k = 1,\dots,n$. Esto significa que $\mathcal{V}$ es el conjunto de todos los puntos expuestos de $\mathcal{C}$.

ETAPA 2. $\mathcal{C}_{(\delta_1,\dots,\delta_n)} = \mathrm{Conv}\{V_{1+n\delta_1},\dots,V_{n+n\delta_n}\}$, $(\delta_1,\dots,\delta_n) \in \{0,1\}^n$, son caras expuestas (simples) $(n-1)$-dimensionales de $\mathcal{C}$.

De

$$(10) \qquad V_{i+n\delta_i} = G + (-1)^{\delta_i} \frac{n}{\Delta} \alpha_i, \quad \delta_i \in \{0,1\}, \quad i = 1,\dots,n,$$

obtenemos que

$$(V_{i+n\delta_i} - G) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k = (-1)^{\delta_i} \frac{n}{\Delta} \alpha_i \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k$$

$$= (-1)^{\delta_i} \frac{n}{\Delta} \alpha_i (-1)^{\delta_i} A_i = n, \qquad i = 1,\dots,n,$$

y que

$$(11) \qquad \mathcal{C}_{(\delta_1,\dots,\delta_n)} = \mathrm{Conv}\{V_{1+n\delta_1},\dots,V_{n+n\delta_n}\}, \quad (\delta_1,\dots,\delta_n) \in \{0,1\}^n$$

está contenido en el hiperplano

$$(12) \qquad (X-G) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k = n.$$

Además, si

$$0 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k (V_{k+n\delta_k} - V_{1+n\delta_1}) = \frac{n}{\Delta} \sum_{k=2}^{n} \lambda_k \{(-1)^{\delta_k}\alpha_k - (-1)^{\delta_1}\alpha_1\},$$

al multiplicar ambos miembros por A_i,

$$\sum_{=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k = \frac{n}{\Delta} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{n+j}) \alpha_j \right\} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k$$

$$\sum_{=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} (\lambda_j - \lambda_{n+j}) \alpha_j A_k = \frac{n}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} (\lambda_k - \lambda_{n+k}) \alpha_k \cdot A_k$$

$$\sum_{=1}^{n} (-1)^{\delta_k} (\lambda_k - \lambda_{n+k}) \ ;$$

Lema 2,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} (\lambda_k - \lambda_{n+k}) \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{n+k}| \leq 1,$$

$\mathcal{C}$ está contenido en el semi-espacio cerrado

$$(X-G) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k \leq n \ .$$

$\in \mathcal{C}$ satisface (12), si y sólo si,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} (\lambda_k - \lambda_{n+k}) = 1,$$

mplica (Lema 2),

$_k - \lambda_{n+k}| = 1$, si y sólo si, $\lambda_k = 0$ ó $\lambda_{n+k} = 0$,

si, $\lambda_{k+n(1-\sigma_k)} = 0$, para algún $\sigma_k \in \{0,1\}$, $k = 1,\ldots,n$;
ues, la forma

$$\sum_{k=1}^{2n} \lambda_k V_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k V_k + \lambda_{n+k} V_{n+k})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \{\lambda_{k+n\sigma_k} V_{k+n\sigma_k} + \lambda_{k+n(1-\sigma_k)} V_{k+n(1-\sigma_k)}\} = \sum_{k=}^{n}$$

y $\{V_{1+n\sigma_1},\ldots,V_{n+n\sigma_n}\}$ no está contenido en el semiespacio (13); de lo contrario X no satisfa
ces

$$I = \{i \mid 1 \leq i \leq n, \ V_{i+n\sigma_i} \text{ satisface (12)}$$

es un conjunto no-vacío y $P = \{i + n\sigma_i \mid i \in I\}$ $n+n\delta_n\}$. De lo contrario, para algún $i \in I$, $i+n\sigma_i \in \{1+n(1-\delta_1),\ldots,n+n(1-\delta_n)\}$ y $V_{i+n\sigma_i}$ no el hiperplano (12) ya que

$$(V_{k+n(1-\delta_k)} - G) \sum_{k=1}^{n} (-1)^{\delta_k} A_k = (2G - V_{k+n\delta_k} - G) \sum_{k=1}^{n} (-$$

