

Áreas comunes de Ingeniería y Matemáticas indicadas por la Tecnología*

JUAN BENAVIDES ESTEVEZ **

1. GENERALIDADES

Hace más de dos siglos Mathew Boulton le anunció a la humanidad: “Vendo lo que el mundo entero quiere: energía”. Este anuncio significaba que la firma Boulton y Watt estaba en posesión de una máquina de vapor de eficiencia suficiente como para convertirse en el elemento técnico sobre el que se fundamentó la “Revolución Industrial”, cambiándose el carácter de la sociedad y la economía de occidente. Desde ese instante el bienestar de las naciones ha estado altamente correlacionado con el uso de las máquinas que poseen como insumo motriz la energía, representando el uso de ésta una medida de desarrollo y poder.

Feigenbaum y McCorduck (1) anotan que en octubre de 1981 Japón le anunció al mundo que la Industria de la computación (en su versión de punta, la inteligencia Artificial) se había convertido en prioridad estratégica nacional. A través del Ministerio de Industria y Comercio Internacional se inició en 1982 un detallado e impresionante plan de 10 años destinado a construir máquinas de Quinta Generación en las que el insumo básico no es información como en las demás, sino conocimiento: este anuncio significa -independientemente del éxito del Plan Japonés-:

a.- Que la humanidad entró en una fase tecnológica en la que predomina el conocimiento como bien económico.

* Ponencia presentada al XIII Congreso Nacional de Matemáticas, Bogotá D. E. Julio 27 a Agosto de 1987.

** Profesor de la U. del Tolima, Ibagué

- b.- Que la posesión de conocimiento procesable por máquinas pasa a jugar en las relaciones internacionales de poder un papel similar al que jugó la energía en los dos siglos pasados.
- c.- Que el computador es la máquina de la industria nacional del conocimiento, así como las máquina-herramienta son las naturales en la industria de la metalurgia, posibilitando la creación de valor al transformar las construcciones mentales de los trabajadores del conocimiento, en analogía con la máquina de vapor, amplificadora de la habilidad productiva de los obreros manuales.
- d.- Que las disciplinas matemáticas de lo complejo, de las cuales la computación es la punta del iceberg, se encuentran en una fase dinámica de desarrollo, y es de esperar en el mediano plazo un vigoroso flujo de avances en el cual jugarán un papel dominante Ingenieros y Matemáticos, la pareja de gremios a los que va dirigida esta ponencia.

II. RASGOS DE LAS MATEMATICAS DE LO COMPLEJO

Las ciencias de lo **complejo** y lo **artificial** (tomando prestado este último término de **H. Simon** (2) aparecieron, como cualquier otra ciencia, por la acción de externalidades aplicadas al cuerpo de disciplinas existentes en un instante adecuado, surgiendo de esta interacción nuevas áreas de estudio con enfoque, objetivos y métodos propios. Para el caso, la II Guerra Mundial y la necesidad de gestión de grandes complejos productivos se confabularon para darle estructura, en forma de disciplinas, a dos percepciones que se daban de tiempo atrás en la ciencia: la de que los niveles superiores de organización (i.e biología) no eran explicables sólo por la reducción a los niveles básicos (i.e. Física), como postulara **Comte**, y la de insuficiencia de teorías construídas, examinando los fenómenos por partes, en aislamiento y estatismo para dar cuenta de procesos cambiantes y ricamente conectados con su medio. Son frutos de este período de interacción sociedad-ciencia: la teoría general de sistemas, la teoría de control y comunicación de **Wiener** (cibernética), la teoría de investigación operacional (optimización), la teoría de computación, para mencionar sólo las más relacionadas con las matemáticas. Las matemáticas de lo complejo:

- a.- Rescatan la forma de pensamiento sintético, pues su hilo conductor es la noción de sistema;
- b.- Toman conceptos de las estructuras fundamentales lógicas, de orden, topológicas y algebraicas-, poseedoras de un carácter estático, pero las aplican en un contexto dinámico; así, la expresión:

$$n: - n + 1;$$

es un proceso: se reemplaza una entidad que existe por una que no existe todavía (3);

- c.- Han dado origen a un intenso trabajo en representaciones finitas (léase modelos discretos), que son en últimas las posibles de manejar real y explícitamente; de esta forma las matemáticas discretas han pasado a jugar por lo menos un papel por lo menos igual al que ha tenido el Cálculo Diferencial en la tecnología.
- d.- Como subproducto técnico han dado origen a una disciplina complementaria a todas ellas -la construcción de modelos-; como subproducto epistemológico han conducido a una valoración del papel de las soluciones aproximadas.
- e.- Poseen un conjunto de sub-áreas de trabajo que en un plazo muy corto se han consolidado como disciplinas formales, presionadas por las aplicaciones (i.e. autómatas, programación lineal, etc.).

