Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 8 No. 1, enero-junio 1990

EL METODO SISMICO UN EJEMPLO DE MATEMATICA APLICADA EN EXPLORACION PETROLERA

CARLOS PIEDRAHITA **
Matemático
Universidad Nacional

JUAN CARLOS RAMON**
Geólogo
Universidad Industrial de Santander

RESUMEN

La sísmica se basa en la propagación de las ondas elásticas en la tierra y su reflexión y refracción debidas a cambios en la distribución de la densidad y la velocidad. En un modo simplista el método se puede representar así:

Todo comienza con la generación de un pulso acústico al interior de la tierra, el cual penetra profundizando dentro de las rocas encontrando interfases en las que hay cambios en las propiedades (densidad y velocidad) o en la resistencia de la roca a ser comprimida. En tales interfases se genera una "replica" de la onda descendente que rebota hacia la superficie. El pulso que logra pasar, continúa descenciendo, debilitándose gradualmente y enviando "ecos" hacia la superficie cada vez que haya cambios en el medio. A mayor dicho cambio, más fuerte será la onda reflejada relativamente.

Encargados de "oir" los ecos provenientes del subsuelo están los detectores (geófonos en tierra e hidrófonos en el agua), los cuales se distribuyen a lo largo de la superficie y cuya duración de registro es usualmente de unos 5 a 6 segundos. En el método de reflexión se miden los tiempos de llegada de eventos atribuibles a reflexión de las ondas interfases donde ocurren cambios en impedancia acústica, los cuales se espera están relacionados a la geología del subsuelo. A continuación, los datos registrados se procesan. Cada milla registrada puede llegar a contener 50 millones de bitios (bits) de información. De aquí, que se hagan necesarias las computadoras de alta velocidad y el desarrollo de algoritmos

** Instituto Colombiano del Petróleo

asociados. Como se verá en este artículo, las técnicas de procesamiento que se aplican a la señal sísmica se basan en principios matemáticos de diversos niveles. Estos van desde la aplicación de transformadas de Fourier para convertir los datos del dominio del tiempo al de la frecuencia, hasta el uso de distribuciones con las cuales se extienden las operaciones algebraicas de funciones.

INTRODUCCION

Para entender cabalmente el método sísmico es necesario tener claro qué representa en realidad una línea sísmica.

Idealmente, se desearía que una línea sísmica sea un perfil registrado por pares coincidentes fuente-receptor (tanto en la misma posición horizontal, i.e., a cero offset; como sobre un mismo plano horizontal) encargados de medir los tiempos verticales a los diferentes reflectores. El registro así obtenido es una sección en tiempo que representa virtualmente un corte geológico del subsuelo (fig. 1).

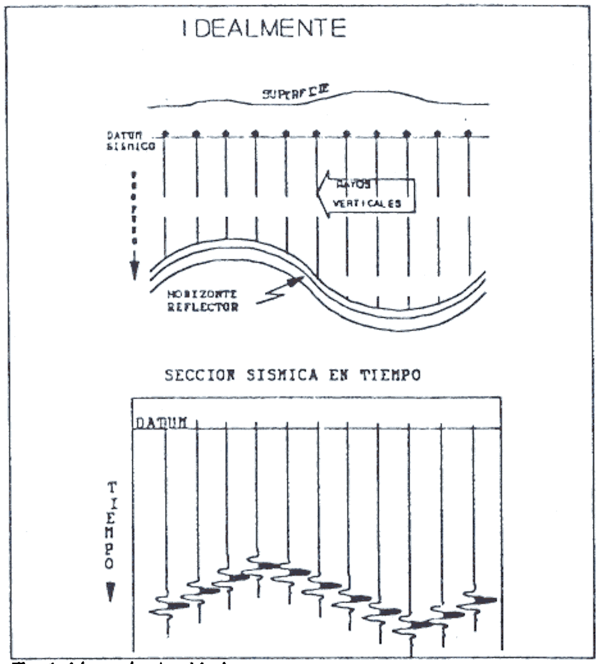


Fig. 1. Línea sísmica ideal.

Desafortunadamente, en la realidad, nos alejamos de este ideal de sección que representa la verdadera estructura de la tierra por diversos factores:

1. Los rayos o senderos de propagación usualmente No son verticales (excepto para reflectores horizontales) pues deben ser normales, i.e., perpendiculares al reflector siguiendo la teoría de propagación de ondas, dados pares coincidentes fuente-receptor (fig.2).

La ortogonalidad puede llevar a que se presenten diferentes senderos registrados por un mismo par fuente-receptor. Por tal, la sección se complica y se hace más difícil de interpretar. Esta confusión es eventualmente aclarada por la Migración, cuya función es colocar los reflectores en su verdadera posición.

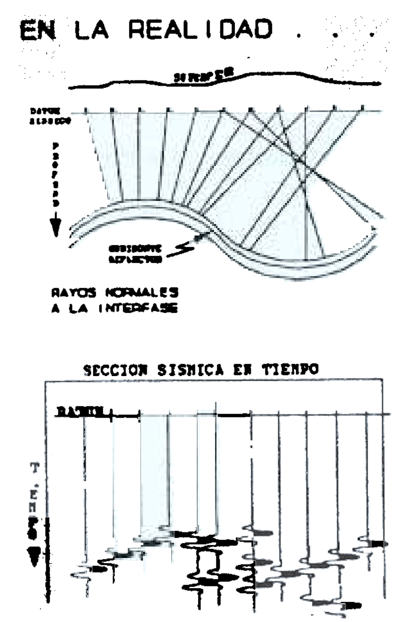


Fig. 2. Ortogonalidad de los rayos.

