Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 8 No. 1, enero-junio 1990

Grupos pasantes y manecillas del reloj

CARLOS H. LEZAMA S.*

1.0 INTRODUCCION

En álgebra a nivel de bachillerato, al estudiar ecuaciones polinómicas de primer grado con coeficientes racionales, algunos textos incluyen problemas relacionados con las manecillas del reloj. Veamos un ejemplo:

1.1 PROBLEMA

¿A qué hora exacta, entre la una y las dos, coinciden las manecillas del reloj?

En problemas como el anterior, la expresión "manecillas del reloj" se refiere al minutero y al horario. Además, el enunciado puede darse en términos de "ángulo determinado por las manecillas". Podemos enunciar también el problema 1.1. así:

¿A qué hora exacta, entre la una y las dos, las manecillas del reloj determinan un ángulo de 0°?

1.2 SOLUCION ELEMENTAL DEL PROBLEMA 1.1 Y CONVENCIONES:

En el bachillerato se acostumbra hacer una figura al resolver este tipo de problemas, tal como la que se muestra en la Figura 1.

* Profesor Asistente Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Figura

Puesto que x representa el "recorrido" del minutero, (1/12)x representa el "recorrido" del horario. Planteamos entonces la ecuación $x = 5 + (1/12)x$, cuya solución es $x = 60/11$. Por tanto, a las 01:05 5/11 (o, lo que es lo mismo, a las 01:05:27 3/11) las manecillas del reloj determinan un ángulo de 0°.

En lo sucesivo, las respuestas a este tipo de problemas las daremos como ternas ordenadas. Por ejemplo, la respuesta del problema 1.1 como terna ordenada es (1,5,5), donde la tercera componente corresponde al numerador de la fracción 5/11. Si el lector lo desea, puede dar respuestas como 4-adas ordenadas. En tal caso, debe escribir la respuesta del problema 1.1 así: (1.5.27,3), donde la cuarta componente corresponde al numerador de la fracción 3/11.
Recuérdese entonces que:

1. (a,b,c) significará a:b c/11, con $0 \leq a \leq 11$, $0 \leq b \leq 59$, $0 \leq c \leq 10$.

Convenimos, además, lo siguiente:

2. H-θ-M significará que el ángulo determinado por las manecillas del reloj es θ, con $0° \leq \theta \leq 180°$.

3. Una terna (a,b,c) para la cual se tenga que H-θ-M, la llamaremos "posición referida a θ" y la representaremos por $p(\theta)$.

   Así, $P(\theta) = \{(a,b,c) \mid 0 \leq a \leq 11,\ 0 \leq b \leq 59,\ 0 \leq c \leq 10,\ (a,b,c) = p(\theta)\}$

4. $P(k\theta)$ significará $\bigcup P(i\theta)$, con $i \in \mathbb{Z}_0^+$ tal que $0° \leq i\theta \leq 180°$.

   Por ejemplo, $P(k30°) = \bigcup P(i30°)$, con $i = 0,1,2,...,6$.

5. A cada elemento de $P(k30°)$ lo llamaremos "posición notable" y al conjunto $P(k30°)$, "conjunto de posiciones notables".

1.3 GENERALIZACION DEL PROBLEMA 1.1

Pretendemos ahora hallar todas las horas exactas para las cuales las manecillas del reloj determinan un ángulo de 0°.

En términos de lo convenido en 1.2, pretendemos determinar por extensión $P(0°)$. Vamos por partes:

Si en el enunciado del problema 1.1 cambiamos "una" y "dos" por "cuatro" y "cinco", respectivamente, la ecuación resultante es $x = 4(5) + (1/12)x$, la cual, tiene como solución $x = 21\ 9/11$.

Por tanto, a las 4:21 9/11 coinciden las manecillas del reloj, es decir, $(4,21,9) \in P(0°)$.

Si hacemos $g = 1{:}5\ 5/11$, podemos observar que $4g = 4{:}21\ 9/11$.

