Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 8 No. 1, enero-junio 1990

Continuidad uniforme em espaços mètricos

ELON LAGES LIMA*

Sejam M,N espaços métricos. Uma aplicação $f: M \to N$ diz-se **uniformemente contínua** quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível achar $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ quaisquer que sejam $x, y \in M$ com $d(x,y) < \delta$.

É bem conhecido (v., por exemplo, [1], pag. 233) que se M é compacto então toda aplicação contínua $f: M \to N$ é uniformemente contínua. Por outro lado, se $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros com sua métrica usual $d(m,n) = |m-n|$, então **qualquer** aplicação $f: \mathbb{Z} \to N$ é uniformemente contínua, embora $\mathbb{Z}$ não seja compacto.

É natural, por tanto, considerar a seguinte questao: para quais espaços métricos M verdade que toda aplicação contínua $f: M \to N$ é uniformemente contínua?

Nesta nota é apresentada uma demonstração simples de um teorema que caracteriza esses espaços.

Um espaço métrico M diz-se **uniformemente** discreto quando existe $\delta > 0$ tal que $d(x,y) \geq \delta$ para dois pontos distintos quaisquer $x,y \in M$. Evidentemente, se M é uniformemente discreto (como $\mathbb{Z}$, por exemplo) então toda aplicação $f: M \to N$ é uniformemente contínua.

Teorema:

As seguintes afirmações sobre um espaço métrico M são equivalentes:

---

* Director del Instituto de Matemática Pura y Aplicada, IMPA, Río de Janeiro, Brasil.

A. Toda aplicação contínua $f: M \to N$ (com valores num espaço métrico qualquer) é uniformemente contínua.

B. Para todo par de subconjuntos fechados, disjuntos e não-vazios $F, G \subset M$, a função de Urysohn $\varphi: M \to [0,1]$, definida por

$$\varphi(x) = d(x,F)/[d(x,F) + d(x,G)], \quad x \in M,$$

é uniformemente contínua.

C. Para todo par de subconjuntos fechados, disjuntos e não-vazios $F, G \subset M$, a distância

$$d(F,G) = \inf\{d(x,y) ; x \in F,\ y \in G\}$$

é um número positivo.

D. Existe um subconjunto compacto $K \subset M$ tal que toda vizinhança $V \supset K$ tem complementar uniformemente discreto $M-V$.

Demonstração:

Evidentemente, $A \Rightarrow B$.

Para mostrar que $B \Rightarrow C$, sejam $F, G \subset M$ subconjuntos fechados, disjuntos e não-vazios. A função de Urysohn $\varphi: M \to [0,1]$ do par F,G sendo uniformemente contínua, podemos achar $\delta > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < 1$ sempre que $x, y \in M$ são tais que $d(x,y) < \delta$. Ora, se $x \in F$ e $y \in G$ então $\varphi(x) = 0$ e $\varphi(y) = 1$, logo $|\varphi(x) - \varphi(y)| = 1$. Isto quer dizer que $x \in F$, $y \in G \Rightarrow d(x,y) \geq \delta$. Noutras palavras, $d(F,G) \geq \delta > 0$.

Em seguida, provaremos que $C \Rightarrow D$. Seja K o conjunto dos pontos de acumulação de M. Sabe-se que K é um subconjunto fechado de M. (Isto é um exercício, proposto na página 88 de [1]). Afirmamos que K é compacto. Com efeito, se não fosse compacto, K conteria um subconjunto infinito enumerável $F = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ sem pontos de acumulação em K e (como K é fechado) conseqüentemente sem pontos de acumulação em M. Logo $F \subset M$ é fechado. Como $F \subset K$, para cada $n \in N$ existe $y_n \in M$ tal que $0 < d(x_n, y_n) < 1/n$. O conjunto $G = \{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ também não pode ter ponto de acumulação em M logo é fechado. Mas $F \cap G = \emptyset$ e $d(F,G) = 0$. Isto contradiz C e mostra que K é compacto. Por definição de K, seu complemento $M-K$ é discreto. Seja V uma vizinhança de K em M. Afirmamos que $M-V$ é uniformemente discreto. Observemos que todo subconjunto de $M-V$ é fechado em M pois não tem pontos de acumulação. (Isto não é verdade para subconjuntos de $M-K$). Supondo, por absurdo, que $M-V$ não fosse uniformemente discreto acharíamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, pontos

$x_n, y_n \in M-V$ tais que $0 < d(x_n, y_n) < 1/n$. Escolhendo sucessivamente cada par x_n, y_n no complemento de $\{x_1, y_1, \dots, x_n, y_n\}$, como é possível fazer, obtemos fechados disjuntos $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $G = \{y_1, \dots, y_n\}$ em M, com $d(F,G) = 0$, o que contradiz C.

