Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol.8 No. 1, enero-junio 1990

Acerca de un enfoque didáctico para el aprendizaje del cálculo*

LUIS E. MORENO A**

La enseñanza del Cálculo ha seguido presentando dificultades, a pesar de que existe una gran profusión de textos sobre esta materia. En lo que sigue, queremos no sólo poner de presente algunas de las dificultades que hemos encontrado en nuestra práctica docente, sino proponer ciertos enfoques didácticos que han mostrado ser efectivos para lograr la comprensión y el aprendizaje del Cálculo.

1. LA PEDAGOGIA DE LA EXPOSICION

Los textos están generalmente escritos dentro de una concepción que podríamos llamar "la pedagogía de la exposición", derivada de la parte axiomático-deductiva de la naturaleza de las matemáticas.

La presentación axiomático-deductiva (P.A.D.) de la matemática ha sido una consecuencia del desarrollo (histórico) de esta disciplina.

Sin embargo, desde el punto de vista didáctico, no es automático adoptar este tipo de presentaciones. Aún más, la P.A.D. no es completamente "natural", pues genera un

* Tomado de las Memorias del XIII Congreso Nacional de Matemáticas, publicadas por la Universidad Nacional de Colombia y la Sociedad Colombiana de Matemáticas.

** Cinvestav-I.P.N., México, D.E.F. Departamento de Matemática Educativa.

ocultamiento (conciente o inconciente) de otras formas legítimas de concepción y presentación de la matemática, dentro del proceso de enseñanza/aprendizaje.

Esta es la situación (de ocultamiento) respecto a los desarrollos inductivos y heurísticos que estimulan actividades de descubrimiento.

En el mejor de los casos, dentro de la P.A.D. este tipo de actividades (dentro de **situaciones didácticas**) quedan relegadas a un "depósito de ejercicios" que carece de estructura y propósitos didácticos explícitos.

Una educación matemática que exagere la P.D.A. en demérito de las otras formas de presentación (organizadas en un "modelo de uso") hace de los estudiantes

> lectores de textos, con una idea de lo que es el pensamiento matemático, pero no los provee de una experiencia cuyo propósito explícito sea desarrollar **el modo de pensar matemático.**

Todo aquel con algo de oficio matemático reconoce que la "lógica del descubrimiento" es distinta de la "lógica de la exposición" pues la realidad sicológica es distinta de la realidad matemática.

Una mirada a la historia de la matemática (del cálculo y de análisis en particular) nos muestra que durante el complejo proceso de desarrollo de una disciplina, se van produciendo **organizaciones locales** que anteceden a los procesos de axiomatización, vale decir, a los **procesos locales de organización.**

Didácticamente, es importante trabajar con organizaciones locales; algunas razones para ello son:

1. Los procesos locales de organización favorecen una de las metas fundamentales del aprendizaje: **la construcción del sentido.**

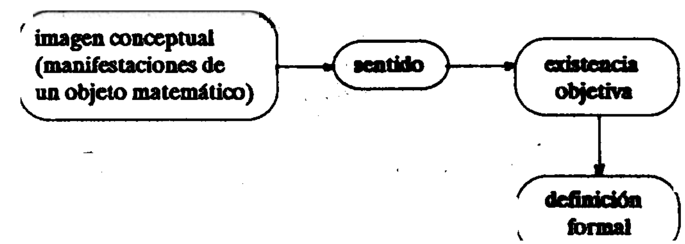
2. Los conceptos -mejor: las **imágenes conceptuales-** son significantes aún en ausencia de una **definición formal.**

Así por ejemplo, cuando Euclides define un punto como aquello que no tiene partes, no está dando una definición formal; nos remite a una imagen conceptual, nos describe un fenómeno.

Los objetos matemáticos -la fenomenología matemática- pueden tener un origen no-material. Por ejemplo, una ecuación no tiene existencia material y sin embargo tiene existencia. La razón es que **tiene sentido y por ello tiene existencia objetiva.**

La manifestación del sentido se da a través de las imágenes conceptuales.