III. LA RELACION INGENIERIA - MATEMATICAS EN COLOMBIA

En lo concerniente al tema de esta ponencia, la Ingeniería (Eléctrica y de Computación principalmente) tienen una pequeña experiencia. Las labores cotidianas de buena parte de Ingenieros de estas dos especialidades, ante un escaso desarrollo industrial y tecnológico, tendería a demostrar que no deben dictarse matemáticas en Ingeniería. De hecho un pequeño pero importante porcentaje de ingenieros hace propaganda a una Ingeniería de tipo "práctico". Por otra parte, las matemáticas de lo complejo no han conmocionado a los Departamentos de Matemáticas, como ha sido la experiencia mundial. Aunque por supuesto, el atraso científico general también tiene aquí su peso, el aspecto más notorio es el desconocimiento de la producción matemática dispersa en publicaciones periódicas de Ingeniería. **Garrett Birkhoff** ha discutido lo negativo que ha sido para las matemáticas la fuerza del desconocimiento; por ello considera acertadamente que temas de la física matemática no han ingresado a las matemáticas por la errada percepción de que pertenecen a un dominio foráneo (la física); por lo mismo ha planteado (década de los 70) la necesidad de que los matemáticos no perciban en la computación tan solo la forma (fenómeno tecnológico) (4). Se sigue que, desde dos áreas de trabajo, una nueva y no convencional fuente de aplicaciones e investigación teórica es impulsada por esfuerzos insulares.

IV. PROPUESTAS

IV. 1. Propuesta Institucional (mediano plazo). Existen recursos humanos para organizar un Instituto de Investigación en Matemáticas de/en C., y C. -O. (computación, control y optimización); esta propuesta no posee originalidad alguna: hace más de dos décadas se fundó en Francia el INRIA (Instituto de Investigación en Informática y Automática), cuyo fin es realizar investigación matemática fundamental, y en un país del Tercer Mundo como México, para citar un caso más cercano, funciona en la UNAM el Instituto de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Sistemas. Cabe agregar que

la investigación fundamental en matemáticas no es una actividad que se pueda calificar de costosa.

IV.2. Propuesta de Trabajo (Corto plazo). Existen temas de C. y C. -O. ya consolidados (textos formales + publicaciones internacionales periódicas) que por su relevancia en el contexto planteado deberían ingresar en la formación académica de matemáticos e ingenieros. En primer término las matemáticas finitas deben adquirir el status exigido por las circunstancias. No es sencillo pero si posible de mejorar y/o introducir la docencia de estos temas. La propuesta, que se complementa con los textos y materiales referenciados, se limita a identificar las subáreas básicas, entendiéndose que un plan detallado es fruto de discusión en equipo. Construyendo un esquema dual, se dictaría en matemáticas principalmente las bases de lo que se asume deberían ser cursos regulares en Ingeniería Eléctrica y de Computación (suposición de validez parcial), y se dictarían estas, tópicos especiales de estructuras fundamentales con el nivel correspondiente.

En matemáticas debería existir campo para que un estudiante de pregrado siguiera una de estas dos líneas: C.: algoritmos, lógicas y programación lógica, combinatoria y grafos, autómatas y lenguajes formales, computabilidad y funciones recursivas. C. -O.: teoría básica de control, programación lineal y no lineal, programación dinámica y control óptimo.

Observaciones en la línea de computación:

* **Algoritmos:** Se debe en buena parte a Donald Knuth el haber enfatizado que la ciencia de la computación estudia los algoritmos (Concepto más fundamental que máquina o lenguaje), y que las computadoras y los algoritmos no tienen que ver con la computación de números tan sólo, sino con el procesamiento simbólico en general (5). Una introducción conveniente para matemáticos debería enseñar en primer término, las buenas técnicas de estructuración de algoritmos (6), (7), (8), a través de temas de relevancia computacional como clasificación (sorting), estructura de datos (pilas, listas, etc.), aritmética entera y polinomial, transformada rápida de Fourier (algunos de estos temas sugeridos por J. Schwartz (9), con un texto como el de Aho, Hopcroft, Ullman (10), o con los de Knuth (11). En segundo término debería adquirirse una clara visión del proceso de programación en sus aspectos de depuración (debugging), confiabilidad, comparación de eficiencias, expansión, y concepto del ciclo de vida de un procedimiento. Un trabajo en un lenguaje de "buena procedencia" como C (12) sirve bien a estos propósitos.