2. Los pares fuente-receptor no son coincidentes, sino por el contrario, existe una distancia entre ellos denominada Offset. Tal distancia fuente-receptor introduce un tiempo extra de viaje a la onda (fig. 3). Este factor es "corregido" durante el procesamiento por medio de técnicas que transforman las trazas a diferentes offsets en una traza compuesta que simula una de offset cero.

3.Ni la fuente ni los receptores están colocados sobre un plano de referencia horizontal. En realidad, la fuente se localiza en la superficie (vibroseis) o a cierta profundidad (dinamita). Los receptores por su parte, se localizan a lo largo de la superficie del terreno, lo cual causa diferencias en los tiempos de arribo (Fig. 3). Además, se presentan anomalías locales debidas a variación en el espesor de la capa de meteorización de baja velocidad justo bajo la superficie (Sengbush, 1986).

Tales variaciones son solventadas por las correciones estáticas, en las cuales se llevan tanto la fuente como los receptores a un plano de referencia horizontal o datum sísmico, comúnmente por debajo de la zona de baja velocidad (Yilmaz, 1987).

PROPAGACION DE LAS ONDAS SISMICAS

Cuando se acciona una fuente de energía sísmica ocurren dos clases de reacciones en el medio circundante (Sengbush, 1983) según el tipo de deformación (ver clasificación de medios continuos). La primera, una reacción inelástica o plástica en la cual la relación esfuerzo-deformación es no lineal, es decir, se causa una deformación permanente sobre la roca justo alrededor de la fuente. En el caso de dinamita, se produce una alta fracturación y hasta remoción de las rocas. La energía consumida en ésta reacción

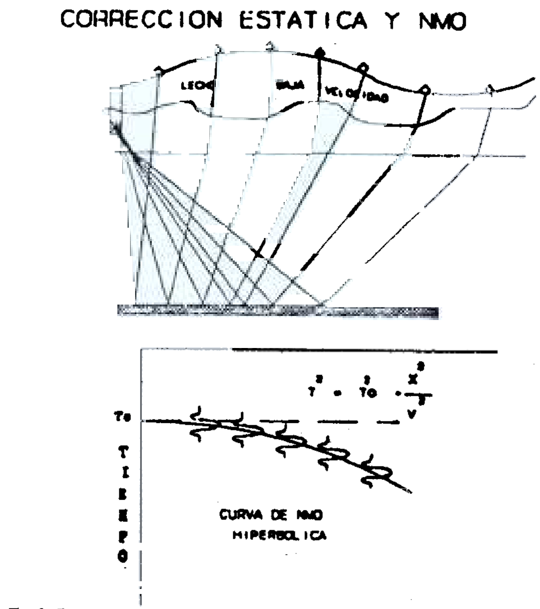


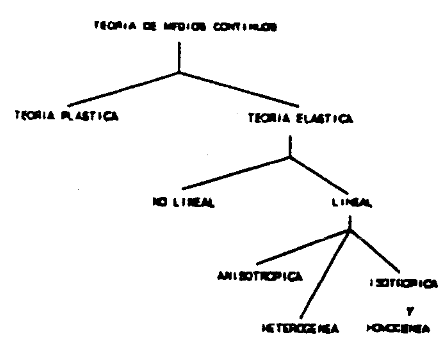
Fig. 3. Retraso en tiempo por componente horizontal de recorrido.

no contribuye al pulso sísmico y por tal, es perdida. La segunda reacción, la elástica, es aquella en la cual la relación esfuerzo-deformación es lineal, esto es, el cuerpo es deformado momentáneamente, pero tan pronto se remueve la influencia de la fuerza deformante el cuerpo recupera su forma original. Es la energía de esta reacción la que genera el pulso sísmico que viaja a través de la tierra (White, 1978).

Como se observa en la tabla de clasificación de la teoría de medios continuos, lo más simple es tomar un cuerpo isotrópico y homogéneo, esto es, que presenta una proporcionalidad entre los esfuerzos y las deformaciones. Además, implica una invarianza de las propiedades mecánicas e inerciales del material en todas las direcciones y posiciones.

A medida que una onda elástica pasa a través de una porción de roca, las particulas en ella son inicialmente comprimidas y luego restauradas a su posición original. Así, la propagación se lleva a cabo como un intercambio de energías cinética y potencial. La energía cinética está representada en el movimiento de las partículas y la potencial por el efecto restaurador de las fuerzas interpartículas.

En el instante que se aplica una fuerza de desplazamiento en superficie, comienza a propagarse en todas direcciones una onda elástica por continua y alternante compresión y expansión de las partículas del medio (fig. 4). Si consideramos un sólido en el espacio y un sistema de referencia X,Y,Z,



CLASIFICACION DE LA TEORIA DE MEDIOS CONTINUOS.