En general, se puede comprobar que si k es un entero, $0 \leq k \leq 11$, kg es una hora exacta para la cual coinciden las manecillas del reloj. Por tanto, según 1.2, tenemos:

$$P(0°) = \{g, 2g, ..., 11g\}, \text{ con } g = (1,5,5) \qquad (1.3.1)$$

Obsérvese que $P(0°)$ tiene 11 elementos.

El estudio de generalizaciones de problemas similares al 1.1 hace sospechar que tales problemas se pueden tratar por Teoría de Grupos, en particular, por grupos cíclicos.

En lo que sigue, $Z_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \overline{m-1}\}$ representa el grupo aditivo de los enteros módulo m, siendo m un entero mayor que 1. A veces, por simplicidad, escribiremos x en vez de $\bar{x}$. Además, al sumar en Z_m, diremos que se hizo reducción modular si: $a + b \geq m$, y, escribimos $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b-m}$.

Por ejemplo, en Z_{11}:

$\bar{6} + \bar{8} = \bar{3}$	(se hizo reducción modular)
$\bar{6} + \bar{8} = \overline{14}$	(no se hizo reducción modular)
$\bar{5} + \bar{4} = \bar{9}$	(no se hizo reducción modular)

2.0 DEFINICIONES Y RESULTADOS

2.1 DEFINICION

Sean $m_1, m_2, ..., m_r$, r enteros mayores que 1. En $\prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}_{m_i}$ definimos una operación binaria llamada adición pasante, simbolizada por $\dotplus$, así:

Para cualesquier elementos $(x_1, x_2, ..., x_r)$, $(y_1, y_2, ..., y_r)$ de $\prod_{i=1}^{r} \mathbf{Z}_{m_i}$,

$(x_1, x_2, ..., x_r) \dotplus (y_1, y_2, ..., y_r) = (z_1, z_2, ..., z_r)$, donde:

1) Los z's se hallan en forma consecutiva, comenzando por z_r.

2) $z_r = x_r + y_r$.

3) Para todo k, $1 \leq k < r$:

$$z_k = \begin{cases} x_k + y_k, & \text{si no hubo reducción modular al hallar } z_k+1 \\ x_k + y_k + 1, & \text{si hubo reducción modular al hallar } z_k+1 \end{cases}$$

Además, en (2) y (3), debe hacerse reducción modular siempre que ello sea posible.

2.2 EJEMPLOS

En $Z_{12} \times Z_{60} \times Z_{11}$, tenemos:

1. $(5,47,9) \dotplus (8,36,7) = (2,24,5)$, donde (2,24,5) se obtuvo así:

   $9 + 7 = 5$, en Z_{11} , y "pasa 1".

   $47 + 36 + 1 = 24$, en Z_{60} , y "pasa

   $5 + 8 + 1 = 2$, en Z_{12}

2. $(4,40,1) \dotplus (5,25,7) = (10,5,8)$ donde (10,5,8) se obtuvo así:

   $+ 7 = 8$, en Z_{11} .

   $0 + 25 = 5$, en Z_{60} y "pasa 1".

   $+ 5 + 1 = 10$, en Z_{12}

3. $2(1,10,10) = (1,10,10) \dotplus (1,10,10) = (2,21,9)$.

La adición pasante es, por definición, clausurativa y, evidentemente, es conmutativa. (También es asociativa, aunque no lo demostraremos aquí).

Además, se tiene que $(x_1, x_2, ..., x_r) \dotplus (0,0, ..., 0) =$
$= (x_1, x_2, ..., x_r)$, y, $(x_1, x_2, ..., x_r) \dotplus (m_1 - x_1 - 1, m_2 - x_2 - 1, ..., m_{r-1} - x_{r-1} - 1, m_r - x_r) =$
$= (0,0, ..., 0)$, para cada $(x_1, x_2, ..., x_r) \in \prod_{i=1}^{r} Z_{m_i}$

2.3 TEOREMA

$< \mathbf{Z}_{m_1} \times \mathbf{Z}_{m_2} \times ... \times \mathbf{Z}_{m_r} , \dotplus >$ es grupo abeliano.

