Inducción sobre variable continua*

ZHANG JINGZHON**

En la enseñanza del cálculo elemental, es muy importante la teoría concerniente al sistema de los números reales y su continuidad. Infortunadamente, esto se convierte en dificultad para aquellos estudiantes que no quieren llegar a ser matemáticos, pero que tienen que leer matemáticas por otras razones. Para superar este escollo, se presenta una proposición interesante, la llamada inducción continua.

Para mostrar qué cosa es la inducción continua hagamos una comparación entre ésta y la bien conocida inducción matemática.

Inducción continua:	Inducción matemática:
Asume $P(x)$ como una proposición sobre el real x.	Asume $P(n)$ como una proposición sobre el natural n.
Si:	Si:
(1) Existe un real x_o tal que $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o$.	(1) existe un natural n_o tal que $P(n)$ es verdadera para cada $n < n_o$.
(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$, entonces existe $d_y > 0$ tal que $P(x)$ es verdadera para cualquier $x < y + d_y$,	(2) Si $P(n)$ es verdadera para cada $n < m$, entonces $P(n)$ es verdadera para cada $n < m+1$,
entonces $P(x)$ es verdadera para todo real x.	entonces $P(n)$ es verdadera para todo natural n.

¡Vemos que las dos son muy parecidas!

---

* Tomado de la publicación IC/89/157, International Atomic Energy and UNESCO, International Centre for Theoretical Science, Miramare-Trieste, junio 1989.

** Profesor del Institute of Mathematical Sciences, Chengan, Sichcian, Peoples Reppublic of China.

Surgen enseguida algunas preguntas. ¿La inducción continua es realmente verdadera? ¿Cómo probarla? ¿Cuál es su posición en la teoría de los números reales? ¿Cuál es su utilidad?

Las tres primeras se contestan con el siguiente teorema.

Teorema 1.- La inducción continua (CI) es equivalente al axioma dde Dedekind (DA).

Antes que todo repasemos el axioma de Dedekind

DA. Si el conjunto R de los reales se divide en dos subconjuntos no vacíos L y H tales que $x < y$ para cada $x \in L$ e $y \in H$, entonces ó L tiene máximo ó H tiene mínimo.

Prueba del teorema 1.- Por reducción al absurdo. Supongamos CI verdadera y DA falso y supongamos que R ha sido dividido como en DA pero ni L tiene máximo ni H tiene mínimo.

Hagamos $P(x) \Longleftrightarrow$ "$x \in L$", verificamos ahora las dos condiciones en CI:

(1) Como L es no vacío, existe $x_0 \in L$. Así $x \in L$ para cada $x < x_0$ por definición de L y H.

(2) Si $x \in L$ para cada $x < y$, entonces $y \notin H$ porque H no tiene mínimo. Así que $y \in L$ y existe por lo tanto $y_1 \in L$ con $y_1 > y$ porque L no tiene máximo. Entonces $x \in L$ para cada $x < y_1 = y + d_y$. Por lo tanto $x \in L$ para todo x real por CI. Lo cual es contradictorio porque H es no vacío.

Probemos que DA $\Rightarrow$ CI

Nuevamente por reducción al absurdo. Supongamos DA verdadero y CI falso, y asumamos que existe una proposición $P(x)$ tal que las condiciones (1) y (2) en CI se satisfacen pero $P(x)$ es falsa para algún real x. Sean

$$L = \{t : P(x) \text{ es verdadero para cada } x < t$$
$$H = R - L$$

Evidentemente ambos L y H son no vacíos y $x < y$ para cada $x \in L$ e $y \in H$ por nuestra construcción.

Puesto que DA es verdadero, existe y tal que $(-\infty, y) \subseteq L$ y $(y, \infty) \subseteq H$, es decir $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$ pero falsa para algún $x \in (y, y+d)$ para algún $d > 0$. Esto contradice la condición (2) la cual habíamos aceptado.

Ahora con CI verdadera la podemos elegir como axioma en el conjunto de los números

reales para reemplazar el conocido DA.

Como aplicaciones de CI, damos enseguida una serie de ejemplos.

Ejemplo 1. Si M es un conjunto de números reales no vacío y superiormente acotado, entonces M tiene extremo superior.