Finalmente, para provar que $D \Rightarrow A$ suponhamos que $f: M \to N$ não seja uniformemente contínua. Então, para algum $\varepsilon > 0$, existem seqüências de pontos x_n, y_n em M com $\lim d(x_n, y_n) = 0$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para todo $\delta > 0$ o conjunto $B(K;\delta) = \{x \in M ; d(x,K) < \delta\}$ é uma vizinhança de K. Mostraremos que $\lim d(x_n, K) = \lim d(y_n, K) = 0$. Ora, em virtude de D, dado $\delta > 0$, existe c, o qual podemos escolher de modo que $0 < c < \delta/2$, tal que $d(x,K) > \delta/2$ e $d(y,K) > \delta/2$ impliquem $d(x,y) \geq c$. Como $\lim d(x_n, y_n) = 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, y_n) < c$. Por tanto, $n > n_0$ implica que ou $d(x_n, K) < \delta/2$ ou então $d(y_n, K) < \delta/2$. Em qualquer caso, como sabemos que $d(x_n, y_n) < c$, teremos $d(x_n, K) < \delta$ e $d(y_n, K) < \delta$ para todo $n > n_0$. Isto prova que $\lim d(x_n, K) = \lim d(y_n, K) = 0$. Agora, como K é compacto, existe, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $a_n \in K$ tal que $d(x_n, K) = d(x_n, a_n)$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos supor (ainda devido à compacidade de K) que $\lim a_n = a \in K$. Então $\lim x_n = \lim y_n = a$. Como $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon$ para todo n, segue-se que f não é contínua no ponto a. Portanto toda aplicação contínua $f: M \to N$ é uniformemente contínua.

Corolário 1:

Se toda função real contínua $f: M \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua então toda aplicação contínua $f: M \to N$ é uniformemente contínua.

Corolario 2:

Se M é conexo e toda aplicação contínua $f: M \to N$ é uniformemente contínua então M é compacto.

Corolario 3:

Se toda aplicação contínua $f: M \to N$ é uniformemente contínua então M é completo.

O Coralário 1 resulta da condição B do Teorema enquanto os corolários 2 e 3 decorrem da condição D.

A.A. Monteiro e M.M. Peixoto [2] provaram a equivalência entre as condições A e C. Tomando complementares, vê-se que C é equivalente à afirmação de que toda cobertura de M por meio de dois abertos possui um número de Lebesgue. (Diz-se que $\delta > 0$ é **número de Lebesgue** de uma cobertura $M = \bigcup C_\lambda$ quando todo subconjunto $S \subset M$ de diâmetro menor do que δ está contido em algum C_λ da cobertura). Na realidade, esses autores demonstraram que C (e portanto A,B e D) é equivalente à seguinte codição, formalmente mais restritiva:

E. Toda cobertura aberta de M possui um número de Lebesgue.

Pelo que vimos, basta provar que D E. Suponhamos, por absurdo, que $M = \bigcup A_\lambda$ seja uma cobertura aberta sem número de Lebesgue. Então, para cada $n \in N$, existe um conjunto $S_n \subset M$, com diâmetro menor do que $1/n$, para o qual não existe λ com $S_n \subset A_\lambda$. Escolhamos, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in S_n$. Para um certo $r > 0$, ponhamos $V = B(K; r)$. Afirmamos que r pode ser escolhido de tal modo que $x_n \in M\text{-}V$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Do contrário, para cada $i \in \mathbb{N}$, existiriam $y_i \in K$ e x_{n_i} tais que $d(x_{n_i}, y_i) < 1/i$. Passando a subsequências, se necessário, teríamos $\dim x_{n_i} = \lim y_i = a \in K$.

O ponto a pertenece a algum aberto A_λ da cobertura. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $B(a; 2\varepsilon) \subset A_\lambda$. Tomando i tão grande que $x_{n_i} \in B(a; \varepsilon)$ e diam $S_{n_i} < \varepsilon$, teremos $S_{n_i} \subset B(a; 2\varepsilon) \subset A_\lambda$, uma contradição. Logo existe $r > 0$ tal que $x_n \in M\text{-}V$ para todo $n \in \mathbb{N}$, com $V = B(K; r)$. Como, em virtude de D, M-V é uniformemente discreto, se tomarmos n tao grande que $1/n$ seja menor do que o δ da definição, resultará que $S_n = \{x_n\}$ mas então é claro que S_n está contido em algum A_λ. Esta contradição final prova E.

Esta nota já estava redigida quando tomei conhecimento de [3], onde há uma referência a M. Atsuji [4], o qual demosntrou a equivalência entre as condições A e D do teorema acima.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, Elon L. **Espaços Métricos**, Projeto Euclides, IMPA. Rio de Janeiro, 1983 (2a. edição).

[2] A.A. Monteiro et M.M. Peixoto. **Le nombre de Lebesgue et la continuité uniforme**, Portugaliae Mathematica, 10 (1951), 105-113.

[3] BEER, Gerald. **Metric spaces on wchich constinuous functions are uniformly continuous and Hausdorff distance**, Proceddings of the American Mathematical Society, 95, (1985) 653-658.

[4] ATSUJI, M. **Uniform** continuity of continuous functions of metric spaces, Pacific Journal of Mathematics, 8 (1958) 11-16.