2.4 DEFINICION

Al grupo abeliano del teorema 2.3 lo llamamos **grupo pasante** y lo simbolizamos por $\vec{\mathbf{Z}}_{m_1} \times \vec{\mathbf{Z}}_{m_2} \times ... \times \vec{\mathbf{Z}}_{m_r}$. En particular, consideraremos el grupo pasante $\vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11}$. Este grupo pasante es de orden $12 \times 60 \times 11 = 7920$.

Nos preguntamos ahora por el orden de elementos en grupos pasantes. Por ejmplo, es fácil verificar que en $\vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11}$, tenemos:

Orden de (1,5,5) = 11
Orden de (1,21,9) = 44
Orden de (0,0,1) = 7920

Se invita al lector a comparar los elementos de $< (1,5,5) >$ y $P(0^{o})$.

El siguiente teorema aclarará cuestiones relacionada con orden de elementos. Además, permite concluir que "grupo pasante" es otro nombre para un grupo "muy conocido".

2.5 TEOREMA FUNDAMENTAL:

El grupo pasante $\vec{\mathbf{Z}}_{m_1} \times \vec{\mathbf{Z}}_{m_2} \times ... \times \vec{\mathbf{Z}}_{m_r}$ es cíclico. Además, el orden de $(x_1, x_2, ..., x_r) \in \prod_{i=1}^{r} \vec{\mathbf{Z}}_{m_i}$

es igual al orden de $x_1 m_2 m_3 ... m_r + x_2 m_3 m_4 ... m_r + ... + x_{r-1} m_r + x_r$, considerado como elemento de $\mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_r}$

Demostración:

Sea $g = (0,0,\dots,0,1) \in \prod_{i=1}^{r} \vec{\mathbb{Z}}_{m_i}$.

El menor entero positivo k_1 tal que la r-ésima componente de $k_1 g$ sea 0, es, claramente, m_r. Además, $m_r g = (0,0,\dots,1,0)$.

Ahora, el menor entero positivo k_2 tal que las dos últimas componentes de $k_2 g$ sean 0, es $m_{r-1} m_r$. Además, $m_{r-1} m_r g = (0,\dots,1,0,0)$.

Continuando con este proceso, el menor entero positivo k_{r-1} tal que las r-1 últimas componentes de $k_{r-1} g$ sean 0, es $m_2 m_3 \dots m_r$.

Además, $m_2 m_3 \dots m_r g = (1,0,\dots,0)$

Finalmente, el menor entero positivo k_r tal que $k_r g = 0$, es, $m_1 m_2 \dots m_r$. Por tanto, el orden de g es $m_1 m_2 \dots m_r$.

Luego, $\vec{\mathbb{Z}}_{m_1} \times \vec{\mathbb{Z}}_{m_2} \times \dots \times \vec{\mathbb{Z}}_{m_r}$ es cíclico y $g = (0,0,\dots,0,1)$ es un generador. Se sigue entonces que $\vec{\mathbb{Z}}_{m_1} \times \vec{\mathbb{Z}}_{m_2} \times \dots \times \vec{\mathbb{Z}}_{m_r} = \mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_r}$.

Hagamos $(0,0,\dots,0,1) = \vec{1}$. Ahora, siendo $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ cualquier elemento del grupo pasante, se tiene:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \dots, x_r) &= (x_1, 0, \dots, 0) \dotplus (0, x_2, 0, \dots, 0) \dotplus \dots \dotplus (0,0,\dots,0,x_r) = \\ &= x_1 m_2 m_3 \dots m_r \vec{1} \mid \dots \mid x_{r-1} m_r \vec{1} \mid x_r \vec{1} = \\ &= (x_1 m_2 m_3 \dots m_r + x_2 m_3 m_4 \dots m_r + \dots + x_{r-1} m_r + x_r)\, \vec{1}.\end{aligned}$$

Por tanto, definamos $\varphi : \prod_{i=1}^{r} \vec{\mathbb{Z}}_{m_i} \to \mathbb{Z}_{m_1 m_2 \dots m_r}$ por

$\varphi((x_1, x_2, \dots, x_r)) = x_1 m_2 \dots m_r + x_2 m_3 \dots m_r + \dots + x_{r-1} m_r + x_r$.

