Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas
Vol. 8 No. 1, enero-junio 1990

Seguros de Vida*

ESPERANZA HERNANDEZ**

INTRODUCCION

El presente resumen sobre los Seguros de Vida, tiene por objeto ilustrar sobre un campo de la Matemática Aplicada cual es la Actuaría. Del texto de este documento se deduce que tanto el manejo de Probabilidades como de Estadística son herramientas fundamentales para el desarrollo de la Teoría de Riesgo.

En razón a que la medición de una situación de riesgo involucra varias variables, es indispensable el manejo del Análisis Diferencial e Integral en una y varias variables, máxime si se tiene en cuenta que no todos los procesos son discretos, sino que existen los de comportamiento continuo.

El problema fundamental de la ACTUARIA consiste en medir, en términos monetarios, situaciones contingentes o inciertas; tal medición se realiza mediante la combinación de funciones financieras y funciones de contingencia.

Una aplicación importante en este campo son los llamados Contratos de Seguros de Vida, en los cuales una primera persona llamada Asegurador, se compromete a pagar una suma de dinero a la muerte de una segunda persona llamada Asegurado. Como contrapresentación, el Asegurado debe pagar al Asegurador una cantidad de dinero llamada prima.

---

* Tomado del las Memorias del XIII Congreso Nacional de Matemáticas, publicadas por la Universidad Nacional de Colombia y la Sociedad Colombiana de Matemáticas.

** Superintendencia Bancaria, Bogotá, D.E.

FUNCIONES FINANCIERAS

Valor presente

¿Qué suma de dinero A estaríamos dispuestos a recibir hoy, a cambio de una obligación S que se vence al final de n años, si el dinero renta una tasa i anual?

A debe ser una cantidad tal que colocada a la tasa i, dé como acumulado al final de n años el valor de la obligación pactada S. Es decir:

$$A(1 + i)^n = S$$

De donde:

$$A = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

si llamamos

$$Z = \frac{\quad}{(1 + i)}$$

$$A = SZ^n$$

Generalizando a n obligaciones pactadas $S_1, S_2, \ldots, S_n$, con vencimientos al final de 1,2 ,... n años respectivamente, tenemos que el valor presente de esta serie de pagos, o valor que estaríamos dispuestos a recibir hoy a cambio del pago de $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sería:

$$A = S_1Z + S_2Z^2 + S_3Z^3 + \ldots + S_nZ^n$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} S_iZ^i$$

FUNCIONES DE CONTINGENCIA

Aunque la muerte es un hecho seguro, la contingencia estriba en el "Cuándo Ocurrirá". Para medir este cuándo, existen las llamadas funciones de sobrevivencia, que presentan la posibilidad de que una persona de edad 0 alcance la edad X.

Si f(x) es tal función, se puede observar de la experiencia que:

1. f(x) es continua
2. f(x) es decreciente
3. $f(0) = 1$
4. Existe un valor w tal que $f(x) = 0$ para $x \geq w$

Para efectos prácticos, w se estima en un valor cercano a 100 y su elección es un poco arbitraria.

Conocida la función f(x) se puede construir una tabla, llamada "TABLA DE MORTALIDAD", que consigna el número de vivos y el número de muertos años tras año, para valores enteros de x así:

Sea

f(x) = función de sobrevivencia
l(x) = número de vivos de edad X *
d(x)= número de muertos de edad X*
l(0) = 100.000** = l_0

Entonces:

$$l_1 = 100.000\, f(1)$$
$$l_2 = 100.000\, f(2)$$

$$l_x = 100.000\, f(x)$$
$$d_x = l_1 - lx + 1.$$

* Por simplicidad estas notaciones se reemplazarán así:

$$l(x) = l_x = lx, \quad d(x) = d_x = dx$$

(Nota del Editor)

** (este número es llamado radio de la tabla y es escogido grande, para eliminar cifras decimales).

Ejemplo de Tabla de Mortalidad para edades 0-2. Si $f(x) = 1 - .005x - .00005x^2$. Radio 100.000

$$lx = 100.000\, f(x)$$

Edad	lx	dx
0	100.000	505
1	99.495	515
2	98.890	525

A partir de la Tabla de Mortalidad se pueden encontrar los valores para diferentes probabilidades así:

Sea (x): probabilidad de que una persona de edad x:

Px = (x) alcance la edad x + 1

$$= \frac{lx+1}{lx}$$

npx = (x) alcance la edad x + n

$$\frac{lx+n}{lx}$$

q_x = (x) fallezca entre edades x y x + 1

$$= 1 - px = 1 \quad \frac{lx+1}{lx} \quad \frac{dx}{l_1}$$

n°x = (x) fallezca entre edades x y x + n

$$= \frac{lx+n}{ln}$$

n/m°x = (x) fallezca entre edades x + n, y, x + n + m.

En la práctica, la Tabla de Mortalidad es construida con base en estudios estadísticos de datos de mortalidad, obteniéndose los q_x y deduciendo posteriormente los valores de lx y dx, bajo un supuesto para 10 así:

$$d_o = 10\, q_o$$
$$l_1 = 10 - d_o$$
$$d_1 = l_1 q_1$$
$$l_2 = l_1 - d_1$$

$$d_x = l_x q_x$$
$$l_{x+1} = l_x - d_x = lx - dx$$

Generalmente, de una tabla así constituída no se puede deducir una función de mortalidad f(x), siendo la tabla el único patrón de mortalidad.