* **Lógicas y Programación Lógica.** El auge de las lógicas proviene de dos fuentes. La primera es la formalización del modelo relacionado de las bases de datos, donde empieza a hacerse uso sistemático del álgebra relacional, la lógica de orden 1 y su derivación (cálculo de predicados) (13). La segunda fuente es el ímpetu investigativo en representación simbólica del conocimiento y del razonamiento proveniente de la Inteligencia Artificial. Una de las ramas más activas de ésta es el desarrollo de Sistemas

Expertos (programas que simulan el comportamiento de un experto en un campo profesional, realizando inferencias sobre conocimientos debidamente estructurados (base de conocimiento), dotado de conocimientos que admiten la incorporación de lo aprendido (base de hechos). Allí, juega un papel importante la idea de Emil Post de plantear la solución de problemas de índole deductiva por medio de técnica de los Sistemas de Producción. Se trata en últimas de extraer todas las posibilidades del modus ponens y del modus tollens, problema atacado con lógica de orden 1, lógica modal, lógica posibilista y lógica difusa (fuzzy), las más mencionadas en la literatura. En un curso introductorio debiera fundamentarse en primer término la lógica de orden -O. En segundo término, presentar críticamente los orígenes y puntos de partida de las otras lógicas (14). En tercer término, aprenderse los fundamentos de PROLOG (PROgraming in LOGic), lenguaje basado en la fórmula clausal de Horn de la lógica (15). Entre PROLOG y LISP (16), los dos lenguajes más usados en Inteligencia Artificial, los japoneses han elegido al primero como el lenguaje de máquina de los computadores de quinta generación: tal es su importancia estratégica.

* **Combinatoria y Grafos.** Estudiar estos dos temas conjuntamente es una buena manera de introducir el tema de complejidad computacional (17). Clasificar una lista de n elementos ordenables con el método bubble sort requiere $O(n^2)$ comparaciones. El método heapsort requiere $O(n \log(n))$ comparaciones. El oficio de la combinatoria consiste en, dado un algoritmo sobre estructuras contables, indagar por la existencia de otro que realice menos operaciones en promedio que resuelva el mismo problema, situación afirmativa en el ejemplo mencionado. La explosión combinatoria de algunas situaciones es inquietante; Birkhoff (4) coloca este ejemplo: supóngase que se desea verificar la existencia de un isomorfismo entre dos semigrupos S , y T , de 50 elementos; la prueba más directa en términos de la definición del isomorfismo consistiría en considerar todos los 50 morfismos sobreyectivos $f: S \rightarrow T$, y verificar para cada f si: $f(s) f(s') = f(ss')$ en T para cada s, s' en S . Esto requeriría comparar 1.25×10^8 (a la 66) pares de valores. Una máquina de arquitectura serial con un reloj de conmutadora cada 10 (a la menos 23) seg. (el tiempo en que un cuanto de luz atraviesa un núcleo atómico), debería haber empezado a funcionar desde antes del Big Bang para poder entregar hoy una respuesta. Por otra parte, la teoría de los grafos puede concebirse como el aspecto computacional de la topología algebraica (18). Los grafos son una sugestiva descripción para algunas estructuras de datos, y facilitan el diseño de algoritmos de eliminación óptima en métodos de elementos finitos (como los aplicados a la integración numérica de ecuaciones diferenciales elípticas); su aplicación más espectacular ha sido la solución del teorema de los cuatro colores usando un computador para explorar todas las situaciones topológicamente idénticas, un número de casos que se demostró previamente como factible para demostrar el teorema por exhaustión. Una clase especial de grafos (árboles) se utiliza en la descripción de juegos y en las técnicas de búsqueda y encadenamiento comunmente usadas en Inteligencia Artificial (19), (20).

* **Autómatas y Lenguajes Formales.** La teoría de autómatas aparece relacionada con los lenguajes a través de dos vías: ambas teorías están asociadas naturalmente con los

semigrupos y los monóides (estructuras algebraicas considerada pobres, por las que los matemáticos no muestran demasiado interés); en segundo lugar los lenguajes de la jerarquía de Chomsky pueden definirse en términos de los autómatas que los pueden reconocer. Una conveniente selección de temas de los textos de Eilenberg (21) y Hopcroft y Ullman (22) complementaría un curso dictado con los capítulos 7, 8, 9 y 10 de Beckman (23).

