Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 8 No. 2, julio-diciembre 1990

La Teoría de Grupos en los Sistemas Matrimoniales Restringidos

ARTURO MARTINEZ C. *

En su artículo titulado **"Matrices, Grupos y Matrimonios. Una aplicación del Cálculo Matricial y la Teoría de Grupos a la Antropología", [6]**, el doctor Carlos Vasco presentó el caso de cómo determinar la posibilidad de matrimonio entre una pareja perteneciente a una sociedad dividida en 3 clanes y sometida a ciertas reglas especiales, tal como la de no poderse casar una pareja que pertenezca a un mismo clan. El problema, que se inicia desde el momento en que debe asignársele clan a cada recién nacido, se complica luego al establecer otras normas:

N1. El tipo matrimonial del hombre es el clan a que pertenezca y el de la mujer es el clan (único) al que pertenecen sus posibles esposos.

N2. Un hombre y una mujer sólo se pueden casar si sus tipos matrimoniales coinciden.

N3. Todo hijo (varón) tiene el mismo tipo matrimonial de su padre, mientras que el de la hija deberá asignarse siguiendo ciertas reglas prefijadas.

Con estas normas iniciales y unas condiciones adicionales para limitar la posibilidad de matrimonio, se construyen vectores y matrices que luego permiten resolver el problema. Luego se plantea el caso para "Reglas Matrimoniales Estrictas" de lo cual surge la necesidad de trabajar con permutaciones **completas** (las que mueven todos los elementos del conjunto sobre el cual se han definido: $p(x) \neq x$ para todo x) y grupos de permutaciones completos (conformados por permutaciones completas y la identidad). Más adelante surge la necesidad de agregar al grupo la propiedad de ser transitivo (para

* Profesor Titular del Departamento de Matemática de la UIS.

cada i,j, en el grupo hay al menos una permutación que lleva a x_i en x_j) y se llega entonces a la exigencia de trabajar con grupos **regulares** (completos y transitivos), de los cuales ya se sabía que si hay **n** clanes (tipos matrimoniales) los grupos regulares que pueden ser utilizados "tienen n elementos y no n! como parecía ser el caso de las permutaciones en S_n" [6, p.36].

El artículo del Dr. Vasco concluye con los ejemplos para n=4 (dos casos) y comentarios sobre los casos **n=5,6,7 y 8**.

En el presente artículo se busca no sólo la presentación del tema en una forma completamente general sino además la justificación de algunas de las afirmaciones hechas en aquel artículo, así como la presentación de un criterio para la determinación del grupo regular que sea necesario para cada valor de **n**.

Con el nombre de **Sistema Matrimonial** Restringido (SMR) se identifican aquellas sociedades en las cuales no en todos los casos está permitido el matrimonio de un hombre y una mujer. Más exactamente, en un SMR definido para una sociedad **A** se tiene:

(1) Una partición finita **P** de **A**, construída según N1, N2 y N3, cuyas clases de equivalencia **[a]** son llamadas **clanes** o **tipos matrimoniales.**

(2) Una biyección E:P—>P que asigna a cada hombre w del clan **[w]** un único clan **E[w]** en el cual debe seleccionar su esposa.

(3) Una biyección H:P—>P que asigna a cada hijo (varón) de un hombre w en el clan **[w]** un único tipo matrimonial **H[w]**.

Tanto en (2) como en (3) obsérvese que el clan asignado **E[w]** y **H[w]**, depende del clan **[w]** al cual pertenece el hombre w y no del hombre mismo. Se tiene así que cada **SMR** puede representarse mediante una tripla ordenada **(P,E,H)** en la cual E y H son permutaciones de P (de sus elementos, más exactamente).

En el caso del SMR de aquellas sociedades divididas en clanes dentro de cada uno de los cuales no está permitido el matrimonio, que en adelante se llamarán **Sistemas Matrimoniales Restringidos Estrictos (SMRE),** los axiomas adicionales que se toman son los siguientes:

(4) Un hombre no puede casarse con una mujer de su propio clan.

(5) Cada persona tiene algún pariente, por matrimonio o descendencia, en cada uno de los otros clanes, de manera que la sociedad no se dividirá en clanes no relacionados.

(6) El hecho de que dos personas estén o no en un mismo clan depende únicamente de la relación que por matrimonio o descendencia exista entre ellos y no del clan al cual pertenezcan.

Dándole una interpretación en términos matemáticos a estos axiomas puede decirse que:

(4) exige que E[a] $\neq$ [a] para toda **[a]** en **P**, lo cual se conoce como el **axioma de exogamia.**

(5) garantiza que alguna compuesta de las funciones E y H relaciona cada **[a]** con cada **[b]** en P. Es el **axioma de regularidad.**

(6) establece una hipótesis de homogeneidad, la cual garantiza que si T es una función generada por E y H, y si existe a en **A** tal que T**[a]**=**[a]** entonces T es la identidad.