Tenemos así el siguiente esquema:



3. El contexto del descubrimiento está "más cercano" a las organizaciones locales. Raras veces la motivación para un nuevo teorema por ejemplo, proviene de la axiomatización de una disciplina.

   (Notemos que las estructuras como objetos de estudio, y los teoremas como el de Göedel, aparecen en estadios posteriores).

A este respecto nos preguntamos:

Si la investigación sobre lo nuevo (las "zonas de ignorancia") no se da en un contexto formalizado, ¿por qué elegir la P.A.D. como vehículo del aprendizaje?

El aprendizaje no puede juzgarse en términos de rigor sino en términos de construcción de sentido y conceptualización.

Otra posible fuente de dificultades se halla en la falsa identificación de los problemas de la enseñanza con los problemas del aprendizaje.

Subyase a esta identificación la idea de que la **claridad expositiva** establece una forma de isomorfismo entre el mensaje transmitido (por el profesor) y el mensaje decodificado por el estudiante. Es decir, desvirtúa el proceso de comunicación subyacente a la educación.

La decodificación del texto matemático se realiza a partir de la estructura cognoscitiva **del estudiante.** De manera que "la buena exposición", con todas sus virtudes, dista mucho de ser una condición suficiente para el aprendizaje. Cuando se dice que "el texto matemático significa exactamente lo que dice" (expresión favorita de muchos profesores) se desconoce esta realidad.

2. OBJETO MENTAL vs. DEFINICION FORMAL

Muchas de las expresiones que se utilizan en un texto matemático yan han sido manejadas por los estudiantes en cursos anteriores o fuera de contexto matemático. Por ejemplo, el término "límite" y la expresión "tiende hacia". En un cuestionario de auscultación cuyo objeto era explorar **el manejo espontáneo** de estos términos, cuando se pidió que se ilustrara su empleo, se obtuvieron las siguientes respuestas:

> El límite es hasta donde podemos alcanzar
> El límite de la vida es la muerte
> El límite de la velocidad del automóvil es 140 KPH.

Los estudiantes que dieron estas respuestas eran de nuevo ingreso a la universidad. Para ellos, "límite" evoca algo **irrebasable**; lo irrebasable forma parte del **objeto mental** límite. Cuando el estudiante **recibe** (pasivamente) la definición formal del límite, casi siempre surge un **conflicto cognoscitivo** entre el objeto mental (i.e.: la imagen conceptual) y la definición.

De esta forma queda planteado un **problema** didáctico, que consiste en suministrar al estudiante situaciones que pueda explorar y que vayan modificando el objeto mental "límite" hasta hacerlo coherente con su representación formal vía la definición.

En una fase posterior de los cuestionarios citados, se encontraron conflictos -que atribuímos a las discrepancias entre el objeto mental y su definición formal- relacionados con las sucesiones convergentes oscilantes. En ese momento, la imagen conceptual no ha desalojado aún en el estudiante el carácter de "infranqueable", atributo de su objeto mental primitivo "límite". Es imperativo, dentro del proceso educativo reconocer que

LA SICOLOGIA DEL CONCEPTO DEL DEL LIMITE	$\neq$	LA MATEMATICA CONCEPTO DEL LIMITE

(pero de ninguna manera la conclusión ha de ser que la enseñanza/aprendizaje de la matemática está divorciada de la sicología!)

En un segundo cuestionario, cuyo fin era explorar la acción del objeto mental "límite" dentro de un contexto matemático, se pidió a los estudiantes responder a la siguiente pregunta:

¿Es 0.9999.... igual o menor que 1?

Algunas respuestas:

- "**igual** porque la diferencia entre ellos es infinitamente pequeña".
- "**igual** porque **en el** infinito se hace tan cercano 0.9999... al 1 que **pueden considerarse iguales**".

"un poquito menor que 1 pero es lo más cerca que puede estarse de 1 sin que sea 1".

"un poquito menor que 1 aunque la diferencia entre ellos es **infinitamente pequeña**".