* **Computabilidad y Funciones Recursivas.** Fué históricamente el primer campo de interrelación entre la computación moderna y las matemáticas; a esta face pertenecen ahora los clásicos trabajos de Alan Turing, Emil Post y Kurt Gödel, recopilados por Davis (24), y el propio trabajo de Davis (25) que culmina esa etapa. Es preferible tratar aquí con más detalle las máquinas de Turing que dentro del tema de autómatas en general. El tema queda bien tratado con los capítulos 10 y 11 de Aho et al. (10), los capítulos 4, 5 y 6 de Beckman (23) y con la clara y breve demostración del Teorema de Incompletitud (capítulo 5) del libro de Arbib (26).

Observaciones en la línea de Control y Optimización.

* **Teoría Básica de Control.** El control lineal ha evolucionado desde los modelos continuos de una variable (tratados con transformada de Laplace y analizados con técnicas de variable compleja) hasta los modelos discretos con varias variables de estado (con técnicas de solución explícita en el dominio del tiempo). Es un hecho que buena parte del tema de las ecuaciones diferenciales lineales ha sido insertado en la teoría de sistemas dinámicos, donde recibe un tratamiento distinto (grafos, diagramas de bloques etc.). Un curso para matemáticos debiera presentar las técnicas de construcción de modelos lineales, cálculo de respuestas de sistemas lineales constantes con valores propios reales y complejos, formas canónicas de operadores lineales (matrices), y los conceptos de estabilidad (hay varios) controlabilidad, observabilidad y realización canónica. Se recomiendan textos de Ingeniería como el de Takahashi, Rabins y Auslander (27) y de Hartmann (28), complementados con la sintética exposición de Kalman en (29), y una lectura de tópicos bien elegidos del texto de Hirsch y Smale (30), que hace clara la extensión al control no lineal en variedades diferenciales, utiliza en forma integrada el álgebra lineal avanzada, e introduce temas de un segundo curso de control, como atractores periódicos, el teorema de Poincaré-Bendixon, y estabilidad estructural de soluciones. De un primer curso debiera quedar en claro la estrecha relación del control con el análisis y el álgebra.

* **Procesos Estocásticos.** En la década del 60, el ingeniero eléctrico Athanasios Papoulis encontraba que con la educación recibida por ingenieros y físicos en el área de probabilidad (la probabilidad de los dados; y las cartas) no era posible abordar temas como la teoría de la predicción o el análisis espectral de señales. Concibió un texto sobre la base de explicar los conceptos fundamentales de la probabilidad y los procesos estocásticos sin hacer uso explícito de la teoría de la medida, considerada todavía como prerrequisito natural sin el cual el tema aparentemente carecería de fundamentación.

De esta forma el tema quedó disponible tempranamente para sus aplicaciones en cursos de comunicaciones. La generalidad y claridad del texto lo convirtieron en uno de los preferidos para la comunidad internacional. La razón: allí donde las pruebas podían oscurecer el significado físico, usó argumentos de plausibilidad. En 1984 Papoulis produjo una versión actualizada (31) con temas adicionales como control estocástico en tiempo discreto, representaciones espectrales, y la teoría de filtros de Kalman (algoritmos adaptativos de predicción óptima en el sentido de los mínimos cuadrados en los que la predicción del estado de un sistema de control con entrada y mediciones contaminadas con ruido blanco gaussiano aditivo, se pesa entre el anterior valor extrapolado y el valor actual). Sin la exposición a un curso de este enfoque, es difícil captar el sentido físico de versiones más abstractas de problemas relacionados con el tiempo de parada óptimo de sistemas de control con costos terminales, donde se usan los conceptos de integral de Ito, martingales y espacios de Sobolev.

* **Autómatas y Teoría Algebraica de Control.** La aparición del computador originó el control discreto (digital). Se debe a Kalman (32) el gran aporte conceptual de expresar algebraicamente la dinámica de sistemas discretos en términos de $K(z)$ -módulos, donde el anillo $K(z)$ de polinomios en la indeterminada z es más que un anillo escalar (anillo de operadores de corrimiento en el tiempo). Kalman usó esta representación para estudiar el problema de encontrar realizaciones canónicas (de dimensión mínima del conjunto de estados visto como espacio vectorial), encontrando que las clases del módulo cociente resultante de dividir el módulo de entrada por el núcleo de la función de entrada/salida eran los estados del sistema, y que estas clases eran precisamente minimales por coincidir exactamente con las clases de Nerode de la teoría de autómatas. Así, logró separar la realización minimal en una función inyectiva y una sobre en módulos que se componen, teniendo en cuenta el módulo de estados como entidad intermedia de la composición. En su trabajo, Kalman remite a los resultados que en el mismo volumen expone Arbib en el tema de autómatas, que es visto con fines de control y no de lenguajes (33). A partir de estos desarrollos, la teoría algebraica de control ha avanzado en distintas direcciones, siendo factibles de presentar en un primer curso el planteamiento de estos mismos temas en el lenguaje de categorías por Arbib y Manes (34), el estudio de las consecuencias primeras de cambiar $K(z)$ por un anillo de distribuciones (Kamen) (35), y los primeros capítulos del texto de Brewer, Bunce y Van Vlech (36) de reciente aparición, sobre el tema de sistemas lineales sobre anillos conmutativos.