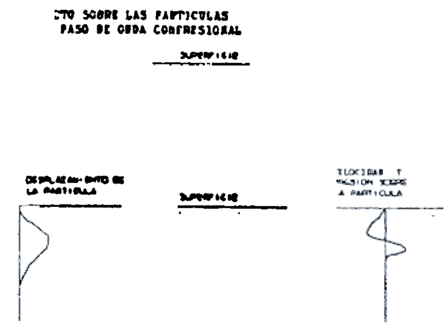


Fig. 4. Propagación de onda compresional (Anstey, 1977).

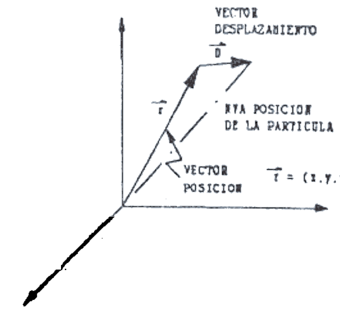


Fig. 5

podemos estudiar el movimiento ondulatorio, suponiendo que cada partícula en el sólido se desplaza una distancia dada por un vector de desplazamiento (fig. 5).

Dado que el medio a través del cual nos propagamos es isotrópico y homogéneo, la perturbación se rige por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, donde **x, y, z, t** son las variables independientes y donde **u, h, p** son las variables dependientes. Estas últimas miden el desplazamiento de la particula desde su posición de equilibrio para cada punto del espacio (x, y, z) y en cada instante t.

El sistema está dado por:

$$\mu\delta^2 u/\delta x + \lambda\,\delta/\delta x\,(\delta u/\delta x + \delta h/\delta y + \delta p/\delta z) + \mu[\delta^2 u/\delta x^2 + \delta^2 u/\delta y^2 + \delta^2 u/\delta z^2] = \rho\ \delta\ u/\delta t$$

$$\mu\ \delta^2 h/\delta y + \lambda\delta/\delta y\,[\delta u/\delta x + \delta h/\delta y + \delta p/\delta z] + \mu[\delta^2 h/\delta x^2 + \delta^2 h/\delta y^2 + \delta^2 h/\delta z^2] = \rho\ \delta\ h/\delta t$$

$$\mu\ \delta^2 p/\delta z + \lambda\delta/\delta z\,[\delta u/\delta x + \delta h/\delta y + \delta p/\delta z] + \mu[\delta^2 p/\delta x^2 + \delta^2 p/\delta y^2 + \delta^2 p/\delta z^2] = \rho\ \delta\ p/\delta t$$

donde λ y μ son las denominadas constantes de Lamé que representan la propiedades de resistencia del material a los cambios volumétrico o de forma. En nuestro modelo isotrópico y homogéneo, ellas no dependen de la dirección ni de su posición en el

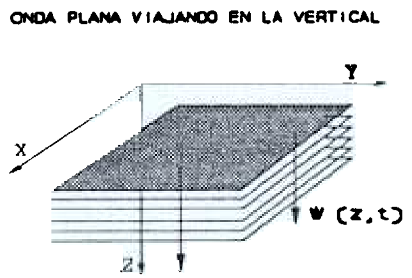


Fig. 6. Propagación de onda plana.

espacio. Por tal, solo habrá cambio en un salto discreto de medios. De igual manera, la densidad, otra propiedad del medio, solo varia de modo discreto.

De otra parte, el principio de Huygens implica que las ondas se propagan como frentes esféricos ya que cada punto perturbado en el espacio actúa como una fuente secundaria de ondas. Si se tienen en cuenta las profundidades de los objetivos geológicos, los frentes de onda serán suficientemente grandes como para asumirlos planos.

Consideremos una onda plana que viaja verticalmente a través de un sistema coordenado según la figura 6.

Así,

$$u(x,y,z,t) = u(z,t)$$
$$h(x,y,z,t) = h(z,t)$$
$$p(x,y,z,t) = p(z,t)$$

En este sistema se depende solo de la profundidad z y t. Por lo tanto, todas las derivadas parciales respecto a los ejes "Y" y "X" se hacen cero y el sistema se reduce a:

$$\delta^2 u/\delta t^2 = (\mu/\rho)\, \delta^2 u/\delta z^2$$
$$\delta^2 h/\delta t^2 = (\mu/\rho)\, \delta^2 h/\delta z^2$$
$$\delta^2 p/\delta t^2 = (\lambda+2\mu/\rho)\, \delta^2 p/\delta z^2$$

Cada una de estas ecuaciones puede ser representada de la forma general

$$\delta^2 F/\delta t^2 = V^2 \delta^2 F/\delta z^2 \quad ,$$

que representa una onda unidimensional. Esta ecuación parcial y lineal de segundo orden posee una solución general de la forma

$$c_1 F_1(t - z/V) + c_2 F_2(t + z/V) \quad \text{(Bleistein, 1984)}$$

donde c_1 y c_2 son constantes arbitrarias y F_1 y F_2 funciones arbitrarias, que representan ondas viajando en el sentido positivo y negativo del eje Z, respectivamente. Las dimensiones de V son Longitud/Tiempo, esto es, unidades de velocidad.