Prueba: Por reducción al absurdo. Supongamos que M no tiene extremo superior y sea U el conjunto de todas las cotas superiores de M. Consideremos la proposición, $P(x) \Longleftrightarrow$ "$x \notin U$". Entonces

(1) Como M es no vacío, existe x_0 en M y $P(x)$ es verdadera para todo $x < x_0$

(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$, entonces y no puede ser cota superior de M (de otro modo y sería la mínima cota superior) e.d. existe $y_1 \in M$ tal que $y_1 > y$ y de aquí que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y_1 = y + d$.

Tenemos que $P(x)$ es verdadera para todo real por CI. Esto contradice el que M sea superiormente acotado.

Ejemplo 2. Supongamos que la sucesión numérica $\{a_n\}$ es creciente y acotada. Entonces existe un número real a tal que $\lim a_n = a$.

Prueba: Por contradicción. Supongamos que no existe límite de $\{a_n\}$ y hagamos la proposición $P(x) \Longleftrightarrow$ "$\{a_n\} \cap (x, \infty) \neq \emptyset$" entonces.
(1) $P(x)$ es verdadera para $x < x_0 < x_0 = a_1$.

(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$, entonces

$$\{a_n\} \cap (y, \infty) \neq \emptyset,$$

(De lo contrario $\lim a_n = y$) e.d, existe algún término $a_m > y$ tal que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y + d_y$, con

$$d_y = a_m - y > 0.$$

Por CI, $P(x)$ es verdadera para cada real x. Lo cual contradice la acotación de $\{a_n\}$

Ejemplo 3. Si existe un encajonamiento de intervalos cerrados $\Delta_1 \supseteq \Delta_2 \cdots \Delta_n \supseteq \Delta_{n+1} \supseteq \cdot$ entonces debe existir al menos un número real que pertenece a todo intervalo Δ_n.

Prueba. Por contradicción: Supongamos que no existe un número real que pertenezca a cada intervalo $\Delta_n = [a_n, b_n]$.

Hagamos la proposición $P(x) <=>$ "$(-\infty, x) \cap \{b_n\} = \emptyset$", entonces

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = c_1$
(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$, entonces

$$(y, \infty) \cap \{a_n\} \neq \emptyset$$

(De otro modo, $a_n < y$ e $y < b_n$ para todo $\Delta_n = [a_n, b_n]$

Por lo tanto $P(x)$ es verdadera para cada $y < y+d_y = a_m$, aquí a_m es un término perteneciente a (y, ∞).

Por CI, $P(x)$ es verdadera para todo número real x. Esto es imposible.

Ejemplo 4. Si un intervalo cerrado $[a,b]$ es recubierto por un conjunto de intervalos abiertos $U = \{\Delta_t\}$, entonces existe un conjunto finito de intervalos $\Delta_k \in U$ $k = 1,2,... n$ que recubre el intervalo $[a, b]$

Prueba: Construimos la proposición $P(x) <=> (-\infty, x) \cap [a, b]$ es recubierto por un conjunto finito de intervalos en U.

Tenemos:

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = a$

(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$ e $y \in [a, b]$ (Si $y > b$, la conclusión esperada es obvia), entonces existe un intervalo $\Delta = (\alpha, \beta) \in U$ tal que $y \in (\alpha, \beta)$. Tomando $d_y = 1/2 (\beta - y)$ es fácil comprender que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y+d_y$ por la hipótesis inductiva. Por CI, $P(x)$ es verdadera para todo número real x. Especialmente, tomando $x = b+1$, nuestra proposición está probada.

Ejemplo 5. Si M es un conjunto infinito de puntos contenido en $[a, b]$, existe al menos un punto en $[a, b]$ el cual es punto límite de M.

Prueba: Por reducción al absurdo. Supongamos que no existe un punto límite de M en $[a, b]$. Consideremos la proposición $P(x) <=>$ "$(-\infty, x) \cap M$ es un conjunto finito", tenemos

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = a$

(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$, entonces existe $d > 0$ tal que $(y-d), y+d) \cap M$ es un conjunto finito porque y no es un punto límite de M. Así $P(x)$ es verdadera para cada $x < y + (1/2)d$. Por CI $P(x)$ es verdadera para todo número real x. Tomando $x > b$, tenemos una contradicción.

Ejemplo 6. Supongamos que $f(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$. Si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe c en (a, b) tal que $f(c) = 0$.

