Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 8 No. 2, julio-diciembre 1990

TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA DERIVADAS EN R^N EN PUNTOS CONDICIONADOS

*Luis Enrique Ruiz Hernández**

Resumen. Dados $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$, si $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable tal que

$$f(b)-f(a) = (b-a)\nabla f(\alpha a+\beta b)$$

para todo $a,b \in \mathbb{R}^n$, $a_i \leq b_i$, se demuestra que f es un polinomio en n variables de grado dos si $\alpha = \frac{1}{2}$. De lo contrario f es una forma lineal en n variables.

INTRODUCCION. En [1] (pp.121-131) resolví el análogo generalizado en el Teorema del Valor Medio para Integrales Múltiples del siguiente problema propuesto y resuelto por el Doctor Yu Takeuchi (Universidad Nacional de Colombia) en una conferencia [2] que dictó en esta Universidad (septiembre - 1977):

Dados $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta = 1$, si $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable y f satisface la condición

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha a+\beta b), \tag{1}$$

* Profesor Titular, Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Duitama. Boyacá.

para todo $a, b \in R$, $a < b$, ¿cómo es f?

Usando propiedades de las funciones aditivas el profesor Takeuchi demostró que f es de la forma

$$(2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}f''(0)x^2+f'(0)x+f(0) \ , & \text{si } \alpha = \frac{1}{2}, \\ f'(0)x+f(0) \ , & \text{si } \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

para todo $x \in R$, donde $f(0)$, $f'(0)$ y $f''(0)$ son constantes reales arbitrarias.

Ahora mi propósito aquí es generalizar y resolver este problema para derivadas en R^n: si $f: R^n \to R$ tiene una diferencial en cada punto de R^n y si f satisface la propiedad

$$(3) \qquad f(\mathbf{b})-f(\mathbf{a}) = (\mathbf{b}-\mathbf{a})\nabla f(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}),$$

para todo $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ en R^n, $a_i \leq b_i$, $i = 1,\ldots,n$. ¿cómo es f?

En adelante α y β denotarán reales positivos tales que $\alpha+\beta = 1$; $\mathbf{e}_1 = (1,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0),\ldots,\mathbf{e}_n = (0,\ldots,0,1)$ son los vectores coordenados unitarios en R^n, los demás vectores serán denotados en negrilla minúscula y su i-ésima componente por la misma no en negrilla con subíndice i, así $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n)$ son vectores en R^n. Hacemos $I = \{0,1,2\}$, $I_n = \{1,\ldots,n\}$.

LEMA 1. Si $f: R^n \to R$ tiene una diferenciable en cada punto de R^n $(n \geq 2)$ y si f satisface la propiedad (3) entonces para cada $k \geq 1$, f tiene sus n^k derivadas parciales de orden k continuas en todo R^n.

Demostración. De $-\beta < \alpha$ y la propiedad (3) obtenemos

$$f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{x}-\beta\mathbf{e}_j)$$

$$[(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_j)-(\mathbf{x}-\beta\mathbf{e}_j)]\cdot\nabla f[\alpha(\mathbf{x}-\beta\mathbf{e}_j)+\beta(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_j)],$$

o bien

$$(4) \qquad D_j f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_j)-f(\mathbf{x}-\beta\mathbf{e}_j), \qquad i = 1,\ldots,n$$

para todo $\mathbf{x} \in R^n$. De (4) y la diferenciabilidad de f encontramos que f tiene sus n^1 derivadas parciales de orden 1 continuas en todo R^n. Supongamos que f tiene sus n^i derivadas parciales de orden i continuas en R^n para todo $1 \leq i < k$, y sea $(i_1,\ldots,i_k)$ cualquier k-pla de I_n. De este modo de (4) y por hipótesis de inducción

$$D_{i_k} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_{i_k})-f(\mathbf{x}-\beta\mathbf{e}_{i_k})$$

$$D_{i_1,\ldots,i_{k-1}}(D_{i_k}f(\mathbf{x})) = D_{i,\ldots,i_{k-1}}f(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_{i_k})-D_{i_1,\ldots,i_{k-1}}f(\mathbf{x}-\beta\mathbf{e}_{i_k})$$

así $D_{i_1,\ldots,i_k}f(\mathbf{x})$ existe y es continua en todo R^n para toda k-pla $(i_1,\ldots,i_k)$ de I_n. Concluimos que f tiene sus n^k derivadas parciales de orden k continuas en R^n, para cada $k \geq 1$.