Por tal, la solución para el sistema anterior se puede escribir como:

$$u(z,t) = c_1 u_1(t-z/V) + c_2 u_2(t+z/V) \quad \text{donde } V = \sqrt{\mu/\rho}$$

$$h(z,t) = b_1 h_1(t-z/V) + b_2 h_2(t+z/V) \quad \text{donde } V = \sqrt{\mu/\rho}$$

$$p(z,t) = a_1 p_1(t-z/V) + a_2 p_2(t+z/V) \quad \text{donde } V = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$$

donde u y h son los desplazamientos transversos a la dirección de propagación de la onda, es decir, representan las ondas cortantes (shear) cuya velocidad de propagación es $\sqrt{\mu/\rho}$. Por el contrario, p es el desplazamiento en la dirección de propagacion, esto es la onda compresional cuya velocidad está dada por $\sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$. Son estas últimas las que se utilizan con mayor frecuencia en el método sísmico.

Así, todas estas ondas viajarían indefinidamente a través del medio isotrópico y homogéneo infinito. Sin embargo, si tal medio no es infinito, sino por el contrario tiene un límite en el cual está en contacto con otro medio de propiedades y constantes elásticas diferentes, en tal límite, se producirá una partición de la energía (Waters, 1987).

PARTICION DE LA ENERGIA EN UNA INTERFASE

Cuando una onda alcanza una interfase que separa medios de diferentes propiedades acústicas ocurre una partición de la energía de la ondícula incidente en ondas reflejadas y transmitidas siguiendo la ley de Snell.

En el caso generalizado de incidencia oblicua, la partición de energía será tal que la onda incidente se transforma en cuatro tipos de ondas: dos compresionales reflejada y transmitida y dos cortantes reflejada y transmitida.

Si se tiene en cuenta que la longitud del tendido de geófonos es pequeña en comparación con la profundidad de las interfases, el angulo es tan pequeño que se puede aproximar a incidencia normal. Con tal simplificación, reducimos nuestro modelo a ondas compresionales. La onda viajera cuya ecuación es de la forma

$$\partial^2 p/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu/\rho)\partial^2 p/\partial z^2$$

será solo dependiente de z y de t. Una posible solución a tal ecuación es la onda cosenoidal

$$p = A_0 \mathrm{Cos}\, 2\pi f(t - z/V)$$

donde $V = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho}$ y A_0 y f son constantes

Analicemos la onda cosenoidal. Primero, hagamos constante la variable z con el fin de definir el período temporal. Recordando que para una función de la forma Cos(ax), el período está dado por $P = 2\pi/a$, definimos el periodo para nuestra onda cosenoidal:

$$T = 2\pi/2\pi f = 1/f$$

donde T tiene unidades de tiempo y f es la frecuencia medida en ciclos/segundo ó hertz. Vale la pena definir la frecuencia angular, $w = 2\pi f$, y cuyas unidades son radianes/seg.

Análogamente, dejando el tiempo constante se define el periodo espacial.

$$\text{Per.espacial} = 2\pi/(2\pi f/V) = V/f = \lambda$$

donde λ es la longitud de onda medida en metros.

A partir de éste período espacial, definimos otra variable, el número de onda

$$k = 1/\lambda$$

cuyas unidades son inversas de longitud.

Hasta ahora, el tratamiento de nuestras ondas era en el espacio (z,t) o en su forma general (x,y,z,t). Además de este espacio en sísmica se utiliza con frecuencia el espacio (f,k) o en su forma general (f,k_x,k_y,k_z), cuyo dominio son la frecuencia y el número de onda recién definidos.

Ahora, tomemos una onda plana viajando verticalmente con una interfase que separa dos medios isotrópicos y homogéneos con velocidades y densidades diferentes según el esquema de la figura 7.

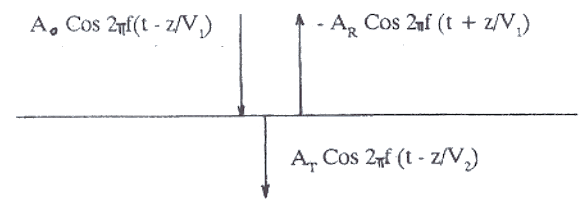


FIGURA 7.- Partición de energía en interfase.

Si se considera un elemento diferencial a lo largo de la interfase, deben llenarse ciertas condiciones con el fin de mantener los dos medios unidos, pues de otro modo los medios se separarían ya sea dejando un vacío entre ellos o penetrando el uno en el otro. Las condiciones a satisfacer son (Anstey, 1977; Espey, 1982):

En la interfase los esfuerzos y las deformaciones deben ser continuos. La continuidad de los desplazamientos se expresa con la ecuaciones de Zoeppritz (1919). Debido a que no es el objetivo de este artículo, su desarrollo se puede ver en Waters (1987) y Sengbush(1983) entre otros.

2. Conservación del desplazamiento en el instante t para z=0. Esto es, el desplazamiento de las ondas que se alejan de la interfase debe ser igual al desplazamiento de las ondas que arriban a ella.

$$A_o.\mathrm{Cos}\, 2\pi f.(t) = A_R.\mathrm{Cos}\, 2\pi f.(t) + A_T.\mathrm{Cos}\, 2\pi f.(t)$$

En otras palabras, la suma de las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida deben ser igual a la amplitud de la onda incidente:

$$A_o = A_R + A_T$$

dividiendo por Ao,

$$= A_R/A_o + A_T/A_o$$

donde las relaciones entre las amplitudes reflejada y transmitida respecto a la amplitud incidente definen los coeficientes de reflexión y de transmisión, respectivamente.

$$1 = R + T \qquad (1)$$

3. Conservación de la energía en el instante t a z=0, es decir, la energía incidente debe ser igual a la suma de las energías reflejada y transmitida. La energía que trataremos es la energía cinética máxima (pues desconocemos la energía potencial), que para una particula individual es $\frac{1}{2}mV^2_{max}$.