Si

$$P = \{p_i + n\delta_{p_i} \mid 1 \leq p_i \leq n, \ i \in I\}$$

$$Q = \{i + n\sigma_i \mid i \in \{1,\ldots,n\} \sim I\}$$

$$= \{q_i + n(1-\delta_{q_i}) \mid 1 \leq q_i \leq n, \ i \in \{1,\ldots,$$

entonces

$$\{1+n\delta_1,\ldots,n+n\delta_n\} = P \cup \{q_i + n\delta_{q_i} \mid q_i + n($$

donde la unión es disjunta, y X toma la nueva

$$X = \sum_{k\in P} \lambda_k V_k + \sum_{k\in Q} \lambda_k V_k$$

(14)

$$= \sum_{k\in I} \lambda_{p_k+n\delta_{p_k}} V_{p_k+n\delta_{p_k}} + \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta}$$

$$= 2\Big(\sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})}\Big) G + \sum_{k\in I} \lambda_{p_k+n\delta_{p_k}}$$

$$- \sum_{k\in\{1,\ldots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})} V_{q_k+n\delta_{q_k}}$$

$$\sum_{i=1}^{n} t_{k+n\delta_k} V_{k+n\delta_k} = \sum_{k\in P} t_k V_k + \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} t_{q_k+n\delta_{q_k}} V_{q_k+n\delta_{q_k}}$$

$$\sum_{i\in I} t_{p_k+n\delta_{p_k}} V_{p_k+n\delta_{p_k}} + \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} t_{q_k+n\delta_{q_k}} V_{q_k+n\delta_{q_k}}.$$

Comparando resulta

$$2aG = \sum_{k\in I} (t_{p_k+n\delta_{p_k}} - \lambda_{p_k+n\delta_{p_k}}) V_{p_k+n\delta_{p_k}}$$

$$+ \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} (t_{q_k+n\delta_{q_k}} + \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})}) V_{q_k+n\delta_{q_k}}$$

$$a = \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})}.$$

0 entonces

$$\left\{\sum_{k\in I} (t_{p_k+n\delta_{p_k}} - \lambda_{p_k+n\delta_{p_k}}) + \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} [t_{q_k+n\delta_{q_k}} + \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})}]\right\}$$

$$\left\{\sum_{k\in I} t_{p_k+n\delta_{p_k}} + \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} t_{q_k+n\delta_{q_k}} - \sum_{k\in I} \lambda_{p_k+n\delta_{p_k}} + \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})}\right\}$$

$$1\left\{1 + 2\sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})} - \sum_{k\in I}\lambda_{p_k+n\delta_{p_k}} - \sum_{k\in\{1,\dots,n\}\sim I} \lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})}\right\}$$

$$= \frac{1}{2} a^{-1}(1 + 2a - 1) = 1,$$

significa que G está en el hiperplano (satisface) (12),
1 es falso. De manera que

$a=0$, si y sólo si, $\lambda_{q_k+n(1-\delta_{q_k})} = 0$, para todo $k \in \{1,..,n\}\sim I$

y (14) se reduce definitivamente a

$$X = \sum_{k\in I} \lambda_{p_k+n\delta_{p_k}} V_{p_k+n\delta_{p_k}} \in \mathscr{E}_{(\delta_1,\dots,\delta_n)}$$

Concluimos que $\mathscr{E}_{(\delta_1\dots\delta_n)}$ en (11) es una cara e dimensional de $\mathscr{E}$, por ser la intersección de $\mathscr{E}$ y no soporte no trivial (12).

ETAPA 3. $\dim(S_r[G]) = n$, $Fr(S_r[G]) = \bigcup_{(\delta_1,\dots,\delta_n)\in\{0}$
$S_r[G] = \mathscr{E}$.