Prueba: Por reducción al absurdo. Supongamos $f(x) \neq 0$ para cada $x \in [a, b]$. Sea $f(x) = f(a)$ para $x < a$ y $f(x) = f(b)$ para $x > b$. Sea $P(x)$ la proposición "$f(t) < 0$ para cada $t < x$" tenemos:

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = a$

(2) Si $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$, entonces $f(y) \leq 0$ puesto que $f(x)$ es continua. Por lo supuesto en la reducción al absurdo $f(y) < 0$. Así que existe $d > 0$ tal que $f(x) < 0$ para cada x $(y - d, y + d)$ por cotinuidad. Entonces $P(x)$ es verdadera para cada $x < y + d$. Por CI, $P(x)$ es verdadera para todo número real x. Esto es contrario a la suposición $f(b) > 0$ cuando $x > b$.

Ejemplo 7. Supongamos $f(x)$ una función continua sobre $[a, b]$ entonces existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para cada $x \in [a, b]$.

Prueba. Sea $f(x) = f(a)$ cuando $x < a$ y $f(x) = f(b)$ cuando $x > b$. tomemos la proposición $P(x) <=>$ f es acotada en el intervalo $(-\infty, x)$. Tenemos

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = a$.

(2) Supongamos que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$. Existe $d > 0$ tal que $|f(x)| < |f(y)| + 1$ para cada $x \in (y - d, y + d)$ por continuidad. Así $P(x)$ es verdadera para cada $x < y + d$. Por CI $P(x)$ es verdadera para cada número real x. Esto es lo que queremos.

Ejemplo 8. Supongamos que $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$. Entonces existe $x^* \in [a, b]$ tal que $f(x) < f(x^*)$ para cada $x \in [a, b]$.

Prueba. Usamos reducción al absurdo. Supongamos que f no tiene máximo en $[a, b]$, e.d, para cualquier $x \in [a, b]$ existe $x_1 \in [a, b]$ tal que $f(x) < f(x_1)$. Sea $f(x) = f(a)$ cuando $x < a$ y $f(x) = f(b)$ cuando $x > b$. Considerando la proposición $P(x) <=>$ Existe $c \in [a, b]$ tal que $f(t) < f(c)$ para cada $t < x$, tenemos:

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = a$

(2) Asumamos que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$. Por la suposición en la reducción al absurdo, existe $y_1 \in [a, b]$ tal que $f(y) < f(y_1)$. Así que existe $d > 0$ tal que $f(x) < f(y_1)$ para cada $x \in (y - d, y + d)$ puesto que f es continua.

Por nuestra hipótesis inductiva, existe $c_1 \in [a, b]$ tal que $f(x) < f(c_1)$ para cada $x < y - d/2$. Sea c uno de entre c_1 e y_1 tal que $f(c) = \max \{f(c_1), f(y_1)\}$ entonces $f(x) < f(c)$

para cada $x < y + d$ e.d, $P(x)$ es verdadera para cada $x < y + d$. Por CI $P(x)$ es verdadera para cada número real x. Pero esto es imposible si $x > b$.

Ejemplo 9. Si $f(x)$ es una función continua sobre $[a, b]$, entonces f es uniformemente continua sobre $[a, b]$.

Prueba. Sea $f(x) = f(a)$ cuando $x < a$ y $f(x) = f(b)$ para $x > b$. Dado $\varepsilon > 0$, vamos a probar que existe $d > 0$ tal que $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ cuando $|x_1 - x_2| < d$.
Haciendo la proposición

$P(x) <=>$ "Existe $d_x > 0$ tal que $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ si $|t_1 - t_2| < d_x$ para cada $t_1 < x$ y $t_2 < x$". Tenemos

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_o = a$.

(2) Asumamos que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$. Como $f(x)$ es continua en el punto y, existe $d_1 > 0$ tal que $|f(t) - f(y)| < \varepsilon/2$ cuando $t \in (y - d_1, y + d_1)$ y $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ para cada $t_1, t_2 \in (y - d_1, y + d_1)$. Por nuestra hipótesis inductiva $P(y - d_1/2)$ es verdadera, e.d. existe $d_2 > 0$ tal que $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ cuando $|t_1 - t_2| < d_2$ para $t_1, t_2 \in (-\infty, y - d_1/2)$ Sea $d = \min\{d_1/2, d_2\}$. Es fácil ver que $|f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon$ cuando $|t_1 - t_2| < d$ para cada $t_1, t_2 \in (-\infty, y + d)$. Entonces $P(x)$ es verdadera para cada $y < y + d$. Por CI, $P(x)$ es verdadera para cada número real x. Tenemos la conclusión que queremos cuando $x > b$.