LEMA 2. Si $f: R^n \to R$ tiene una diferencial en cada punto de R^n $(n \geq 2)$ y si f satisface la propiedad (3) entonces para cada $x_1 \in R$ y cada $(x_2,\ldots,x_n) \in R^{n-1}$ las funciones $f_1(x_1;\ ): R^{n-1} \to R$ y $f_2(x_2,\ldots,x_n;\ ): R \to R$

$$(5) \qquad \begin{aligned} f_1(x_1;(y_2,\ldots,y_n)) &= f(x_1,y_2,\ldots,y_n) \ , \quad \text{y} \\ f_2(x_2,\ldots,x_n;y_1) &= f(y_1,x_2,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

son diferenciales en R^{n-1} y R, respectivamente, y satisfacen la propiedad (3).

Demostración. Por el Lema 1 y las relaciones

$$(6) \qquad D_j f_1(x_1;(y_2,\ldots,y_n)) = D_{j+1}f(x_1,y_2,\ldots,y_n) \ , \quad j = 1,\ldots,n-1,$$

y

$$f_2^1(x_2,\ldots,x_n;y_1) = D_1 f(y_1,x_2,\ldots,x_n),$$

las derivadas $D_j f_1(x_1;\ )$, $j = 1,\dots,n-1$ y $f_2(x_2,\dots,x_n;\ )$ existen y son continuas en R^{n-1} y R, por tanto $f_1(x_1;\ )$ y $f_2(x_2,\dots,x_n;\ )$ son diferenciables en R^{n-1} y R. La propiedad (3) de f y (6) nos da

$$f_1(x_1;(b_2,\dots,b_n)) - f_1(x_1;(a_2,\dots,a_n))$$

$$= f(x_1,b_2,\dots,b_n) - f(x_1,a_2,\dots,a_n)$$

$$= [(x_1,b_2,\dots,b_n)-(x_1,a_2,\dots,a_n)]\cdot\nabla f[\alpha(x_1,a_2,\dots,a_n)+\beta(x_1,b_2,\dots,b_n)]$$

$$= (0,b_2-a_2,\dots,b_n-a_n)\cdot\nabla f(x_1,\alpha a_2+\beta b_2,\dots,\alpha a_n+\beta b_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(b_{j+1}-a_{j+1})D_{j+1}f(x_1,\alpha a_2+\beta b_2,\dots,\alpha a_n+\beta b_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(b_{j+1}-a_{j+1})D_j f_1(x_1;\alpha(a_2,\dots,a_n)+\beta(b_2,\dots,b_n))$$

$$= [(b_2,\dots,b_n)-(a_2,\dots,a_n)]\nabla f_1(x_1;\alpha(a_2,\dots,a_n)+\beta(b_2,\dots,b_n)),$$

para todo $a_i \leqslant b_i$, $i = 2,\dots,n$. Es sencillo mostrar que $f_2(x_2,\dots,x_n;\ )$ también satisface (3).

*

OBSERVACION 1. Si $f:R^n \to R$ tiene sus n^k ($k \geqslant 1$) derivadas parciales de orden k continuas en todo R^n entonces

$$D_{i_1,\dots,i_k}f(x) = D_{i_{\rho(1)},\dots,i_{\rho(k)}}f(x),$$

para todo $x \in R^n$, toda k-pla $(i_1,\dots,i_k)$ de I_n y toda permutación ρ de I_k. De aquí la siguiente

DEFINICION 1. Si para cada $(i_1,\dots,i_n) \in I^n$, $S_{i_1,\dots,i_n} = \{k \in I_n \mid i_k \neq 0\}$ y $f:R^n \to R$ tiene sus n^k derivadas parciales de orden k continuas en R^n para $k \geqslant 1$, entonces

(i) Si $S = \{i\ ,\dots,i_k\} \subseteq I_n$ y $|S| = k$ se define

$$D_S f(x) = D_{i_1,\dots,i_k}f(x).$$

(ii) Si $S = \phi$ se definen

$$D_\phi f(x) = f(x),$$

$$\sum_{i\in\phi}(\ )_i = 0, \qquad \prod_{i\in\phi}x_i = 0$$

(iii)