EJEMPLO DE SEGURO DE VIDA

Convenciones

x Edad del asegurado

i Tasa de interés

$$Z = \frac{1}{1+i}$$

$$Dx = Z^x lx$$

$$Nx = \sum_{t=0}^{w-x} Dx + t$$

$$Cx = Z^{x+1} dx$$

$$Mx = \sum_{t=0}^{w-x} Cx + t$$

$$Sx \quad \sum_{t=0}^{w-x} Nx + t$$

$Rx \qquad \sum_{t=0}^{w-x} Mx + t$

P Prima anual constante.

Características del Seguro

1. Temporal 5 años

El Asegurado paga el valor asegurado, si la muerte ocurre durante los 5 años siguientes a la toma del seguro.

2. Valor Asegurado Creciente Aritméticamente en un 20% anual, con \$1.000.= de valor asegurado para el primer año.

t	Valor asegurado
1	1.000.=
2	1.200.=
3	1.400.=
4	1.600.=
5	1.800.=

3. Pago de Primas Anuales Constantes durante los 3 primeros años de Seguro.

El pago de primas está supeditado a que viva el asegurado.

Supuestos

1. El seguro se paga al finalizar el año

Cálculo de la Prima

En $t = 0$, el valor presente de las obligaciones del asegurador es igual al valor presente de las obligaciones del asegurado; es decir, el costo esperado del siniestro, es igual al ingreso esperado por primas.

Costos esperados del siniestro en $t = o$

$.000\ Z^{1} + 1.200\ Z^2{}_1/q_x + 1.400\ Z^3{}_2/q_x + 1.600\ Z^4{}_3/q_x + 1.800\ Z^5{}_4/q_x$

Ingreso esperado en $t = 0$

$$P_o P_x + PZ_1 p_x + PZ^2{}_2 p_x.$$

Igualando las dos

$$P = \frac{1000\frac{Z dx}{lx} + 1200\ Z^2\frac{dx+1}{lx} + 1400\ Z^3\frac{dx+2}{lx} + 1600\ Z^4\frac{dx+3}{lx} + 1800\ Z^5\frac{dx+4}{lx}}{\cdot Z^1\ \frac{lx+1}{lx} + Z^2\ \frac{lx+2}{lx}}$$

Multiplicando y dividiendo por Z^x tenemos:

$$P = \frac{1000Z^{x+1}dx + 1200Z^{x+2}dx+1 + 1400Z^{x+3}dx+2 + 1600Z^{x+4}dx+3 + 1800Z^5dx+4}{Z^x lx + Z^{x+1}lx+1 + Z^{x+2}lx+2}$$

$$P = \frac{1000Cx + 1200Cx+1 + 1400Cx+2 + 1600Cx+3 + 1800Cx+4}{Dx + Dx+1 + Dx+2}$$

$$P = \frac{1000\ Mx - Mx+5 + 200\ Rx+1 - Rx+5 - 4Mx+5}{Nx - Nx+3}$$

La prima así calculada se denomina prima neta y está destinada a cubrir únicamente la protección. El asegurado, en desarrollo de su actividad, incurre en gastos administrativos y de mercadeo, los cuales son trasladados al asegurado mediante recargos a la prima, de donde se obtiene la llamada prima comercial; estos recargos están expresados en Términos del valor asegurado contratado y de la prima comercial.

Para ilustrar lo anterior, supongamos que existen en la póliza, comento los siguientes recargos:

1. 1% del valor asegurado del primer año para administración.
2. 12% de la prima comercial para comisiones de colocación.

Prima Comercial PC

$$PC = \frac{P + 1}{0.88}$$

Reservas Matemáticas:

La ecuación fundamental de la cual se despeja la prima neta no se mantiene en el tiempo, por cuanto el valor presente de las primas futuras es necesariamente menor que el valor presente de las obligaciones del asegurador, puesto que, para un asegurado que no ha fallecido, el valor presente esperado de la suma que recibirá del asegurador ha aumentado, mientras que el valor presente esperado de las primas que pagará ha disminuído. La diferencia entre estos dos valores presentes es llamada **Reserva Matemática V_t.**

Aplicando este concepto al seguro aquí tratado tenemos: Valor presente esperado de obligaciones del asegurador al finalizar el año $t = AR_t$

$$AR_t = \sum_{k=0}^{A-t} [1000 + (t+k)\,200] \; \frac{Cx+t}{Dx+t}$$

Valor presente esperado de la obligación del asegurado (A0)

$$A0 = \begin{cases} \dfrac{Nx+t - Nx+3}{Dx+t} & t \leq 3 \\ 0 & t > 3 \end{cases}$$

Las reservas son acumuladas, con interés y contingencias, de sumas pagadas anticipadamente por el asegurado, para cubrir riesgos futuros. Ellas representan un pasivo contable para el asegurador y un derecho para el asegurado en caso de cancelación anticipada del Contrato.