* **Programación Lineal y no Lineal.** El texto de Luenberger en versión ampliada (37) es recomendado por tratamiento unificado de los temas, integrando disciplinas sólidas en las que la teoría guía el desarrollo de nuevas técnicas a través de la herramienta del análisis de convergencia (programación no lineal). Un curso de este enfoque queda bien complementado por el libro de Craven (38) que ilustra el poder práctico del análisis funcional; por ejemplo, queda agradablemente claro para el lector que los teoremas de separación para los conjuntos convexos son versiones del teorema de Hahn-Banach.

* **Programación Dinámica y Control Óptimo.** La programación dinámica es un típico

producto del período que se ha caracterizado; es un procedimiento surgido de la necesidad de tomar un conjunto de decisiones secuenciales interrelacionadas, tal que la decisión tomada hoy afecta al estado del sistema mañana. Se trata de elegir la secuencia de decisiones (política) optimice alguna medida de preferencia. Aunque existe una versión diferencial de la programación dinámica, sus aplicaciones más extendidas están en el área de las etapas discretas. Su utilidad no depende de las características de la función objetivo (diferenciabilidad, Convexidad), y mediante el principio de optimalidad de **Bellman** se garantiza una solución recursiva del óptimo de n pasos en términos de los óptimos de $n-1$ pasos, que permite abordar directamente muchos problemas evitando la exposición combinatoria. Dicen **Dreyfus** (uno de los pioneros de esta técnica) y **Law** (39): “El por qué la programación dinámica es más un arte que una ciencia no lo sabemos. Sospechamos que parte del problema radica en que los estudiantes no esperan que su sentido común sea llamado al uso en cursos de matemáticas avanzadas”. No es este un tema que pueda dominarse deductivamente, pues la calidad combinatoria de la solución depende (en problemas grandes) de la situación específica y del talento del que enfrenta el problema. Al ámbito de la programación dinámica pertenece la herramienta generada para la clase de los sistemas hidrotérmicos de generación y transmisión de electricidad, con las que se solucionó el problema del Planeamiento Operativo del Sistema Nacional Interconectado para períodos multianuales, llegando a una escala más fina de resolución temporal al nivel horario, empatando con el control en tiempo real. El paquete montado en el Centro Nacional de Telecomunicaciones y Control de ISA encuentra una política secuencial de costo de operación mínimo total a un sistema topológicamente complejo (eléctrica e hidráulicamente), estocástico (demandas e hidrologías), cambiante (adiciones a la nueva red de líneas y plantas), en condiciones de incertidumbre (tasas de devaluación e inflación, costo de combustibles, aplazamiento o demora de proyectos), con restricciones de calidad técnica de servicio y minimizando adicionalmente las probabilidades de vertimientos en invierno y razonamientos en verano. Se debe en primer término a **Hernando Durán** el haber concebido y coordinado la implementación de una técnica original de solución de este problema (programación dinámica estocástica con agregación-descomposición), que vuelve tratable un problema de complejidad espacial-temporal extrema (40). El control óptimo está fundamentado en el principio del Máximo de Pontriaguin (41). Este principio apareció como una extensión del cálculo de variaciones (incluyéndolo como uno de sus casos), diferenciándose con respecto a las condiciones necesarias de optimalidad clásica en que el principio viene parcialmente en forma diferencial y parcialmente expresado en forma global. El principio es en últimas una búsqueda local de primer orden para una trayectoria óptima y no es por tanto condición suficiente de optimalidad. Diversos trabajos han demostrado la equivalencia lógica del principio del máximo y la programación dinámica (i.e.- **Luenberger** (42)).

Se hablaba de un enfoque aproximadamente dual en la propuesta respectiva para cada disciplina pues es -aparentemente- más sencillo inducir a los estudiantes de matemáticas a tomar cursos como los comentados hasta ahora, que motivar a estudiantes de ingeniería a hacer lo mismo en las áreas fundamentales de la matemática, además la docencia de estos temas en ingeniería exige más creatividad. En el evento en que un

estudiante de ingeniería decida tomar por su albedrío materias básicas en matemáticas, encontrará algunas de estas situaciones.