Para facilitar el análisis de conservación, reemplazaremos las energías por intensidades o energías por unidad de área y de tiempo. En un instante de tiempo Δt la onda perturba un diferencial de volumen Δvol. Por lo tanto, la intensidad o energía por unidad de área y de tiempo (I) será:

$$= (E_T/\Delta a)/\Delta t = E_T/\Delta a \Delta t$$

donde E_T es la energía total.

Multiplicando por la velocidad, V,

$$I = E_T V/\Delta a.V\Delta t$$

donde $\Delta a.V\Delta t$ es el volumen del cilindro perturbado, vol,

$$= E_T V/\Delta vol = E.V$$

E es la energía de la particula por unidad de volumen.
V es la velocidad de propagación de la onda.

Por conservación de las intensidades, la intensidad incidente es igual a la reflejada más la transmitida:

$$E_T.V_1 = E_R.V_1 + E_T V_2$$

Para nuestra onda cosenoidal, $p(z,t) = A.Cos\, 2\pi f(t-z/V)$, su primera derivada define la velocidad de movimiento de la partícula. Así,

$$\delta p/\delta t = 2\pi f A.Sen\, 2\pi f(t-z/V)$$

Como la energía total de una partícula está dada por la energía cinética máxima ($\frac{1}{2}mV^2_{max}$), se determina el valor máximo de $\delta w/\delta t$

$$\delta w/\delta t_{max} = 2\pi f A = V_{Pmax}$$

por tal, la energía cinética máxima es

$$E_{kmax} = \frac{1}{2}mV^2_{max} = 2\pi^2 m.f^2A^2$$

y finalmente, la energía por unidad de volumen, E, será

$$E = E_{kmax} / vol = 2\pi^2\rho f^2A^2$$

Aplicando conservación de energías,

$$2\pi^2\rho_1 f^2A_o^2 V_1 = 2\pi^2\rho_1 f^2A_R^2 V_1 + 2\pi^2\rho_2 f^2A_T^2 V_2$$

$$\rho_1 A_o^2 V_1 = \rho_1 A_R^2 V_1 + \rho_2 A_T^2 V_2$$

dividiendo por $A_o^2\, V_1 \rho_1$

$$1 = R^2 + (\rho_2 V_2/\rho_1 V_1) T^2 \qquad (2)$$

Si se resuelve algebraicamente el sistema de dos ecuaciones, dadas por las conservaciones de desplazamiento y de las energías, con dos incognitas R y T, obtenemos el coeficiente de reflexión

$$R = \frac{\rho_2 V_2 - \rho_1 V_1}{\rho_2 V_2 + \rho_1 V_1}$$

Denominamos al producto entre la densidad y la velocidad, la impedancia acústica del medio (Sheriff, 1984). Este constituye el coeficiente de reflexión para una interfase a través de la cual cambian las propiedades del medio, de un modo discreto.

Al inicio de éste texto, como en los primeros años del método sísmico, se asumía de manera simplista que las reflexiones provenían primordialmente de interfases donde ocurriesen cambios abruptos en la impedancia acústica. Fue hasta 1952, cuando se obtuvo por primera vez una medida de la función de velocidad del subsuelo, con la creación del registro continuo de velocidad (Summers and Broading, 1955) que los geofísicos se dieron cuenta que tal función es continua o al menos continua a tramos. Con ello se derrumbó el mito de las discontinuidades en el subsuelo.

Debido a ello, es necesario crear una generalización para los coeficientes de reflectividad discontinuos, lo cual se logra con la función reflectividad.

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t)}{\Delta t}$$

donde R está definido por las diferencias en impedancia acústica

$$R = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

por tal,

$$R\,(t+\Delta t) = \frac{Z(t+\Delta t) - Z(t)}{Z(t+\Delta t) + Z(t)}$$

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Z(t+\Delta t) - Z(t)}{Z(t+\Delta t) + Z(t)} * \frac{\;}{\Delta t}$$

reorganizando,

$$r(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{Z(t+\Delta t) + Z(t)} * \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Z(t+\Delta t) - Z(t)}{\Delta t}$$

Bajo la suposición de que la función impedancia es diferenciable al menos a tramos, se desarrollan los límites, (note que el segundo límite es por definición la derivada de Z)

$$r(t) = \frac{1}{2\,Z(t)} \frac{dZ}{dt}$$

integrando, se obtiene

$$\int r(t)\,dt = \int \frac{dZ}{2\,Z(t)} \qquad \text{entonces:}$$

$$\int r(t)\,dt = \tfrac{1}{2} \operatorname{Ln} Z$$

Finalmente, derivando de nuevo, se llega a la fórmula para evaluar la reflectividad de cualquier profundidad bajo la suposición que la impedancia acústica es diferenciable al menos a tramos:

$$r(t) = \tfrac{1}{2}\, d(\operatorname{Ln} Z) / dt$$

Esta función es el análogo continuo de los coeficientes de reflexión.