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}f(x)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}} = \begin{cases} f(x) & ,\ \text{si}\ S_{i_1,\dots,i_n} = \phi \\ \dfrac{\partial^{i_{k_1}+\dots+i_{k_{n-p}}}f(x)}{\partial x_{k_1}^{i_{k_1}}\dots\partial x_{k_{n-p}}^{i_{k_{n-p}}}} & ,\ \text{si}\ S_{i_1,\dots,i_n} = \{k_1,\dots,k_{n-\rho}\} \end{cases}$$

OBSERVACION 2. Si $(i_1,\dots,i_n) \in I^n$ y $0 \leqslant i_1+\dots+i_n \leqslant 2$ entonces $|S_{i_1,\dots,i_n}| \leqslant 2$; $S_{i_1,\dots,i_n} = \{p\}$ implica $i_p = 1$ ó $i_p = 2$; $S_{i_1,\dots,i_n} = \{p,q\}$, $p \neq q$ implica $i_p = i_q = 1$, y si

$$\mathcal{I} = \{(i_1,\dots,i_n) \in I^n \mid 0 \leqslant i_1+\dots+i_n \leqslant 2\}$$

entonces

$$\mathcal{I}_0 = \{(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{I} \mid S_{i_1,\dots,i_n} = \phi\} = \{\ (0,\dots,0)\},$$

$$\mathcal{I}_1 = \{(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{I} \mid S_{i_1,\dots,i_n} = \{p\},\quad i_p = 1\}$$

$$= \{(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{I} \mid S_{i_1,\dots,i_n} = \{p\},\quad i_p = 2\}$$

$$= \{(2,0,\dots,0),(0,2,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,2)\}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{\{(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{L} \mid S_{i_1,\dots,i_n} = \{p,q\},\ p \neq q,\ i_p = i_q = 1\}$$

$$= \{(i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{L} \mid (i_1,\dots,i_n) \text{ tiene exactamente dos componentes} = 1 \text{ y las demás} = 0\}$$

$$= \{(1,1,0,\dots,0),(1,0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1,1)\}$$

$$\mathcal{L} = \bigcup_{t=0}^{3} \mathcal{L}_t\ ,\quad \mathcal{L}_s \cap \mathcal{L}_t = \phi \quad \text{si } s \neq t,$$

(7)

$$I^n \sim \mathcal{L} = \{(i_1,\dots,i_n) \in I^n \mid 3 \leqslant i_1+\dots+i_n \leqslant 2n\},$$

y la definición 1,(iii), se reduce en este caso a

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(x)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^t f(x)}{\partial x_p^t}\ , & \text{si } (i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{L}_t\ ,\ t = 0,1,2 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_p \partial x_q}\ , & \text{si } (i_1,\dots,i_n) \in \mathcal{L}_3 \end{cases}$$

*

LEMA 3. Si $n \geqslant 2$ y

$$\text{(9)} \qquad \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I^n - \mathcal{L}} a_{i_1\dots i_n} x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} = 0\ ,$$

para todo $x_k > 0$, donde los $a_{i_1\dots i_n}$ son constantes reales, entonces

$$a_{i_1,\dots,i_n} = 0 \quad \text{para todo } (i_1,\dots,i_n) \in I^n - \mathcal{L}$$

Demostración. Asumiendo $\binom{i}{j} = 0$ para $i < j$ si $(i_1,\dots,i_n) \neq (j_1,\dots,j_n)$ estan en $I^n \sim \mathcal{L}$ y $i_1+\dots+i_n = j_1+\dots+j_n = m$ entonces $i_k < j_k$ para algún k y

$$\binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_k}{j_k}\cdots\binom{i_n}{j_n} = 0$$

Notando que

$$\frac{d}{dx^j}(x^i) = j!\binom{i}{j}x^{i-j}\ , \quad \text{para todo } x > 0,\ j \geqslant 0,$$

y

$$\frac{\partial^m (x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n})}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}} = j_1!\dots j_n!\binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_n}{j_n}x_1^{i_1-j_1}\dots x_n^{i_n-j_n}\ ,$$

para todo $x_k > 0$, calculando $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_n^{j_n}}$ en ambos miembros de (9) obtenemos

$$\sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in I^n \\ i_1+\dots+i_n = m}} a_{i_1\dots i_n}\cdot j_1!\dots j_n!\binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_n}{j_n}x_1^{i_1-j_1}\dots x_n^{i_n-j_n}$$