- a.- Tiene un cupo de electivas limitado: cinco materias del área de análisis -3 cálculos- ecuaciones diferenciales - variables complejas- en los dos años de formación “básica” ya no corresponden, por lo expuesto ahora, a las circunstancias actuales; mantienen su importancia pero de cierta forma compiten en los años iniciales con otras áreas de urgente tratamiento.
- b.- La aparición de los temas fundamentales de las matemáticas básicas dentro de las matemáticas de lo complejo posee unas leyes propias; no hay principio de transferencia por el cual la jerarquía o el orden de presentación de lo básico se preserve al llegar a lo complejo; cada tema ingresa sin charreteras; muchas veces pareciera que el desarrollo autónomo de las cosas en ambos lados conspirara para producir asincronismos. Ejemplos: Cuando los ingenieros perciben la importancia de los semigrupos y los monoides y toman un primer grupo de álgebra abstracta, encuentran que no reciben mucho énfasis; cuando descubren los módulos encuentran que los matemáticos los abordan relativamente tarde; corren el riesgo de perder el interés si al tomar un curso de lógica encuentran un tratamiento convencional que no les permita leer los artículos que vienen en las publicaciones periódicas específicas de la Sociedad de Computadoras del IEEE (Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos); lo mismo si encuentran un curso de variedades o geometría diferencial que no mencione los haces, concepto importante en los artículos sobre control geométrico que se publican en la revista periódica de la Sociedad de Control del IEEE; y así pueden hallarse más ejemplos.

Para diseñar un grupo de asignaturas de matemáticas básicas adaptadas a las necesidades de la tecnología es importante tener en mente el punto de vista de **André Weil**, expresado hace más de cuarenta años (43) “Sin duda, un matemático moderno ya no conoce como Apolonio o un candidato a la agregación algunos detalles de la teoría de las cónicas, pero nadie piensa por ello que ésta deba constituir una ciencia autónoma. Quizás les esté reservada la misma suerte a algunas teorías de las que estamos más orgullosos. La unidad de las matemáticas no se verá amenazada”. Se realizarán sólo algunas observaciones en las áreas de álgebra y análisis.

* **Álgebra.** Un curso de un año para ingenieros debiera tratar en su primera parte el tema de semigrupos y monoides por su importancia en lenguajes y autómatas; y grupos y anillos para computación; ejemplo: es importante el teorema de **Jordan - Hölder** en autómatas, no es importante-todavía- la teoría de **Sylow**. Para la segunda parte coinciden en pleno las necesidades de la ingeniería y el desarrollo interno del álgebra en la vía del álgebra homológica y las categorías, temas vitales en computación y control.

McLane Birkhoff afirman en “álgebra” (44): “Los años recientes han visto desarrollos sorprendentes en la organización conceptual de las matemáticas. Estos desarrollos

usan ciertos conceptos nuevos como - "módulo", "categoría", "morfismos", que son algebraicos en carácter y que pueden de hecho introducirse naturalmente sobre la base de materiales elementales". El mismo bien conocido texto plantea la forma de enseñar estos conceptos en pregrado: "Las ideas generales y abstractas que se requieran debieran crecer naturalmente a partir de circunstancias concretas". Una presentación de módulos debe permitir avanzar en la comprensión de una amplia variedad de ejemplos ofrecidos por la teoría algebraica de control. Las categorías ya se convirtieron en una necesidad de la investigación en computación y control, como se evidencia en la publicación de un texto como el que contiene a la referencia (34): se trabaja con la categoría de los sistemas dinámicos, la de los autómatas, la de las funciones recursivas, etc. La práctica ha corroborado la apreciación de **McLane Birkhoff** sobre el papel de las categorías: Su punto de partida sintético tiene un reconocido impacto en la vida diaria de todas las matemáticas; la opinión de un analista como **Dieudonné**, citada por **Manes** en la introducción de (45), redondea el asunto. Para este segundo curso de álgebra sirven, aparte de textos como (44), la clara introducción a módulos de **Gentile** (46), y los dos textos que recomiendan los conocedores del tema; el de **Manes y Arbib** (47) y el de **McLane** (48). Sin embargo, más importante que los textos es el enfoque.