Además de este aspecto netamente ondulatorio, la sísmica involucra la teoría del modelo CONVOLUCIONAL, la cual explica el origen de la respuesta sísmica en términos de filtrado lineal.

LA OPERACION MATEMATICA CONVOLUCION [1]

El término convolución no es más que la expresión matemática que explica el concepto físico de filtrado lineal. Según Sengbush (1986) para ser lineal se tienen que cumplir las propiedades de superposición y de multiplicabilidad. Se puede considerar un filtro como un instrumento por el cual se modifica una entrada "e" en una salida "s".

A los filtros se los describe de diversas formas. Una de ellas es por su espectro característico, es decir, por la banda de frecuencia que él deja pasar y por sus características de amplitud y fase como función de la frecuencia. Por tal, aquellas frecuencias de la señal de entrada que estén dentro del rango del filtro, aparecerán en la señal de salida y aquellas por fuera serán reducidas sustancialmente.

Otro modo de descripción lo constituye su respuesta, en el dominio del tiempo, a un pulso rectangular muy corto y de gran amplitud, conocida como IMPULSE RESPONSE (en la siguiente discusión se utilizan los términos Impulse Response y respuesta a un Impulso indiscriminadamente). Dicho pulso se denomina IMPULSO cuando su ancho tiende a cero y su altura a infinito, y además contiene todas las frecuencias con una amplitud uno (1) y fase cero.

Denominemos "g" a la función, en el dominio del tiempo, de respuesta a un impulso (IMPULSE RESPONSE). De ésta manera, la información del filtro está dada por "g" y el filtro se puede pensar como una "caja negra" llamada "g" (se usa el término caja negra en el sentido que no es necesario conocer nada de ella). "g" incluye las características espectrales del filtro e inversamente, si se conocen estas últimas se puede calcular el Impulse response. La notación usada para denominar los elementos de estos sistemas lineales se hace en éste caso en letras minúsculas, pues así se denominan en el dominio del tiempo. Las letras mayusculas representan su equivalente en el dominio de la frecuencia.

Para calcular la salida del filtro, dadas la entrada y su Respuesta a un impulso, se utiliza la Convolución. Para ilustrar, tomemos una entrada "e" a ser filtrada a través de la caja o filtro "g". La salida, s, será una función de tiempo como las anteriores definida como la convolución entre "e" y "g"

$$s = e * g$$

donde * denota la operación matemática convolución.

1 Matemáticamente es un operador lineal, es decir cumple las propiedades de Superposición y de Multiplicidad (Sengbush, 1986).

PROPIEDADES DE LA CONVOLUCION [1]

1. CONMUTATIVIDAD

$$g(t) * h(t) = h(t) * g(t)$$

2. ASOCIATIVIDAD

$$\{ g(t) * h(t) \} * f(t) = g(t) * \{ h(t) * f(t) \}$$

3. DISTRIBUTIVIDAD DE LA SUMA

$$g(t) * [h(t) + f(t)] = g(t) * h(t) + g(t) * f(t)$$

En el caso de funciones totalmente integrables, $L^1(R)$, la operación convolución está definida como

$$g(t)*h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau).h(t-\tau)d\tau$$

para el caso particular de funciones causales, como en sísmica, se sigue que:
Si $g(t)$ y $h(t)$ son cero para todo $t < 0$, entonces

$$g(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau).h(t-\tau).\delta\tau$$

se reduce a

$$= \int_{0}^{t} g(\tau).h(t-\tau).\delta\tau$$

Debido a que los datos sísmicos para su manejo en computadoras son muestreados y no continuos, se expondrán brevemente las operaciones de convolución con funciones muestreadas.

CONVOLUCION DE FUNCIONES MUESTREADAS

Asumamos un función "e" la cual ha sido muestreada a intervalos Δt:

$$e = \{ e_0, e_1, e_2, e_3, e_4, $$

donde e_0 es la muestra a un tiempo 0, e_1 a un $t = \Delta t$, e_2 a un $t = 2\Delta t$ y así sucesivamente.

De igual manera la respuesta del filtro a un impulso está dada por la serie de muestras,

$$g = \{ g_0, g_1, g_2, g_3, ... \}$$

---

1 Bleistein, 1984.

La convolución entre las dos funciones se lleva a cabo siguiendo los pasos a continuación:

1. Invertir una de las funciones alrededor del origen en la escala de tiempo

$$g_m, ... g_3, g_2, g_1, g_0$$

2. Colocar los primeros términos coincidentes

$$\begin{matrix} & & & & e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & ... & e_n \\ g_m & ... & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & & & & \end{matrix}$$

3. Multiplicar los pares de términos correspondientes adicionandolos entre sí.
   Para la posición inicial,

$$s_0 = e_0 . g_0$$

4. Mover a la derecha un intervalo (la idea es aumentar la superposición) y multiplicar los pares correspondientes sumando los productos. El resultado de tal operación se asigna a la muestra correspondiente según el número de movimientos. Esto es, la posición inicial se asigna al término cero, el primer movimiento al término uno (1), etc.

Para la primera movida,

$$s_1 = e_0 . g_1 + e_1 . g_0$$

En la segunda,

$$s_2 = e_0 . g_2 + e_1 . g_1 + e_2 . g_0$$

Se continúa así hasta haber movido, cubriendo completamente, la función.
El último término de la salida está dado por

$$s_{n+m} = e_n . g_m$$

El número de términos de la función resultante será de "n + m - 1", siendo n y m el número de términos de las dos funciones operadas, respectivamente.