Aplicando (6) para $X \in \mathscr{E}$, se verifica $(X-G)A_k =$ $k = 1,\dots,n$, y

$$\sum_{k=1}^{n} |(X-G)A_k| = r\sum_{k=1}^{n} |\lambda_k - \lambda_{n+k}| \leq r \quad \text{(lema}$$

por consiguiente $\mathscr{E} \subseteq S_r[G]$. Si d es la métrica inducida la norma ϕ entonces $d(\cdot,G)$ es una función real convexa pia cerrada sobre R^n, y

$$\dim(S_r[G]) = \dim(R^n) = n,$$

$$Fr(S_r[G]) = \{X \in R^n \mid d(X,G) = r\},$$

([2], pp.58-59, Theorem 7.6, Corollary 7.6.1). Así, (10 comabinación convexa

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i V_{i+n\delta_i} = G + \frac{r}{\Delta}\sum_{i=1}^{n} (-1)^{\delta_i} \lambda_i \alpha_i$$

implican $\quad (X-G)A_k = (-1)^{\delta_k}\lambda_k r, \qquad k = 1,\dots,n,$

$$d(X,G) = \phi(X-G) = \sum_{k=1}^{n} |(-1)^{\delta_k}\lambda_k r| = r,$$

y

$_n) \in \{0,1\}^n.$

ción de valor ab-

$., n,$

$= 1,$

ıe hemos venido

ːs arrojan

$$\sum_{=1}^{n} a_{kj}\alpha_k = \Delta e_j, \quad j = 1,\ldots,n, \quad y$$

$$\sum_{=1}^{n} \lambda_k V_{k+n\delta_k} = G + \frac{n}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\delta_k}\lambda_k\alpha_k$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{\delta_k}|(X-G)A_k|\alpha_k$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\{(X-G)A_k\}\alpha_k$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n}(x_j-g_j)a_{kj}\}\alpha_k$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\sum_{k=1}^{n}(x_j-g_j)\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\alpha_k$$

$$+ \frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\Delta(x_j-g_j)e_j = X,$$

$$F_r(S_n[G]) \subseteq \bigcup_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)\in\{0,1\}^n} \mathscr{C}_{(\delta_1,\ldots,\delta_n)} .$$

$Fr(S_n[G])$ tales que $X \in \overline{EF}$

y la convexidad de $\mathscr{C}$, $\overline{EF} \subseteq$

una contradicción. Así que

$$S_n[G] = C$$

ETAPA 4. Se demuestran las

Si

$$T = \{V_{i_1+n\delta_1},\ldots,V_{i_{k+1}+n\delta_{k}}$$

$|\{i_1,\ldots,i_{k+1}\}| = k+1$, $(\delta_1$

Conv$T$ es una cara (simplex

por lo tanto una cara de

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & , \text{ si } j \in \{1, \\ \delta_p & , \text{ si } j = i_p, \end{cases}$$

Se sigue que los elementos de la familia $\mathcal{F}_k$

son caras (simplex) k-dimensionales de $S_n[G$

Recíprocamente, si C es una cara no vacía y

$S_n[G]$ entonces existe $J = \{j_1,\ldots,j_{k+1}\} \subseteq \{$

$|J| = k+1$ tal que $C = \mathrm{Conv}\{V_{j_1},\ldots,V_{j_{k+1}}\}$ (

18.3). Si $1 \leq j_m \leq n$ y $n+j_m \in J$, entonces

$$G = \frac{1}{2}V_{j_m} + \frac{1}{2}V_{n+j_m} \in C \subseteq Fr(S_n[G]$$

lo cual no es posible puesto que $G \in \mathrm{int}(S_n$

guient

$$(16) \qquad j_m + n(-1)^{\delta_{j_m}} \notin \qquad m = 1, \quad , k+1,$$

donde

$$\delta_{j_m} \quad 0 \qquad 1 \leq j_m \leq n, \qquad \text{si} \quad n+1 \leq j_m \leq 2$$

Por el algoritmo de la división existen $i_m \in \{1,\ldots,n\}$, $\delta_m \in \{0,1\}$ tales que $j_m = i_m + n\delta_m$. Si $i_m = i_p$ y $m \neq p$, entonces

$$j_m = i_p + n\delta_m \neq j_p = i_p + n\delta_p \quad \text{y} \quad \delta_m \neq \delta_p$$

Si $(\delta_m, \delta_p) = (0,1)$ entonces $j_p = i_p + n = j_m + n \in J$, lo cual contradice (16). El caso $(\delta_m, \delta_p) = (1,0)$ también lleva contradicción. En consecuencia $|\{i_1,\ldots,i_{k+1}\}| = k+1$. Es así que $C \in \mathcal{F}_k$.