Es claro que la imagen conceptual (i.e.: dentro de ese complejo cognoscitivo que hemos llamado "límite") de estos estudiantes subyacen **elementos infinitesimalistas** que son activados por la pregunta. No es vano recordar aquí que en el libro de Cálculo Diferencial de L'Hôpital (¡el primer texto de Cálculo!) uno de los dos principios que sirven de base al desarrollo del texto, es el siguiente:

> Si a una cantidad finita A se le añade (o quita) un infinitesimal α, entonces $A+\alpha$ puede ser reemplazado por A.

Digresión (Histórica)

En la historia del cálculo no encontramos situaciones que exhiban **contradicciones lógicas** que hayan motivado al abandono del modelo del cálculo infinitesimal en favor del modelo aritmético de Weierstrass.

Se dice por ejemplo, que el principio de L'Hôpital que hemos enunciado anteriormente, "obliga" a que sea cero; pero no es así. La contradicción aparente proviene de una interpretación del principio dentro del contexto de la aritmética ordinaria. Hay otra interpretación posible que dota al anunciado de significado (lo hace "explicable") y por tanto de existencia objetiva dentro del cálculo. En efecto, interprétese $A+\alpha$ como una operación realizada en una aritmética ampliada (incluye números ordinarios y números infinitesimales) y cuyo criterio de igualdad es un **criterio de sustitución**.

Así, las "críticas" al modelo euleriano del cálculo, mediante las cuales pretende justificarse su sustitución por el modelo Weierstrassiano del cálculo, son falsas. Las razones de esta sustitución tienen más que ver con la ideología dominante en la comunidad matemática de la época.

(fin de la digresión)

Regresemos a nuestras observaciones sobre los elementos infinitesimalistas en la imagen conceptual de los estudiantes; debemos observar que la complejidad de la situación se hace más tangible, cuando se indaga sobre el sentido de la expresión "tiende hacia". Una respuesta (genuina) fue la siguiente:

"la sucesión 0.9, 0.99, 0.999, etc. tiene 1 como límite pero tiende hacia 0.9999..."

¿Es lícito dentro de los procesos educativos ignorar la realidad cognoscitiva del estudiante? Por supuesto, la respuesta debe ser un contundente NO.

3. INTUICION vs. RIGOR

Es usual en la dinámica de la pedagogía de la exposición, que para motivar al estudiante se presente una "versión intuitiva" del asunto tratado y posteriormente una versión formalizada de lo mismo. Se confunde entonces lo informal con la intuición, la cual forma parte de la estructura cognoscitiva del estudiante.

Por ejemplo, ¿cómo puede el estudiante conciliar la idea de que "la función f es continua cuando su gráfica no se rompe" con la definición formal en términos ε-δ ?, ¿cómo puede conciliar una **imagen global** (la gráfica no se rompe) con la **definición puntual** (ε-δ)?

No se exagera pues una dinámica dentro de la imagen conceptual sino un discurso a un doble nivel que rechaza la intuición en favor de la precisión, en un momento en que no se trata de eso.

La precisión es importante sobre todo al nivel de la lógica del discurso, pero puede funcionar como una obstrucción durante el proceso de aprendizaje.

Las definiciones formales constituyen el punto de partida lógico pero, cognoscitivamente -para el estudiante!- son un punto de llegada; son el resultado de un esfuerzo de organización realizado a partir de la imagen conceptual.

4. LA COMPRENSION DEL CALCULO

Sin pretender ser exhaustivos, establezcamos dos categorías respecto a la comprensión:

1. Comprensión instrumental (Manipulación)

2. Comprensión relacional (conceptualización)

Aunque no están disociadas estas categorías durante el aprendizaje, existen variaciones

en cuanto a sus intensidades. En el curso tradicional de cálculo es más intenso lo instrumental que lo relacional. Pero la búsqueda de la conceptualización se ve obstruida por el esquema formal que se impone al contenido del curso, pues no general sino una ruptura entre las imágenes conceptuales y las definiciones y teoremas formales. ¿Qué hacer ante esta situación de ruptura?