* **Análisis.** Se debieran introducir los conceptos de diferenciales de **Frechet y Gateaux** junto con otros tópicos del cálculo avanzado en el último tramo de la formación en temas del cálculo en el segundo año con un texto como **Análisis I** de **Lang**. Por otra parte, la investigación y control exige en pregrado un curso de **Análisis Funcional y Medida** (integrados) diseñado teniendo en cuenta:

- a.- Los espacios de Hilbert aparecen con mayor frecuencia en control que los de Banach.
- b.- Que en control se requiere conocer el teorema espectral para operadores auto-adjuntos, normales y unitarios.
- c.- Cuando se requieren los espacios de Banach en optimización son más importantes los L_p que los l_p .
- d.- Es necesario manejar representaciones de vectores de los duales de los L_p .
- e.- Se requiere una rápida fundamentación en teoría de la medida que facilite el entendimiento de los conceptos que se mueven en la técnica de las ecuaciones diferenciales estocásticas.

Cualquier texto standart (i.e. **Simmons**) sirve a los objetivos a.- d.-, existiendo un texto aplicado (49) que ilustra lo que requiere un ingeniero en **Análisis Funcional**. En teoría de la medida es más difícil encontrar un texto que no se demore en llegar a lo solicitado.

V. CONCLUSIONES.

Debe juzgarse la ponencia por la necesidad de resolver un problema relacionado con el desarrollo del país más que por su completez. La ponencia habrá cumplido su cometido si dentro del XIII Congreso se logra motivar un primer acercamiento de trabajo conjunto entre Departamentos de Matemáticas e Ingeniería dentro del marco planteado. Si ese trabajo se iniciara, debería enfrentarse con el espíritu abierto al conocimiento y con la alegría que contagian **Martín Gardner**, **John Horton Conway** y **Richard Phillips Freyman**.

VI. NOTA FINAL.

Con alusiones personales quiero:

- a.- Evidenciar la influencia de los trabajos de **Stanford (Arbib Kalman, Knuth, Luenberger, etc.)** y **MIT (Wiener, Minsky, Davenport, Root, Lee, etc.)** en la inclinación matemática de la Ingeniería Eléctrica de la Universidad de los Andes hace una década.
- b.- Enfatizar la importancia de los programas de Especialización en Matemática Avanzada de la Universidad Nacional fuera de su sede central, programa que presenta positivos resultados colectivos en el Centro de Ibagué, el cual ha estado adscrito.
- c.- Agradecer a **Myriam Campos y Oswaldo Lezama** del Comité Organizador del XIII Congreso por su interés en que presentara una ponencia de esta índole.
- d.- Reconocer a **Hernando Durán, Hernando Pérez y Fernando Rodríguez** su papel de interlocutores muy valiosos para mi aprendizaje.
- e.- Last but not least, decirles a **Carmen, Juan G. y Camilo** que sonrío cuando los imagino oyendo música.

REFERENCIAS

- (1) **FEIGENBAUM, E., McCORDUCK, P.** "The Fifth Generation: Artificial Intelligence and Japan's Computer Challenge to the World". Addison Wesley, 1983.
- (2) **KUNTZMAN, J.** "Las Matemáticas de 1980". Antología de Matemáticas II, UNAM, 1983.
- (3) **SIMON, H.** "The Sciences of the Artificial" MIT Press, 1981.
- (4) **BIRKHOFF, G.** "Mathematics and Computer Science", American Scientist, Vol. 63, No. 6, Jan. -Feb. 1975.
- (5) **KNUTH, D.** "Computer Science and Mathematics". American Scientist, Vol. 61, Nov. -Dec. 1973.