$$+ \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in I^n\sim\mathcal{L} \\ i_1+\dots+i_n \neq m}} a_{i_1\dots i_n}\cdot j_1!\dots j_n!\binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_n}{j_n}x_1^{i_1-j_1}\dots x_n^{i_n-j_n}$$

$$= a_{j_1\dots j_n}\cdot j_1!\dots j_n! \tag{10}$$

$$+ \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_n)\in I^n\sim\mathcal{L} \\ i_1+\dots+i_n \neq m}} a_{i_1\dots i_n}\cdot j_1!\dots j_n!\binom{i_1}{j_1}\cdots\binom{i_n}{j_n}x_1^{i_1-j_1}\dots x_n^{i_n-j_n} = 0$$

para todo $x \in R^n$, $x_k > 0$, $k = 1,\dots,n$ y toda $(j_1,\dots,j_n) \in I^n \sim \mathcal{L}$ tal que $j_1+\dots+j_n = m$. En particular si $m = 2n$ y $(i_1,\dots,i_n) \in I^n$, $3 \leqslant i_1+\dots+i_n \leqslant 2n-1$ entonces $i_k < j_k$ para algún $k \in I_n$ y $\binom{i_k}{j_k} = 0$ y toda la sumatoria es cero en (10) quedando

$$a_{j_1\dots j_n} = 0\ , \quad \text{para toda } (j_1,\dots,j_n) \in I^n \text{ y } j_1+\dots+j_n = 2n.$$

Para $0 < k < 2n-3$ supongamos que $a_{i_1 \ldots i_n} = 0$ para todo $0 \leqslant h < k$ y toda $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ tal que $i_1 + \ldots + i_n = 2n-h$. Se sigue de (10)

$$
\begin{aligned}
& a_{j_1 \ldots j_n} \cdot j_1! \ldots j_n! \\
& + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n \\ 3\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant 2n-(k+1)}} a_{i_1\ldots i_n} \cdot j_1!\ldots j_n! \binom{i_1}{j_1} \cdots \binom{i_n}{j_n} x_1^{i_1-j_1} \ldots x_n^{i_n-j_n} \\
& + \sum_{h=0}^{k-1} \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n \\ i_1+\ldots+i_n=2n-h}} a_{i_1\ldots i_n} \cdot j_1!\ldots j_n! \binom{i_1}{j_1} \cdots \binom{i_n}{j_n} x_n^{i_1-j_1} \ldots x_n^{i_n-j_n} \\
& = a_{j_1 \ldots j_n} \cdot j_1! \ldots j_n! \\
& + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_n)\in I^n \\ 3\leqslant i_1+\ldots+i_n\leqslant 2n-(k+1)}} a_{i_1\ldots i_n} \cdot j_1!\ldots j_n! \binom{i_1}{j_1} \cdots \binom{i_n}{j_n} x_1^{i_1-j_1} \ldots x_n^{i_n-j_n} = 0
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Para todo $x \in \mathrm{R}^n$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ y toda $(j_1, \ldots, j_n) \in I^n$ tal que $j_1 + \ldots + j_n = 2n-k$. Pero entonces $(i_1, \ldots, i_n) \in I^n$ y $3 \leqslant i_1 + \ldots + i_n \leqslant 2n-(k+1)$ implican $i_p < j_p$ para algún $p \in I^n$, y $\binom{i_p}{j_p} = 0$ y toda la sumatoria es cero en (11) quedando

(12) $\quad a_{j_1 \ldots j_n} = 0 \quad$ para toda $(j_1, \ldots, j_n) \in I^n$, $j_1 + \ldots + j_n = 2n-k$,

concluyendo por inducción que (12) se cumple para todo $k = 0, 1, \ldots, 2n-3$.

TEOREMA 1. Si $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ tiene una diferencial en cada punto de R^n $(n \geqslant 1)$ y si f satisface la propiedad (3) entonces,

$$
f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_k^2} x_k^2 + \sum_{\substack{S \subseteq I_n \\ |S| \leqslant 2}} D_S f(0) \prod_{i \in S} x_i, & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_k} x_k + f(0) & , \text{ si } \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases}
$$

Además f satisface (3) para todo $a, b \in \mathrm{R}^n$.