Es evidente que φ es función.

Para demostrar ahora que φ es homomorfismo, se consideran dos casos:

(i) Cuando $x_i + y_i < m_i$, para cada i, $1 \le i \le r$. Entonces:

$$\begin{aligned}&\varphi((x_1, x_2, \dots, x_r) \dotplus (y_1, y_2, \dots, y_r)) = \\ &= \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_r + y_r)) = \\ &= (x_1 + y_1) m_2 m_3 \dots m_r + (x_2 + y_2) m_3 m_4 \dots m_r + \dots + (x_{r-1} + y_{r-1}) m_r + \\ &+ (x_r + y_r) = (x_1 m_2 m_3 \dots m_r + x_2 m_3 m_4 \dots m_r + \dots + x_{r-1} m_r + x_r) \\ &+ (y_1 m_2 m_3 \dots m_r + \dots + y_{r-1} m_r + y_r) = \\ &= \varphi((x_1, x_2, \dots, x_r)) + \varphi((y_1, y_2, \dots, y_r)).\end{aligned}$$

(ii) Cuando $x_i + y_i \ge m_i$, para algún i, $1 \le i \le r$.
Supongamos que $x_k + y_k \ge m_k$ y que $x_i + y_i < m_i$, cuando $i \ne k$.

Entonces:

$$\varphi((x_1, x_2, \dots, x_r) \dotplus (y_1, y_2, \dots, y_r)) = (*)$$

$$= \varphi((x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_{k-1} + y_{k-1} + 1, x_k + y_k - m_k, x_{k+1} + y_{k+1}, \dots, x_r + y_r)) =$$

$$= (x_1 + y_1) m_2 m_3 \dots m_r + \dots + (x_{k-1} + y_{k-1} + 1) m_k m_{k+1} \dots m_r + \dots + (x_r + y_r) =$$

$$= x_1 m_2 m_3 \dots m_r + y_1 m_2 m_3 \dots m_r + \dots + x_{r-1} m_r + y_{r-1} m_r + x_r + y_r =$$

$$= \varphi((x_1, x_2, \dots, x_r)) + \varphi((y_1, y_2, \dots, y_r))$$, como en el caso anterior.

Ahora, $\varphi((x_1, x_2, \dots, x_r)) = 0$ ssi $x_1 m_2 \dots m_r + \dots + x_{r-1} m_r + x_r = 0$ ssi $x_i = 0$, para cada i, porque $x_1 m_2 \dots m_r + \dots + x_{r-1} m_r + x_r < m_1 m_2 \dots m_r$.

Luego el núcleo de φ consta únicamente del $(0,0,\dots,0)$.

Por todo lo anterior, junto con el hecho de que los dos grupos tienen el mismo orden $m_1 m_2 \dots m_r$, φ es isomorfismo.

Luego se tiene la última afirmación del teorema.

2.6 EJEMPLO

Hallar el orden de (10,43,7) en $\vec{\mathbb{Z}}_{12} \times \vec{\mathbb{Z}}_{60} \times \vec{\mathbb{Z}}_{11}$

Solución:

Hacemos $g = (10)(60)(11) + (43)(11) + 7 = 7080$ $\mathbb{Z}_{7920}$. Ahora, el orden de g en el grupo $\mathbb{Z}_{7920}$, es 66. Luego, según el teorema 2.5, el orden de (10,43,7) en el grupo pasante $\vec{\mathbb{Z}}_{12} \times \vec{\mathbb{Z}}_{60} \times \vec{\mathbb{Z}}_{11}$, es 66.

(*) Si $x_k - 1 + y_k - 1 + 1 \ge m_{k-1}$, el proceso en la (k-1)-ésima componente de la suma es análoga al descrito para la k-ésima componente.