- (6) WIRTH, N. "Program Development by Stepwise Refinement", *Comm. ACM*, 14, April 1971.
- (7) KERNIGHAN, B., PLAUGER, P. "The Elements Programming Style", McGraw-Hill, 1979.
- (8) MILLS, H. "Software Development", *IEEE Trans. on Software Eng.* SE-2, 1976.
- (9) SCHWARTZ, J. "What Programmers Should Know", *Computer Languages*, Vol. 2, Pergamon Press, 1975.
- (10) AHO, A., HOPCROFT, J., ULLMAN, J., "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison Wesley, 1974.
- (11) KNUTH, D. "The Art of Computer Programming", Vol. I-II-III, Addison Wesley, 1968, 1969, 1973 (respect).
- (12) KERNIGHAN, B., RITCHIE, D. "Le Language C", Mason, 1984.
- (13) YANG, C. C. "Relational Databases", Prentice Hall, 1986.
- (14) CUENA, J. "Lógica Informática", Alianza Editorial, 1985.
- (15) CLOCKSIN, W. MELLISH, C. "Programming IN PROLOG", Springer Verlag, 1981.
- (16) WISTON, P., HORN, B. "LISP", Addison Wesley, 1981.
- (17) RALSTON, A. "Discrete Mathematics: The New Mathematics of Science", *American Scientist*, Vol. 74, n.6 Nov.-Dec.-1986.
- (18) READ, R., Editor. "Graph Theory and Computing", Academic Press, 1972.
- (19) WISTON, P. "Artificial Intelligence", Addison Wesley, 1984.
- (20) SCHILDT, H. "Artificial Intelligence Using C", Osborne McGraw-Hill, 1987.
- (21) EILENBERG, S. "Automata, Languages and Machines", Academic Press, Vol. A - B, 1987 (respect)
- (22) HOPCROFT, J. ULLMAN, J. "Formal Languages and Their Relation to Automata", Addison Wesley, 1969.
- (23) BECKMAN, F. "Mathematical Foundations of Programming", Addison Wesley, 1981.
- (24) DAVIS, M., Editor. "The Undecidable, Basic Papers on Undecidable Propositions, Unsolvble Problems and Computable Functions", Raven Press, 1965.
- (25) DAVIS, M. "Computability and Unsolvability", McGraw-Hill, 1958.
- (26) ARBIB, M. "Cerebros, Automatas y Matemáticas", Alianza; Editorial, 1982 (segunda edición Castellana).
- (27) TAKAHASHI, Y. RABINS, M., ALEXANDER, D. "Control and Dynamic Systems", Addison Wesley, 1972.
- (28) HARTMANN, I. "Lineare Systeme. Grundlagen der Systemdynamik und Regelungstechnik", Springer Verlag, 1976.
- (29) KALMAN, R. "Elementary Control Theory From the modern Point of view", Part I. Kalman, R. Falb, P., Arbib, M. "Topics in Mathematical Systems Theory", McGraw-Hill, 1969.
- (30) HIRSCH, M., SMALE, S. "Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal", Alianza Editorial, 1983 (edición Castellana).
- (31) PAPOULIS, A. "Probability, Random Variables and Stochastic Processes", McGraw-Hill, 1984.
- (32) KALMAN, R. "Advanced Theory of linear Systems", Part. 4, K. F. A. Topics.
- (33) ARBIB, M. "Automata Theory", Part. 3, K. F. A. Topics.
- (34) ARBIB, M., MANES, E. "A Categorist's View of Automata and Systems". Manes, E. Editor "Category Theory Applied to Computation and Control", Springer Verlag, 1975.
- (35) KAMEN, E. "Control of Linear Continuous-Time Systems over Rings of Distributions", Manes Category.
- (36) BREWER, J., BUNCE, J., VAN VLECK, F. "Linear Systems over Commutative Rings", Marcel Dekker, 1986.
- (37) LUENBERGER, D. "Linear and Nonlinear Programming", Addison Wesley, 1984.
- (38) CRAVEN, B. "Mathematical Programming and Control Theory", Chapman and Hall, 1978.
- (39) DREYFUS, S. LAW, A. "The art and Theory of Dynamical Programming", Academic Press, 1977.
- (40) DURAN, H., PUECH, C., DIAZ, J., SANCHEZ, G. "Optimal Operation of Multireservoir Systems Using an Aggregation- Decomposition Approach", *IEEE. Trans on Power apparatus and systems*, PAS-104, n. 8, August. 1985.
- (41) PONTRYAGUIN, L. et al. "On the theory Optimal Processes", n. 11. Bellman, R., Kalba, R. Editors. "Selected papers on Mathematical Trends in Control Theory", Dover, 1964.
- (42) LUENBERGER, D. "Mathematical Programming and Control Theory: Trends of Interplay", Gofrion, A. Editor. "Perspectives on Optimization". Addison Wesley, 1972.
- (43) WEIL, A. "El Futuro de las Matemáticas", *Antología de Matemáticas II*, UNAM. 1983.
- (44) McLANE, S., BIRKHOFF, G. "Algebra", McMillan, 1969.
- (45) MANES, E. "Algebraica Theories", Springer Verlag, 1977.
- (46) GENTILE, E. "Estructuras Algebraicas II. Algebra Lineal", OEA. 1979.
- (47) MANES, E., ARBIB, M. "The Categorical Imperative. Arrows, Structures and Functors", Academic Press, 1984.
- (48) McLANE, S. "Categories for the Working Mathematician", Springer Verlag, 1972.
- (49) KRALL, A. "Linear Methods of Applied Analysis", Addison Wesley, 1973.