Concluimos que $\mathcal{F}_k$ es efectivamente la familia de todas las caras (simplex) k-dimensionales de $S_k[G]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Es inmediato de (5) que

$$|\mathcal{F}_k| = 2^{k+1}\binom{n}{k+1}, \qquad k = 1,2,\ldots,n-1 \quad \blacktriangle$$

OBSERVACION 2. Los puntos dados en (4) pueden expresarse en términos del producto vectorial en R^n ([3],pp.77-79) como sigue. Si

$$W_1 = A_2 \times \qquad {}_n,$$

$$W_2 = A_3 \qquad \times A_n \times A_1,$$

$$\vdots$$

$$W_{n-} = A_n \times A_1 \qquad \times A_{n-2}$$

$$W_n = A_1 \times \qquad \times A_{n-1}$$

entonces

$$\alpha_k \qquad 1)^{[(1+(-1)^n)/2]k}\, W_k \qquad k = \qquad , n$$

DEFINICION 1. Sea $W = \{V_1,\ldots,V_{2n}$ un conjunto de $2n$ puntos diferentes en R^n tales que

$$(17) \qquad \begin{cases} G = \frac{1}{2}(V_k + V_{n+k}), & k = \\ \det(V_1 - G, \quad , V_n - G) \neq 0 \end{cases}$$

Bajo estas condiciones denotamos por $\mathcal{B}_n$ a la familia de los politopos Conv$W$, a los cuales llamaremos politopos b_n.

De acuerdo al Teorema 1 los puntos de W listados en (4) satisfacen

$$\det(V_1 - G, \quad , V_n - G) = \left(\frac{\lambda}{\Delta}\right)^n \det(\alpha_1, \quad , \alpha_n) = \frac{\lambda^n}{\Delta} \neq 0$$

y por consiguiente $S_\lambda[G] \in \mathcal{B}_n$. En particular el politopo cruzado β_n ([1],pp.121-122, 292-195) pertenece a la familia $\mathcal{B}_n$, y $\mathcal{B}_3$ es la familia de los octaedros sólidos centralmente simétricos (Ver figura 1).

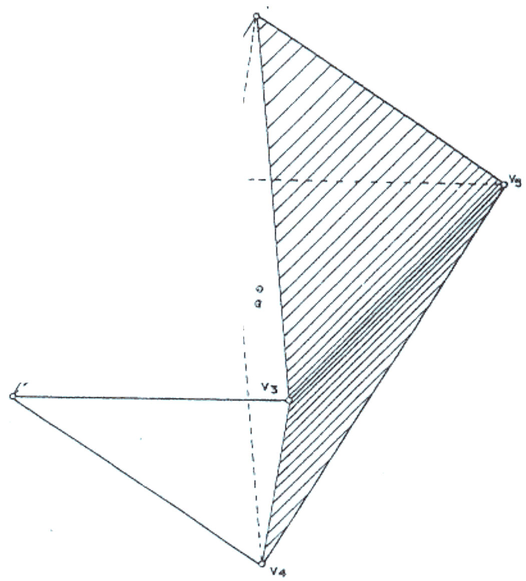
Recíprocamente, demostraremos en el Corolario 1 que todo b_n es una esfera cerrada unitaria de centro G respecto a una norma ϕ de la forma (1) definida en el Lema 1.

COROLARIO 1. Si Conv$W$ pertenece a $\mathcal{B}_n$ y ϕ es la norma sobre R^n definida en (1), con

$$(18) \qquad A_k = \nabla^{-1}\gamma_k, \qquad k =$$

donde $\gamma_k = (\gamma_{k1},\ldots,\gamma_{kn})$ y γ_{ki} es el cofactor del (k,i)-elemento en $\nabla = \det(V_1 - G,\ldots,V_n - G)$, entonces Conv$W = S_1[G]$ (la esfera cerrada unitaria de centro G respecto a la norma ϕ) es un 2^n-topo n-dimensional centralmente simétrico en G, W el conjunto de todos sus puntos expuestos y $\mathcal{F}_k$ en (5) la familia de todas sus caras k-dimensionales, $k = 0,1,\ldots,n-1$.