EL MODELO CONVOLUCIONAL EN SISMICA

Veíamos que el método sísmico se inicia con un pulso sísmico básico (entiendase onda compresional) generado por la fuente. Suponiendo que tal pulso solo interactúa con las interfases reflectoras, tenemos que en cada una de ellas se presentará una réplica del pulso de la fuente (b(t)), pero con diferencias esenciales, a saber (Schneider, 1980):

1. La amplitud no será la misma, sino por el contrario, su amplitud será proporcional al coeficiente de reflexión en dicha interfase.

2. El pulso estará desfasado respecto al original, esto es, retrasado en una cantidad de tiempo igual al tiempo de ida y regreso (Two-way Travel Time) a tal interfase.

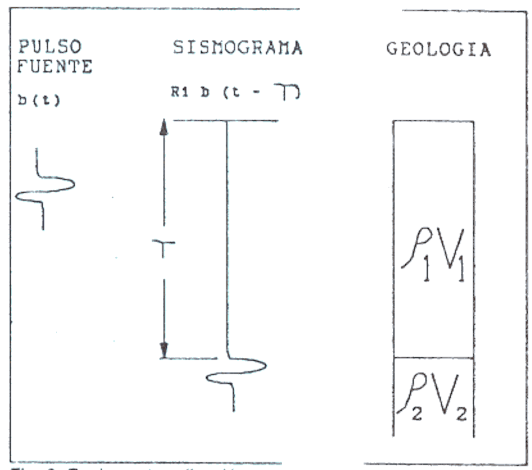


Fig. 8. Registro de reflección.

Extendiendo al caso general de varias interfases reflectoras a una serie de tiempos τ_1, $\tau_2\, \tau_3, \dots\, \tau_n$, tenemos que

$$s(t) = R_1 b(t-\tau_1) + R_2 b(t-\tau_2) + \dots + R_n b(t-\tau_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} R_i b(t-\tau_i)$$

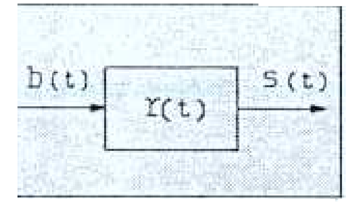
que corresponde a la respuesta sísmica discreta. Por tal, para el caso continuo, se introduce la función de reflectividad.

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N} [R_i(\tau)/\Delta\tau] b(t-\tau_i)\Delta\tau_i \;;$$

sacando el límite donde $\Delta\tau_i$ tiende a cero y N a infinito,

$$S(t) = \lim_{\Delta\tau \to 0} \sum_{i=1}^{N} [R_i(\tau)/\Delta\tau_i] b(t-\tau_i)\Delta\tau_i =$$

$$= \int_0^T r(\tau).b(t-\tau).d\tau$$



de donde por definición de convolución,

$$s(t) = r(t) * b(t).$$

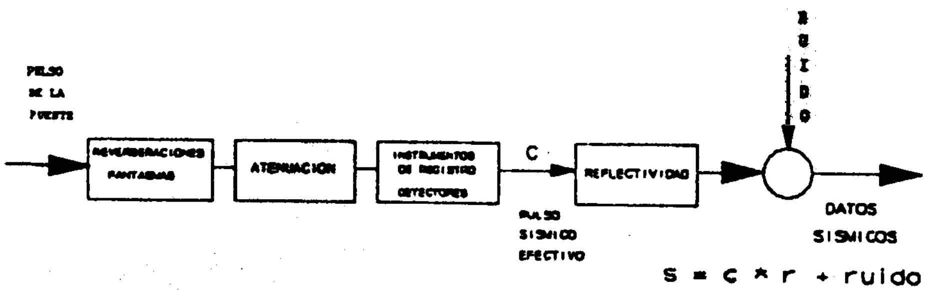
Esto evidencia que la respuesta sísmica de las interfases a un pulso sísmico está dado por la convolución entre ellos, es decir, el pulso es "filtrado" por la reflectividad.

A diferencia de éste modelo simple, en la realidad, el pulso generado por la fuente viaja a través de la tierra cambiando su forma de onda no solo con la reflectividad de la tierra, sino tambien debido a varios fenómenos tales como la atenuación, las reverberaciones, las reflexiones fantasmas, etc (Waters, 1987; Sengbush, 1983). Si tales "filtros" son asignados a sus respectivas cajas, se puede pensar en la tierra como una sucesión de filtros a los cuales se somete la señal de la fuente. De otra parte, los detectores, los instrumentos de registro y los filtros propiamente dichos aplicados durante la adquisición de datos, tambien "filtran" la señal que sale de la tierra.

Usando la propiedad de conmutatividad de los filtros, es posible intercambiar la señal de entrada con la señal del filtro mismo, es decir, se podría "filtrar" un filtro pasándolo a través de la señal de entrada. Con base en éste artificio, es posible reordenar la secuencia de filtrado e integrar todos los efectos de la tierra, excepto la función reflectividad, con los efectos de los instrumentos en una caja negra cuya salida constituye el pulso sísmico efectivo.