Demostración. Según (1) y (2) el Teorema 1 se cumple para $n = 1$. Para n arbitrario pero fijo $\geqslant 2$ supongamos $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ satisfaciendo las hipótesis del Teorema 1 y, bajo las mismas hipótesis, que todo campo escalar $F : \mathrm{R}^\ell \to \mathrm{R}$, $1 \leqslant \ell < n$ satisface las relaciones

$$
F(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{(i_1,\ldots,i_\ell)\in I^\ell} \frac{1}{i_1! \ldots i_\ell!} \cdot \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_\ell} F(0)}{\partial x_1^{i_1} \ldots x_\ell^{i_\ell}} x_1^{i_1} \ldots x_\ell^{i_\ell}, & \text{si } \alpha = \frac{1}{2} \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial F(0)}{\partial x_k} x_k + F(0) & , \text{ si } \alpha \neq \frac{1}{2} \end{cases}
$$

para todo $x \in \mathrm{R}^\ell$. Por el Lema 2 para cada $x_1 \in \mathbb{R}$ y cada $(x_2, \ldots, x_n) \in \mathrm{R}^{n-1}$ los campos escalares $f_1(x_1;\ ) : \mathrm{R}^{n-1} \to \mathrm{R}$ y $f_2(x_2, \ldots, x_n;\ ) : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ definidos en (5) satisfacen las hipótesis del Teorema 1.

I. Sea $\alpha = \frac{1}{2}$

Por (1) y (2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_2(x_2, \ldots, x_n; x_1) = \sum_{i_1=0}^{2} \frac{1}{i_1!} f_2^{(i_1)}(x_2, \ldots, x_n; 0) x_1^{i_1} \\
&= \sum_{i_1=0}^{2} \frac{1}{i_1!} \cdot \frac{\partial^{i_1} f}{\partial x_1^{i_1}} (0, x_2, \ldots, x_n) x_1^{i_1}, \text{ para todo } x_1 \in \mathrm{R},
\end{aligned}
$$

de donde

$$\frac{\partial^{i_2+\dots+i_n} f(x)}{\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}} = \sum_{i_1=0}^{2} \frac{1}{i_1!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}(0,x_2,\dots,x_n)\,x_1^{i_1},$$

para todo $x \in R^n$. En particular

$$\frac{\partial^{i_2+\dots+i_n} f}{\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}}(x_1,0,\dots,0) = \sum_{i_1=0}^{2}\frac{1}{i_1!}\,\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial_1^{i_1}\dots\partial_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}$$

para todo $x_1 \in R$. De esta expresión y la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
f(x) &= f_1(x_1;(x_2,\dots,x_n))\\
&= \sum_{i_2=0}^{2}\cdots\sum_{i_n=0}^{2}\frac{1}{i_2!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_2+\dots+i_n} f_1(x_1;0)}{\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}\\
&= \sum_{i_2=0}^{2}\cdots\sum_{i_n=0}^{2}\frac{1}{i_2!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_2+\dots+i_n} f(x_1,0,\dots,0)}{\partial x_2^{i_2}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}\\
&= \sum_{i_2=0}^{2}\quad\sum_{i_n=0}^{2}\frac{1}{i_2!\dots i_n!}\left\{\sum_{i_1=0}^{2}\frac{1}{i_1!}\,\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\right\}x_2^{i_2}\dots x_n^{i_n}\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I^n}\frac{1}{i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}}\frac{1}{i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\\
&\quad+\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I^n-\mathcal{I}}\frac{1}{i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n},
\end{aligned}\tag{13}$$

Para todo $x \in R^n$ y (13) se cumple para todo $n \geq 1$. Entonces

$$x_k D_k f(\tfrac{1}{2}x) = \sum_{i_1=0}^{2}\cdots\sum_{i_n=0}^{2}\frac{2i_k}{i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i}\dots\partial x_n^{i_n}}\cdot\frac{x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}}{2^{i_1+\dots i_n}}$$