Demostración. Sean A_k como en (18), $\Delta = \det(A_1 \quad , A$ y α_k



la clase de los octaedros sólidos centralmente simétricos.

Figura 1

Teorema 1. Por la definición 1, $\nabla \neq 0$, y así $A_1, \ldots$ n son vectores linealmente independientes en R^n, pues ∇^{-1}. Hacia el final de la etapa 3 de la demostración del rema 1 establecimos la relación (aquí para $X = V_k$),

$$V_k = G + \Delta^{-1} \sum_{i=1}^{n} \{(V_k - G)A_i\}\alpha_i ,$$

en

$$V_k = G + \Delta^{-1} \sum_{i=1}^{n} \nabla^{-1}\{(V_k - G)\gamma_i\}\ \alpha_i = G + \Delta^{-1}\alpha_k ,$$

r (17),

$$V_{n+k} = G - \Delta^{-1}\alpha_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

$n = 1$ concluimos del Teorema 1 que Conv$W = S_1[G]$ respec- la norma ϕ. ▲

A continuación se demuestra que n vectores forman una togonal de R^n $(n \geq 3)$, si y sólo si, cada uno es un del producto vectorial de los restantes n-1 vectores.

LEMA 3. Los vectores $N_1, \ldots, N_n$ son una base ortogonal $n \geq 3$, si y solo si,

$$\begin{aligned} N_1 &= (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]\cdot 1}\ \nabla^{-1}\|N_1\|^2 N_2 \times \cdots\cdots \times N_n = \nabla^{-1}\|N \\ N_2 &= (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]\cdot 2}\ \nabla^{-1}\|N_2\|^2 N_3 \times \cdots\cdots \times N_n \times N_1 = \nabla^{-1}\|N_2\| \\ &\ \vdots \\ N_{n-1} &= (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]\cdot(n-1)}\ \nabla^{-1}\|N_{n-1}\|^2 N_n \times N_1 \times \cdots \times N_{n-2} = \nabla^{-1}\|N_n \\ N_n &= (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]\cdot n}\ \nabla^{-1}\|N_n\|^2 N_1 \times \cdots\cdots \times N_{n-1} = \nabla^{-1}\|N_n\| \end{aligned} \tag{19}$$

donde $\nabla = \det(N_1, \ldots, N_n) \neq 0$, $\gamma_k = (\gamma_{k1}, \ldots, \gamma_{kn})$ y γ_{ki} e cofactor del (k,i)-elemento del determinante ∇.

Demostración. Haciendo $A_k = N_k$ en la observación 2,

$$W_k = (-1)^{(1+(-1)^n)/2}\ \gamma_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{20}$$

Para cada k existen escalares $\lambda_{k1}, \ldots, \lambda_{kn}$, tales que

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ki} N_i , \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Al multiplicar ambos miembros por N_i,

$$0 = W_k N_i = \lambda_{ki} N_i N_i = \lambda_{ki}\|N_i\|^2 ,$$

lo que implica $\lambda_{ki} = 0$ para cada $i \neq k$; y por (20),

$$N_k W_k = (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]\cdot k}\ \nabla = \lambda_{kk}\|N_k\|^2 ,$$

de donde

$$\lambda_{kk} = (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]\cdot k}\ \nabla\|N_k\|^{-2} , \quad k = 1, \ldots, n,$$

y W_k se reduce a

$$W_k = (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]k} \nabla \|N_k\|^{-2} N_k,$$

esto es

$$N_k = (-1)^{[(1+(-1)^n)/2]k} \nabla^{-1} \|N_k\|^2 W_k = \nabla^{-1} \|N_k\|^2 Y_k, \qquad k=1$$

El recíproco del Lema 3 es inmediato de las propiedades del producto vectorial en $\mathbb{R}^n$. ▲

COROLARIO 2. Si Conv$W$ pertenece a $\mathcal{B}_n$ y $V_1-G,\dots,V_n-G$ son vectores ortogonales, entonces Conv$W$ tiene como inecuacion

$$(21) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{|(V_k-G)(X-G)|}{\|V_k-G\|^2} \leq 1$$