Obsérvese qı (10,43,7) = 7080(0,0,1)

El propósito ahora es presentar la solución general de problemas sobre manecillas del reloj, utilizando los grupos pasantes. Para tal efecto se incluyen un corolario y una definición más.

2.7 COROLARIO

$$\vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11} = \vec{\mathbf{Z}}_{7920} ; \vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11} = < (0,0,1) >$$

Obsérvese que el orden de (0,01) como elemento del producto directo externo $\mathbf{Z}_{12} \times \mathbf{Z}_{60} \times \mathbf{Z}_{11}$ es 11, mientras que, como elemento del grupo pasante $\vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11}$, ¡ es 7920 !

2.8 DEFINICION

1. Al subgrupo < (1,10,10) > del grupo pasante $\vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11}$ lo denominamos **grupo del reloj** y lo representamos por G_R.

2. Al subgrupo <,1,5,5) > del grupo pasante $\vec{\mathbf{Z}}_{12} \times \vec{\mathbf{Z}}_{60} \times \vec{\mathbf{Z}}_{11}$ lo denominamos **grupo coincidente** y lo representamos por G_c.

Nótese que <(1,5,5)> ≤ <(1,10,10)>

3.0 APLICACIONES

La Tabla 3.1 muestra los 132 elementos del grupo del reloj G_R. Cada fila contiene la primera componente de 11 múltiplos del generador (1,10,10). Los dos números que encabezan cada columna corresponden a las dos últimas componentes de cada múltiplo del generador.

La casilla marcada con un punto en la Tabla 3.1 corresponde al elemento (8,54,6). Obsérvese que (,54,6) = 38(1,10,10) .

3.1 TABLA DE ELEMENTOS DEL GRUPO DEL RELOJ G_R

10-10	21-9	32-8	43-7	54-6	5-5	16-4	27-3	38-2	49-1	0-0
1	2	3	4	5	7	8	9	10	11	1
2	3	4	5	6	8	9	10	11	0	2
3	4	5	6	7	9	10	11	0	1	3
4	5	6	7	8 •	10	11	0	1	2	4
5	6	7	8	9	11	0	1	2	3	5
6	7	8	9	10	0	1	2	3	4	6
7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	7
8	9	10	11	0	2	3	4	5	6	8
9	10	11	0	1	3	4	5	6	7	9
10	11	0	1	2	4	5	6	7	8	10
11	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11
0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	0

¿Recuerda el lector lo que significa P(k30°)?

Los 132 elementos de la Tabla 3.1 ¡son los 132 elementos del conjunto P(k30°)! Por tanto, como conjuntos, P(k30°) y G_R son iguales.

3.2 $\boxed{G_R = P(k30^\circ)}$

Debido a la igualdad 3.2, en la Tabla 3.1 pueden leerse las 132 horas exactas para las cuales las manecillas del reloj determinan un ángulo cuya medida es un múltiplo de 30°, comprendido entre 0° y 180°. Más aún, siendo g = (1,10,10), tenemos:

$tg \mid t \equiv 0 \,(\text{mod.}12) \} = P(0^\circ)$

2. $\{ tg \mid t \equiv \pm 1 \,(\text{mod.}12) \} = P(30^\circ)$

3. $tg \mid t \equiv \pm 2 \,(\text{mod.}12) \} = P(60^\circ)$

4. $\{ tg \quad \equiv \pm 3 \,(\text{mod.}12) \} = P(90^\circ)$

$tg \mid t \equiv \pm 4 \,(\mathrm{mod.}12) \} = P(120°)$

6. $\{ tg \mid t \equiv \pm 5 \,(\mathrm{mod.}12) \} = P(150°)$

7. $\{ tg \mid t \equiv 6 \,(\mathrm{mod.}12) \} = P(180°)$

Obsérvese que de la lista anterior el único conjunto que es subgrupo de G_R, es el número 1. (Precisamente el grupo coincidente G_c).