$k = 1,\dots,n,$

$$(x-0)\nabla f(\tfrac{1}{2}\,0+\tfrac{1}{2}\,x)$$
$$= \sum_{i_1=0}^{2}\cdots\sum_{i_n=0}^{2}\frac{2(i_1+\dots+i_n)}{2^{i_1+\dots+i_n}\,i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n},$$

y, por la propiedad (3) impuesta a f

$$\begin{aligned}
&f(x)-f(0)-(x-0)\nabla f(\tfrac{1}{2}\,0+\tfrac{1}{2}\,x)\\
&= \sum_{i_1=0}^{2}\cdots\sum_{i_1=0}^{2}\frac{2^{i_1+\dots+i_n}-2(i_1+\dots+i_n)}{2^{i_1+\dots+i_n}\,i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}-f(0)\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}}\frac{2^{i_1+\dots+i_n}-2(i_1+\dots+i_n)}{2^{i_1+\dots+i_n}\,i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}-f(0)\\
&\quad+\sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I^n\sim\mathcal{I}}\frac{2^{i_1+\dots+i_n}-2(i_1+\dots+i_n)}{2^{i_1+\dots+i_n}\,i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\\
&= \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in I^n\sim\mathcal{I}}\frac{2^{i_1+\dots+i_n}-2(i_1+\dots+i_n)}{2^{i_1+\dots+i_n}\,i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n} = 0
\end{aligned}$$

para todo $x \in R$, $x_k > 0$, $k = 1,\dots,n$ y, dado que $2^m = 2m$ sólo se cumple para $m = 1$ ó $m = 2$. Por tanto el Lema 3 arroja

$$\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}} = 0,\quad \text{para todo } (i_1,\dots,i_n) \in I^n\sim\mathcal{I},$$

que junto con (7) y (8) reduce (13) a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{t=0}^{3}\ \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathcal{I}_t}\frac{1}{i_1!\dots i_n!}\cdot\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n} f(0)}{\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_n^{i_n}}\,x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}\\
&= f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f(0)}{\partial x_k}\,x_k+\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_k^2}\,x_k^2\\
&\quad+\sum_{\substack{\{p,q\}\subseteq I_n\\ p\neq q}}\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p\partial x_q}\,x_p\,x_q,
\end{aligned}\tag{14}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_k^2}\, x_k^2 + \sum_{S=\phi} \mathcal{D}_S f(0) \prod_{k\in S} x_k$$

$$+ \sum_{\substack{S\subseteq I_n \\ |S|=1}} \mathcal{D}_S f(0) \prod_{k\in S} x_k + \sum_{\substack{S\subseteq I_n \\ |S|=2}} \mathcal{D}_S f(0) \prod_{k\in S} x_k$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_k^2}\, x_k^2 + \sum_{\substack{S\subseteq I_n \\ |S|<2}} \mathcal{D}_S f(0) \prod_{k\in S} x_k$$

para todo $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$.

Sean $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ arbitrarios en R^n y

$$A = \{(h,k) \in I_n^2 \mid h < k\}, \quad \mathcal{F} = \{S \mid S \subseteq I_n \text{ y } |S| = 2\},$$

y

$$w_{pq} = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}\,(b_p b_q - a_p a_q).$$

Entonces las relaciones

$$A \cup A^{-1} = \bigcup_{k=1}^{n} \{h\}\times(I_n \sim \{h\}), \quad w_{pq} = w_{qp} \qquad \text{(Lema 1)},$$

$$\{w_{pq} \mid (p,q) \in A\} = \{w_{pq} \mid \{p,q\} \in \mathcal{F}\},$$

implican

$$\tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \sum_{q\in I_n\sim\{p\}} w_{pq} = \tfrac{1}{2}\left\{\sum_{q\in I_n\sim\{1\}} w_{1,q} + \dots + \sum_{q\in I_n\sim\{n\}} w_{n,q}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\sum_{(1,q)\in\{1\}\times(I_n\sim\{1\})} w_{1,q} + \dots + \sum_{(n,q)\in\{n\}\times(I_n\sim\{n\})} w_{n,q}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_{(p,q)\in\bigcup_{h=1}^{n}\{h\}\times(I_n\sim\{h\})} w_{p,q}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\sum_{(p,q)\in A} w_{p,q} + \sum_{(p,q)\in A^{-1}} w_{p,q}\right\} = \tfrac{1}{2}\left\{\sum_{(p,q)\in A} w_{p,q} + \sum_{(p,q)\in A^{-1}} w_{q,p}\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{\sum_{(p,q)\in A} w_{p,q} + \sum_{(q,p)\in A} w_{q,p}\right\} = \sum_{(p,q)\in A} w_{p,q} + \sum_{\{p,q\}\in\mathcal{F}} w_{p,q} \qquad (15)$$

