

Las conjeturas de Ramanujan sobre las falsas funciones Theta*

IVAN STEWART **

Una de las personas menos usuales en los anales de la investigación matemática es Srinivasa Ramanujan, un matemático autodidacta nacido en la India, cuya muerte prematura originó una rica herencia de teoremas sin demostrar. Ramanujan sobresalió en un campo muy particular: la manipulación de fórmulas. A pesar de la tendencia a presentar sus resultados sin demostración -de las cuales en algunos casos se duda de que él poseyera alguna que pudiera ser aceptada como tal- tenía una misteriosa habilidad para llegar hasta el corazón del asunto. Con el paso de los años muchas de sus afirmaciones han sido demostradas rigurosamente aunque casi nunca de manera fácil. El ejemplo más reciente, "las conjeturas sobre las falsas funciones theta", es especialmente llamativo porque tales resultados fueron presentados por Ramanujan en su correspondencia final con su colaborador Godfrey H. Hardy. Las conjeturas han sido demostradas recientemente por Dean Hickerson (*Invent. Math.* 94, 639-660; 1988) siguiendo el trabajo fundamental de George Andrews y F.G. Garvan (*Adv. Maths*, 73, 224-225; 1979).

Las funciones theta, que fueron profundamente investigadas por Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), aparecieron durante el siglo XIX y pronto se convirtieron en una importante área de investigación. Los intentos para calcular la longitud de cualquier arco de elipse utilizando cálculo integral conducen a expresiones aparentemente simples que sin embargo no pueden reducirse a una integral explícita en términos de funciones conocidas, tales como polinomios o funciones trigonométricas. La razón para tal resultado consiste en que estas integrales requieren una especie verdadera-

* Tomado de NATURE, Vol. 339, junio de 1989

** Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, UK.

mente nueva de funciones: las llamadas "elípticas". En cierto sentido las funciones elípticas son generalizaciones de las trigonométricas, ya que una elipse es una circunferencia generalizada y el concepto de longitud de arco de circunferencias conlleva trigonometría. Pero tienen una propiedad matemática más profunda: son doblemente periódicas, es decir, tienen dos períodos independientes que son, en general, números complejos no reales. Esta propiedad las particulariza y las presenta como algo de la matemática pura digno del más serio estudio, mientras que sus múltiples aplicaciones en problemas de Teoría de Números y Dinámica las hacen lo suficientemente útiles como para merecer ser conservadas en el medio competitivo. Aunque tales funciones prácticamente desaparecieron de los cursos de Matemáticas de pregrado, permanecen importantes en la investigación de frontera.

Jacobi introdujo cuatro funciones asociadas, las funciones theta, que en las palabras de Morris Kline (*Mathematical Thought from ancient to Modern Times*; Oxford University Press, 1972) son "los más simples elementos a partir de los cuales pueden construirse las funciones elípticas". También obtuvo para ellas expresiones en forma de series infinitas y productos infinitos, y demostró unas cuantas identidades sobreesalientes.

La última carta de Ramanujan a Hardy (S. Ramanujan in *Collected Papers*, 354-355; Cambridge University Press, 1927) presenta diez nuevas funciones, en dos grupos de cinco. Están definidas por series que en cierta forma son similares a las de Jacobi, y Ramanujan afirma que éstas comparten muchas propiedades análogas aunque, como de costumbre, no da demostraciones. De acuerdo con esto se las conoce como **las falsas funciones theta** y se dice que son "de quinto orden" para distinguirlas de las funciones relacionadas que se encuentran por doquier en los trabajos de Ramanujan.

Pero ¿son realmente falsas funciones theta y no algunas de las funciones theta de Jacobi cubiertas por un impenetrable disfraz? ¿Verdaderas falsedades y no falsas falsedades? Esta es una pregunta sutil pero importante. Si las falsas funciones theta de Ramanujan son realmente theta, inmediatamente pierden todo su valor. Es claro que combinaciones caprichosas de funciones theta se comportan como funciones theta. Pero así como con ciertas falsificaciones de obras de arte el artista original pasó de moda y el falsificador adquirió notoriedad, sólo una genuina falsedad es de interés. Para decirlo de otra manera: las funciones theta son de interés y las falsas funciones theta comparten sus más importantes propiedades, luego si éstas son realmente algo nuevo también son de interés.

Y es aquí donde aparecen las conjeturas sobre las falsas funciones theta. Ramanujan anotó sus resultados en una serie de libretas de apuntes de las cuales una desapareció temporalmente, convirtiéndose en la romántica "libreta perdida", para luego aparecer sana y salva. Siguiendo un trabajo previo de G.N. Watson, George Andrews descubrió en la libreta perdida una fórmula que, de ser cierta, significa que las falsas funciones theta son genuinas falsificaciones. En su trabajo con Garvan mencionado previamente, Andrews muestra que esta fórmula es equivalente a dos proposiciones algo complicadas de la Teoría de Números, concernientes a las particiones de un número entero

(las formas de escribirlo como suma de enteros menores). Para mayores detalles debe consultarse al trabajo original.

Hickerson ha demostrado ahora estas conjeturas teórico-numéricas, de manera que las falsas funciones theta son realmente nuevas funciones, merecedoras de estudios más profundos. La demostración conlleva manipulaciones de series infinitas, tan delicadas que hubieran deleitado a Ramanujan. La asombrosa complejidad de la demostración resalta, una vez más, la profundidad del genio de Ramanujan. Es muy difícil ver cómo alguien pudo haber alcanzado tales resultados sin dejarse enredar por la maraña de los pequeños detalles. Hickerson ha extendido sus métodos (*Invent. Math.* 94, 661-667; 1988) para acometer las falsas funciones theta de séptimo orden, también introducidas por Ramanujan e igualmente enigmáticas. También, éstas resultan ser genuinamente falsas.

Ramanujan fue el hombre-fórmula por excelencia, realizando su trabajo en un período en que las fórmulas estaban fuera de moda. El hoy renovado énfasis en la combinatoria, inspirado en parte en la naturaleza digital del computador, ha provocado un renovado interés en las manipulaciones convencionales. Las semiolvidadas ideas de Srinivasa Ramanujan están respirando nueva vida dentro de la Teoría de Números y la Combinatoria.