Ejemplo 10. supongamos $f(x)$ función continua en $[a, b]$. Si f es diferenciable en (a, b) y $f'(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$ entonces $f(a) = f(b)$.

Prueba. Es suficiente probar que $f(x)$ es constante en (a, b) por continuidad.

Elegimos dos puntos x_1, x_2, $a < x_1 < x_2 < b$, y sea

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ f(x_1) & \text{si } x < x_1 \\ f(x_2) & \text{si } x > x_2 \end{cases}$$

entonces, $\bar{f}'(x) = 0$ para todo x $(-\infty, \infty)$.

Por reducción al absurdo. Supongamos

$$|f(x_1) - f(x_2)| = M > 0.$$

Hagamos $P(x) <=> |\bar{f}(x) - \bar{f}(x_1)$ $(M|x - x_1|)/(2|x_1 - x_2|)$

Se tiene

(1) $P(x)$ es verdadera para cada $x < x_1$

(2) Supongamos que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y$. Como $\bar{f}'(x) = 0$, existe $d > 0$ tal que

$|\bar{f}(x) - \bar{f}(y)| < M|x - y|/(2|x_1 - x_2|)$ para $x \in (y - d, y + d)$

Por nuestra hipótesis inductiva tenemos

$|\bar{f}(x') - \bar{f}(x_1)| < M|x' - x_1|/ 2|x_1 - x_2|$ para cada $x' < y$

y así que

$|\bar{f}(y) - \bar{f}(x_1)| \leq M|y - x_1|/2|x_1 - x_2$

Entonces para $x \in [y, y + d)$ tenemos

$|\bar{f}(x) - \bar{f}(x_1)| \leq M(|x - y| + |y - x_1|)/(2|x_1 - x_2|) \leq M|x - x_1|/2|x_1 - x_2$

Así que $P(x)$ es verdadera para cada $x < y + d$. Por CI $P(x)$ es verdadera para cada real x, lo cual contradice la suposición en la reducción al absurdo cuando $x = x_2$.

Hemos visto que uno puede probar una serie de proposiciones importantes usando inducción continua de manera muy semejante. Esto es interesante y fácil de captar para los estudiantes que han trabajado con inducción matemática.

Podemos construir una inducción más general que incluye la inducción matemática, la inducción continua y la inducción transfinita.

Definición. Supongamos que $H = \{M_j : j \in D\}$. Si $\bigcup_{j \in D_1} M_j \in H$ (Para cada $D_1 \in D$)

entonces podemos llamar a H una familia inductiva de conjuntos.

Veamos algunos ejemplos de familias inductivas de conjuntos como sigue:

(1) $H_1 = \{M_n : M_n = \{1,2,3 \quad n\}, n = 1,2$

(2) $H_2 = \{M_y : M_y = (-\infty, y), y \in (-\infty, \infty)\}$

3) Sea M un conjunto cualquiera. Tenemos la familia inductiva de conjuntos

$H_3 = \{M_\alpha : M_\alpha = \{\beta : \beta < \alpha \quad \alpha \in M$

(4) Sea S un conjunto simplemente ordenado. Un subconjunto P de S se denomina un pasaje de S, si para cada tres elementos de S, $x < y < z$, tenemos que $y \in P$ cuando $x, z \in P$. Entonces para $c \in S$ fijado

$H_4 = \{ P : P$ es un pasaje de S y $c \in P$

es también una familia inductiva de conjuntos. El siguiente teorema es obvio.

Teorema 2. Suponga $H = \{M_j\}$ una familia inductiva de conjuntos, y M el conjunto máximo en H.

Si $P(\alpha)$ es una proposición sobre $\alpha \in M$, tal que

(1) Existe $M_{\xi_0} \in H$ tal que $P(\alpha)$ es verdadera para todos $\alpha \in M_{\xi_0}$;

(2) Si $P(\alpha)$ es verdadera para cada $\alpha \in M_\xi \neq M$, entonces existe $M_{\xi_1} \in H$, $M_{\xi_1} \supsetneq M_\xi$ tal que $P(\alpha)$ es verdadera para cada $\alpha \in M_{\xi_1}$,

entonces $P(\alpha)$ es verdadera para cada $\alpha \in M$.

En el teorema anterior tendremos la inducción matemática cuando $H = H_1$, la inducción continua cuando $H = H_2$, y la inducción transfinita cuando $H = H_3$. Por lo tanto hay tres inducciones que están integradas bajo una misma forma.

(NOTA: no conocemos otro uso del principio general inductivo distinto a los tres anteriores).