Derivando en ambos miembros de (14),

$$\mathcal{D}_p f(x) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p^2}\, x_p + \sum_{q\in I_n\sim\{p\}} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}\, x_q ,$$

$$\mathcal{D}_p f(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_p} + \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x^2}\cdot\frac{a_p+b_p}{2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{q\in I_n\sim\{p\}} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}\,(a_q + b_q)$$

$$(b_p - a_p)\mathcal{D}_p f(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_p}(b_p - a_p) + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p^2}(b_p^2 - a_p^2)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{q\in I_n\sim\{p\}} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}\,(a_q + b_q)(b_p - a_p),$$

y así de acuerdo a (15).

$$(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\nabla f(\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_p}(b_p - a_p) + \tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p^2}(b_p^2 - a_p^2)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q\in I_n\sim\{p\}} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}\{(a_q b_p - a_p b_q) + (b_p b_q - a_p a_q)\}$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_p}(b_p - a_p) + \tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p^2}(b_p^2 - a_p^2)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q\in I_n\sim\{p\}} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}(b_p b_q - a_p a_q)$$

$$= \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_p}(b_p - a_p) + \tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p^2}(b_p^2 - a_p^2)$$

$$+ \sum_{\substack{\{p,q\}\subseteq I_n \\ p\neq q}} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_p \partial x_q}(b_p b_q - a_p a_q) = f(b) - f(a)$$

II. Sea $\alpha \neq \tfrac{1}{2}$

Por (1) y (2)

$$f(x) = f_2(x_2,\ldots,x_n;x_1) = f_2^1(x_2,\ldots,x_n;0)x_1 + f_2(x_2,\ldots,x_n;0)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(0,x_2,\ldots,x_n)x_1 + f(0,x_2,\ldots,x_n), \quad \text{para todo } x_1 \in \mathbb{R}.$$

Consecuentemente

$$f(x_1,0,\ldots,0) = \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}x_1 + f(0), \quad y$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f(0,x_2,\ldots,x_n)}{\partial x_1 \partial x_k}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_k}(0,x_2,\ldots,x_n),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $k = 2,\ldots,n$ y, en particular

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,0,\ldots,0) = \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_1 + \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}, \quad x_1 \in \mathbb{R},\ k = 2,\ldots,n.$$

De aquí y por hipótesis de inducción sobre f_1

$$f(x) = f_1(x_1;(x_2,\ldots,x_n)) = \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f_1(x_1;0)}{\partial x_k}x_k + f_1(x_1;0)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1,0,\ldots,0)x_k + f(x_1,0,\ldots,0)$$

$$= \sum_{k=2}^{n}\left\{\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_1 + \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}\right\}x_k + \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}x_1 + f(0)$$

$$= x_1\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}x_k + f(0), \tag{16}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y (16) se cumple para todo $n \geqslant 2$. Así

$$D_1 f(\alpha 0 + \beta x) = \beta\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_k + \frac{\partial f(0)}{\partial x_1}$$

$$D_k f(\alpha 0 + \beta x) = \beta x_1 \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k} + \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}, \qquad k = 2,\ldots,n$$

$$(x-0)\nabla f(\alpha 0 + \beta x) = 2\beta x_1 \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}x_k$$

y por la propiedad (3) impuesta a f

$$f(x) - f(0) - (x-0)\nabla f(\alpha 0 + \beta x)$$

$$= (1-2\beta)x_1 \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_k = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k > 0$, $k = 1,\ldots,n$; y dado que $\beta \neq \tfrac{1}{2}$ entonces

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k}x_k = 0, \quad \text{para todo } x_k > 0,\ k = 2,\ldots,n$$

y calculando $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en ambos miembros aparece $\frac{\partial^2 f(0)}{\partial x_1 \partial x_k} = 0$, $k = 2,\ldots,n$, reduciendo (16) a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(0)}{\partial x_k}x_k + f(0),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En este caso es sencillo ver que f satisface la propiedad (3) para todo $a,b \in \mathbb{R}^n$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Ruiz Hernández, Luis Enrique, "Teorema del Valor Medio para Integrales Múltiples en Puntos Condicionados", *Lecturas Matemáticas*, Vol.X, Nº 1-2-3 (1989), Sociedad Colombiana de Matemáticas.

[2] Yu, Takeuchi, *Aplicación de la Función Aditiva*, Monografía , Editorial U.P.T.C., Tunja, Septiembre 1977.

Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica y
Tecnológica de Colombia.
DUITAMA, *Boyacá*
COLOMBIA S.A.