Es una realidad que solo un porcentaje muy pequeño de los estudiantes que llevan el curso de cálculo se especializa en matemáticas. Para la mayoría, es necesario que posea algo más que una comprensión instrumental. Como no es una solución inyectar mayor formalismo -pues en general solo "conseguiría" sistematizar un conocimiento ausente- hace falta crear una alternativa. Para nosotros, tal alternativa es el **modelo de uso** que genere la comprensión relacional a partir de las situaciones propias del estudio del cálculo . Por ejemplo, que genere una mayor comprensión de los algoritmos (numéricos y funcionales) del cálculo: Aquí puede jugar un papel importante el instrumental electrónico, para el estudio de:

- i) Procesos iterativos
- ii) Decimales infinitos y grado de precisión
- iii) Cálculo de raíces con el método de Newton
- iv) Cálculo de raíces por un proceso de bisección del dominio de la función (de paso, esto da significado y por tanto existencia al teorema de Bolzano), etc.

Estas situaciones pueden generar "la coherencia" necesaria entre los objetos mentales y sus descripciones formales, por ejemplo, cuando se habla del concepto de límite siempre "contextualizado". El papel de la definición formal de "límite" puede ser el "guardador" de las diferentes contextualizaciones del campo nocional. Seguramente esto es válido para otros campos nocionales de la matemática. Daremos otros ejemplos más adelante.

Otra característica del modelo de uso es una modificación conciente del criterio de validación típico de los cursos de análisis. En lugar de insistir sobre **la legalización** de los resultados, se trata de exhibir su **legitimidad** (por supuesto, se trata siempre de que lo legítimo adquiera legalidad, no sólo en las matemáticas).

En el modelo de uso, la legitimación de los resultados se trata de construir generando **situaciones de aprendizaje** en las cuales el estudiante comprenda las relaciones (comprensión relacional!) entre los aspectos **aritméticos, geométricos** y **simbólicos** de los campos nocionales propios de las ideas de derivada e integral. Por ejemplo, aritméticamente una integral se obtiene (se calcula) mediante una **sucesión de aproximaciones** (vincúlese este hecho con la versión de completez: "Toda sucesión creciente y acotada es convergente"). Geométricamente, concierne al hecho (fenomenología) que a medida que disminuye la base de los rectángulos, se logra una mejor aproximación del área bajo la curva. El teorema fundamental del Cálculo captura los aspectos simbólicos esenciales de los procesos derivación/integración. Hablamos aquí, no sólo, por supuesto, de la notación, de los **signos** de integral y derivada, sino de la **semántica** de este lenguaje.

Volvemos pues a una situación esencial: **La construcción del sentido.**

Aún en la matemática "elemental" (Aritmética, Geometría)pueden encontrarse muchos ejemplos de **procesos infinitos**, propios del diseño del modelo de uso. (A propósito, el modelo de uso podría llamarse "análisis de los procesos infinitos que aparecen en la matemática elemental"). Por ejemplo, estudio del desarrollo decimal de los números racionales e irracionales o de las fracciones continuas. Quizá todo esto no sea nuevo. A veces es imperativo reflexionar sobre "lo obvio", pues se olvida que si bien el matemático quiere el rigor, quien aprende necesita **la motivación.**

5. SOBRE LA NOCION DE FUNCION (LA HISTORIA EN FUNCION DE LA DIDACTICA)

La concepción axiomático-deductiva moderna se instala en las matemáticas a partir del siglo XIX. La fase más "sintáctica" está modelada en el trabajo de Hilbert.

En nuestras instituciones educativas alcanza una fuerte influencia dicha concepción, aunque ella tiene sus raíces en necesidades científicas de la disciplina no en necesidades didácticas.

Debe decirse empero, que las primeras sistematizaciones del análisis (el trabajo de Cauchy, por ejemplo) tuvieron como una de sus motivaciones (exteriores) la necesidad de producir textos para el sistema de educación superior.

***

Pero ¿Qué ha ocurrido y ocurre en **nuestras** instituciones educativas frente a la instalación de esta versión estructuralista de la matemática?