En particular, si Conv$W$ es un politopo cruzado β_n de circunradio R, entonces su inecuacion es

$$(22) \qquad \sum_{k=1}^{n} (V_k-G)(X-G) \leq R^2$$

La igualdad en ambas expresiones da la ecuacion de la frontera en cada caso. Por tanto β_n es el lugar geométrico de los puntos $X \in \mathbb{R}^n$ tales que la suma de sus distancias a n hiperplanos ortogonales $(Y-G)(V_k-G) = 0$, $k = 1,\dots,n$, que se intersecan en G, es menor o igual a R.

Demostración. Usando la expresión 19) del Lema 3 con $N_k = V_k-G$ obtenemos

$$Y_k = \nabla \|V_k-G\|^{-2} (V_k-G), \qquad k=1 \quad ,n$$

expresión que de acuerdo al Corolario 1 y a (18) reducen $\phi(X-G) \leq 1$ a (21). En particular, si Conv$W$ es un β_n de circunradio R entonces $R = \|V_k-G\|$, $k = 1,\dots,n$, y (21) se reduce a (22). Se estableció en la demostración del Teorema 1 (Etapa 3) que

$$Fr(\text{Conv}W) = \{X \in \mathbb{R}^n \quad \phi(X-G) = 1\}$$

Notando que

$$\frac{|(X-G)(V_k-G)|}{\|V_k-G\|} = R^{-1}|(X-G)(V_k-G)$$

es la distancia entre un punto X y el hiperplano $(Y-G)(V_k-G) =$ entonces según (22) β_n es el lugar geométrico descrito en este Corolario 2. ▲

En consecuencia tenemos la siguiente definición y caracterización puntual de β_n.

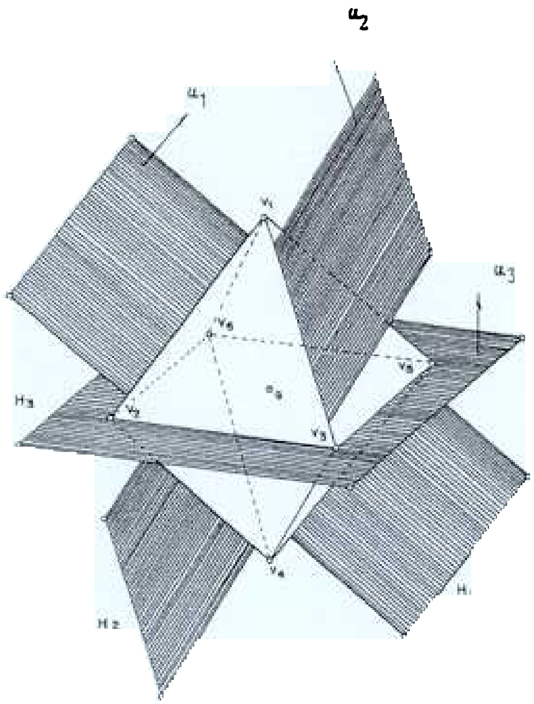
DEFINICION 2. Dados en $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ n hiperplanos ortogonales $H_1,\dots,H_n$ que se intersecan en un punto G y de vectores normales unitarios $u_1,\dots,u_n$, respectivamente, si $R > 0$ entonces el lugar geométrico

$$\{X \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{k=1}^{n} \text{Distancia entre } X \text{ y } H_k \leq R\},$$

es llamado un politopo cruzado β_n de centro G, circunradio R y vértices

$$V_k = G + R\, u_k \,, \quad V_{n+k} = 2G - V_k, \quad k=1, \quad ,n$$

(ver Figura 2)



Un polítopo cruzado β_3 de centro $G = H_1 \cap H_2 \cap H_3$ y circunradio R.

Figura 2

BIBLIOGRAFIA

[1] Coxeter, H.S.M., *Regular Polytopes*, Dover Publications, Inc., New York, Third edition, 1973.

[2] Rockafellar R., Tyrrell, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, Second Printing, 1972.

[3] Spivak, Michael, *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1975.