Este Pulso Sísmico Efectivo es luego filtrado por la reflectividad de la tierra y la salida de este proceso es la señal sísmica (reflexión) libre de ruido. Así, si adicionamos el ruido ambiental, la reflección detectada será el producto de la fuente, filtrada por la reflectividad, distorsionada por las reverberáciones y las reflecciones fantasmas, atenuada a lo largo del sendero de propagación en la tierra, y afectada por los instrumentos de registro.

MODELO CONVOLUCIONAL DE DATOS SISMICOS



Modificado de Sengbush, 1986.

Este modelo convolucional no es simplemente uno creado para explicar como funciona la sísmica, sino además tiene una incidencia inmensa, como se ve a continuación.

DECONVOLUCION

Cuando quiera que se considere un efecto de filtrado, bajo ciertas condiciones es posible asumir un inverso, es decir, si se tiene un filtro que genera una salida, ésta puede llegar a ser sometida al filtro inverso para obtener de nuevo la señal original.

En el modelo convolucional, todos los efectos causados por reverberaciones fantasmas, atenuación e instrumentos son agrupables en un sola "caja" que transforma la señal de la fuente en el pulso efectivo "c". y éste a su vez se introduce en la caja "r" (reflectividad). Matemáticamente, el modelo se reduce a:

$$s(t) = c(t) * r(t) + n(t)$$

donde n(t) representa el ruido aleatorio que proviene de diversas fuentes, entre ellas el viento, el ruido ambiental y de los instrumentos y geófonos mal plantados (Yilmaz, 1987; Sneider, 1980).

Esta ecuación posee una sola variable conocida, el registro sísmico s(t). Por tal, para resolver el sistema son necesarias condiciones extras. La primera, que la componente de ruido sea cero, lo cual es realista ya que durante el procesamiento se pretende reducirlo al máximo. La siguiente premisa es el conocer el pulso sísmico efectivo c(t). En cuyo caso la solución a la ecuación sería determinística. En esencia el proceso pretende despejar una ecuación con una incognita, r(t). Algebraicamente, para re-

solver r(t) se requiere despejarla removiendo c(t). Para ello se necesita:

1. Que exista un neutro de la operación convolución. Esto es, una función que al convolucionarla con otra función temporal se obtenga ésta última.

2. Que exista un inverso, es decir una función que al convolucionarla con la original se cancele, dando origen al neutro.

Para llenar dichos requisitos, construimos un objeto llamado delta de Dirac (Bleistein, 1984; Boas, 1983), la cual cumple el papel de neutro en la operación convolución, esto es

$$f(t) * f^{-1}(t) = \delta(t)$$

el cual será posteriormente definido.

Recordando que por propiedades de los filtros no importa cual es la entrada y cual es el filtro (conmutatividad) es igualmente válido pensar en una señal "r" que entra en un filtro "c". De éste modo, si pudiésemos conocer el inverso de "c", denotado c^{-1}, que anulará los efectos del filtro "c", la función reflectividad podría ser recuperada. Esta función contiene la información geológica de la tierra y es, por tal, la información que se requiere y no la versión distorsionada de éstas.

Con el fin de hallar el filtro inverso exacto c^{-1}, el primer requisito es que la información no tenga ruido. Como ello es un ideal, lo que se hace es reducirlo al máximo.

El proceso de hallar el mejor filtro posible inverso de "c" para aplicar a los datos es llamado **DECONVOLUCION** (Claerbout, 1985). La Deconvolución remueve los efectos del pulso sísmico "c" cuyas propiedades son no deseadas y desconocidas, reemplazándolo por un pulso sísmico deseado y de propiedades conocidas. Idealmente, la Deconvolución debería comprimir los componentes de la ondícula, dejando solo la reflectividad de la tierra en la traza sísmica (Claerbout, 1985).

La deconvolución es un proceso que mejora la resolución temporal al comprimir la ondícula básica. A veces realiza más que simplemente comprimir la ondícula, pudiendo remover parte de la energía en forma de múltiplos y reverberaciones.

REFERENCIAS

1. SENGBUSH, R.L., 1986. Seismic Exploration Methods.

2. YILMAZ, O., 1987. Seismic Data Processing. Investigations in Geophysics #2.

3. SENGBUSH, R.L., 1983. Petroleum exploration: a quantitative introduction. IHRDC. Boston

4. WATERS, K. H., 1987. Reflection seismology : a tool for energy resource exploration. Wiley. New York

5. ANSTEY, N.A., 1977. Seismic interpretation "the physical aspects". IHRDC.

6. ESPEY, 1982. Seismic Data Processing. A Short course given to ECOPETROL.

7. SHERIFF, R.E., 1984. Encyclopedic dictionary of exploration geophysics. SEG.

8. BLEISTEIN, N., 1984. Mathematical methods for wave phenomenon. Academic PRESS, Inc. Orlando.

9. SCHNEIDER, W.A., 1980. The Reflection Seismic Prospecting System. Depar. of Geophysics, C.S.M. Golden, CO.

10. CLAERBOUT, J. F., 1985. Imaging the Earth's Interior. Blackwell Scientific. Palo Alto. California.

11. BRACEWELL, R., 1983. Fourier transform and its applications. McGraw-Hill. N.Y.

12. SCHWARTZ, L., 1961. Mathematics for the Physical Sciences. Hermann. Paris.