Veamos: El cálculo ha mostrado sus virtudes, su versatilidad para ser aplicado en otras disciplinas del quehacer científico. Así nació, y llenó las espectativas que sobre él se crearon. El cálculo es el instrumento cuantitativo principal de la ciencia.

Esta importancia ha producido modificaciones en los cursos que le sirven como pre-requisitos y esto dentro de las más diversas **estructuras curriculares.** Desde entonces, se empieza a **enseñar** el concepto de función (nótese que se dice "concepto", no campo nocional) y empiezan también los problemas.

1. La pedagogía de la exposición está al servicio de la presentación de la matemática. No está al servicio del estudiante.

2. En estas condiciones (bajo el dictado de la Pedagogía de la Exposición) "función" recibe un **tratamiento conjuntista**, que **no** corresponde a las necesidades dentro del curso de cálculo. En efecto, las definiciones formales se obtienen después de un proceso a veces muy prolongado -como en el ejemplo que nos ocupa- de un trabajo sobre la imagen conceptual. El resultado es un **concepto estratificado**: en el cálculo, una función **es** una fórmula que representa una relación entre variables; en el análisis real **es** una correspondencia entre números reales; en el álgebra aparece el concepto bajo el vestido de las permutaciones; en teoría de conjuntos es un conjunto de parejas ordenadas y son demonantes sus características de biyección/equipotencia, etc.

No hay ninguna experiencia didáctica -realizada dentro de un sistema educativo concreto -que permita inferir que un estudiante (sobre todo principiante!) sometido a una exposición de alto rigor y generalidad, vaya a desarrollar una mayor asimilación instrumental y relacional cuando sólo se emplea en su curso, uno de los estratos conceptuales de una definición.

Dentro de esta reflexión curricular, uno de los instrumentos de análisis debe ser la **historia del cálculo.** Ella nos dice **cuándo** y **por qué** aparece un campo nocional y nos señala su evolución; propias de esta evolución son las etapas de **uso, descubrimiento, exploración** y **definición formal.**

Un concepto finalmente se instala en el cálculo (en general, en las matemáticas) en la medida en que es **relevante** para el desarrollo.

¿Por qué no tomar la relevancia como un criterior didáctico?

Por ejemplo, no es relevante en un curso de cálculo, introducir una definición formal conjuntista de "función", aun el lenguaje mismo empleado ("conjuntos", "regla de correspondencia") no conjuga con las ideas de movimiento, de cambio continuo y suave, de procesos de acumulación que forman parte de la fenomenología propia del cálculo.

No es extraño escuchar que las dificultades con los tratamientos formales tiene que ver, en esencia, con una (supuesta) "falta de madurez" del estudiante. La historia, empero, suministra ejemplos abundantes de que esto es falso. Por ejemplo, los usuarios del cálculo han continuado usando conciente o inconcientemente, una versión del cálculo euleriano. De allí el **álgebra de diferenciales** (la "dx" de un lado en una ecuación diferencial pasa a dividir a otro lado de la igualdad; tal es el lenguaje).

La reformulación axiomática, rigurosa del cálculo infinitesimal, en manos de Robinson, sólo es comprensible para los lógicos. Es una versión totalmente distinta en espíritu al cálculo euleriano. Didácticamente sería poco inteligente usar esta formulación como un "modelo de uso del cálculo euleriano". El trabajo de Robinson es una formulación de los infinitesimales, construida en el espíritu de la P.A.D. No como una "recuperación" del cálculo infinitesimal clásico.

La matemática no **sólo se inventa**, sino que **se descubre**, inmensa en ese complejo de imágenes mentales que vemos desfilar a lo largo de la historia.

No pueden presentarse de ella sólo los productos finales, pues conincidimos plenamente con Famington cuando afirma, en su historia de la "Ciencia Griega", que:

> "No hay conocimiento científico que no pierda este carácter cuando olvidamos sus orígenes, los problemas de los que es solución y la función para la cual fue producido".