3.3 GRUPO GENERALIZADO DEL RELOJ

El subgrupo $<(0,1,1)>$ del grupo pasante $\vec{\mathbb{Z}}_{12} \times \vec{\mathbb{Z}}_{60} \times \vec{\mathbb{Z}}_{11}$ es el grupo generalizado del reloj y lo representamos por G_G. Como conjunto, es igual a $P(k6°)$.

$\boxed{G_G = P(k6°)}$. Además, siendo $g = (0,1,1)$, tenemos:

1. $tg \mid t \equiv 0(\mathrm{mod.}60) \} = P(0°)$

2. $\{ tg \mid t \equiv \pm 1(\mathrm{mod.}60) \} = P(6°)$

3. $tg \mid t \equiv \pm 2(\mathrm{mod.}60) \} = P(12°)$

31. $tg \quad \equiv 30\mathrm{mod.}60) \} = P(180°)$

Obsérvese que el orden de $<(0,1,1)>$ es 660.

3.4 PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar todas las horas exactas para las cuales las manecillas del reloj determinan un ángulo de 150°.

Solución

Según lo explicado en 1.2, basta determinar por extensión el conjunto $P(150°)$ y, según lo explicado en 3.2,

$$P(150°) = \{ t(1,10,10) \mid t = 12k + 5, 12k + \quad k \in \mathbb{Z}_o^+ \}$$

Recurriendo a la Tabla 3.1, se tiene la solución del problema.

2. Hallar todas las horas exactas para las cuales las manecillas del reloj determinan un ángulo de 54°.

Solución:

Considerando .l grupo generalizado del reloj (3.3), se tiene que
$$P(54°) = \{ t\,(0,1,1) \mid t = 60k + 9, 60k + 51, k \in Z_o^+ \}.$$

A manera de ejemplo,

$$111(0,1,1) = (2,1,1) = 2{:}01\ 1/11 \text{, y,}$$

$129(0,1,1) = (2,20,8) = 2{:}20\ 8/11$, son las dos horas exactas, entre las 2 y las 3, para las cuales las manecillas del reloj determinan un ángulo de 54°.

3. ¿A qué hora, entre las 9 y las 10, las manecillas del reloj determinan un ángulo de 144°?

Solución:

Considerando el conjunto $P(144°)$ en el grupo generalizado del reloj, hallamos $(60 \times 8 + 24)\,(0,1,1)$ y $(60 \times 8 + 36)\,(0,1,1)$, obteniendo $(9,9,9)$ y $(9,22,10)$, respectivamente. Por tanto, a las 9:09 9/11 y a las 9:22 10/11 las manecillas del reloj determinan un ángulo de 144°.

3.5 UN COMENTARIO FINAL

Si en el grupo pasante $\vec{\mathbb{Z}}_{m_1} \times \vec{\mathbb{Z}}_{m_2} \times \ldots \times \vec{\mathbb{Z}}_{m_r}$, hacemos $m_1 = m_2 = \ldots = m_r = m$, se tiene que $(\vec{\mathbb{Z}}_m)^r \cong \mathbb{Z}_{m^r}$.
Por tanto, según el teorema 2.5,
$$\varphi((x_1, x_2, \ldots, x_r)) = x_1 m^{r-1} + x_2 m^{r-2} + \ldots + r_{r-1} m + x_r = (x_1 x_2 \ldots x_r)_m.$$

Por ejemplo, en $(\vec{\mathbb{Z}}_2)^4$, $\varphi((1,0,1,1)) = 1(2)^3 + 0(2)^2 + 1(2) + 1 = 11 = (1011)_2$. Además, para cada entero x, $1 \leq x \leq 15$, $x(0,0,0,1)$ permite representar x en base m. Por ejemplo, $14(0,0,0,1) = (1,1,1,0)$. Así, $14 = (1110)_2$

Lo anterior sugiere que los grupos pasantes pueden utilizarse en la representación de enteros positivos.

ılle apı posil ıien ıudiera

REFERENCIAS

John. Algebra Abstracta. Primer Curso 3ed. Addison- esley, México, 1988.

Ken tions. 2ed. Addison-Wesley, New Jersey,
988