Para ilustrar las bases concretas de las condiciones impuestas por los nuevos axiomas y el tipo de problema que se genera, es usual analizar los cuatro posibles casos de parentesco entre primos-hermanos para establecer si dos de ellos pueden o no casarse y, en caso afirmativo, bajo qué condiciones pueden hacerlo. Estos cuatro casos son los siguientes:

	Relación entre los padres	Tipo de relación entre los primos-hermanos
(I)	Los papás son hermanos	Pratilateral paralelo
(II)	Las mamás son hermanas	Matrilateral paralelo
(III)	El papá de él es hermano de la mamá de ella	Patrilateral cruzado
(IV)	La mamá de él es hermana del papá de ella	Matrilateral cruzado

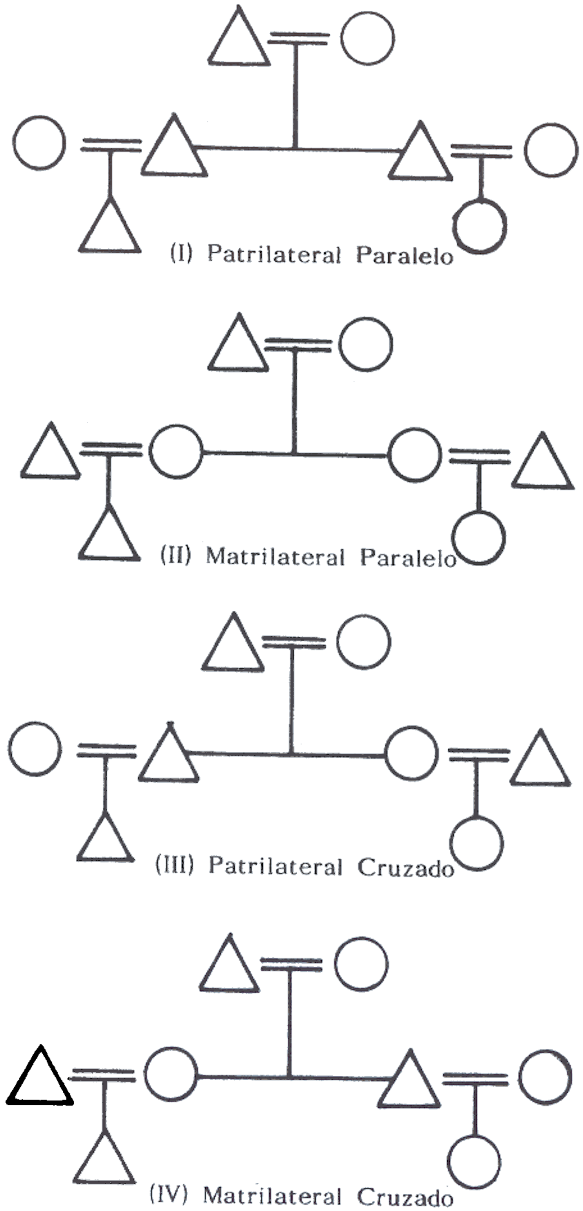
Adoptando la simbolización del análisis de parentesco que se utiliza en la antropología las gráficas de los cuatro casos son las que aparecen en la **Figura 1.**

Las relaciones entre personas y entre clanes se hace por medio del **Principio de Abstracción y Generalización,** es decir, dado que el conjunto A se ha particionado, dos elementos **a,b** en **A** están relacionados si y sólo si sus clases de equivalencia coinciden.

a es hermano de **b** si y sólo si **a** es hombre y **[a]=[b]**

a es hermana de **b** si y sólo si **a** es mujer y **[a]=[b]** (1.1.)

Antes de continuar, téngase presente que como la función E asigna el clan al cual pertenece la esposa de cada hombre en un clan dado, entonces su inversa E^{-1} determina



Figura

el clan al cual pertenece el esposo de una mujer en un clan dado. Análogamente, H^{-1} determina el clan al cual pertenece el papá de una persona en un clan dado.

Si **a** es el hombre y **b** es la mujer que piensan casarse, de acuerdo con (2) y (4) sólo podrán hacerlo si

$$E[a]=[b] \quad y \quad [a]\neq[b] \qquad (1.2)$$

Ahora bien, puesto que en el caso (I), $H^{-1}[a]$ corresponde al clan del papá de **a** y tal clan (por N3) es el mismo del papá de **b**, entonces el clan de **b** está dado por

$$[b] = H(H^{-1}[a]) = [a]$$

y por tanto esta pareja de primos no puede casarse. En términos de 1.1 puede decirse que esta pareja no puede casarse porque son "hermano y hermana" en el sentido de clan de estos dos conceptos de parentesco. Obsérvese además que el axioma (6) garantiza que esta conclusión no depende del clan **[a]** escogido, sino que es la misma para todo par de primos-hermanos en relación patrilateral paralela.

Para el caso (II), de nuevo partiendo del hombre **a** se establece el clan $H^{-1}[a]$ de su papá y luego el clan $EH^{-1}[a]$ de su mamá. Como éste es el mismo clan de la mamá de **b**, entonces $E^{-1}(EH^{-1}[a])$ es el clan al cual pertenece el papá de **b** y, finalmente, el clan al cual pertenece **b** es

$$[b] = HE^{-1}EH^{-1}[a] \quad \text{esto es} \quad [b] = [a]$$

y una vez más la pareja no puede casarse.

En el caso (III) se obtiene un resultado diferente, ya que ahora el clan de **b** está dado por $HE^{-1}H^{-1}[a]$, de manera que para poder casarse este clan debe ser igual la clan en el cual **a** debe buscar su esposa, es decir, $E[a]$, luego el casamiento puede darse bajo la condición

$$HE^{-1}H^{-1} = E \quad \text{esto es} \quad HE^{-1} = EH.$$

En el último caso, (IV), el clan de **b** está dado por

$$HEH^{-1}[a] = [b] = E[a]$$

y así el casamiento puede darse si $HEH^{-1} = E$, es decir, si $HE = EH$.

El problema que se propone a partir de este punto consiste en el desarrollo de un método algebraico para determinar y clasificar los casos -tanto favorables como desfavorables- que pueden darse según sea **el número n de clases en la partición** P.

Tal método puede establecerse mediante Teoría de Grupos, aplicándola para obtener una enumeración de los distintos sistemas matrimoniales restringidos estrictos. Antes de entrar en tal aplicación, obsérvese que si el problema fuera a ser resuelto por cálculo directo y análisis de cada caso, bajo la sola idea de que E y H son permutaciones de P, para el caso $n=2$, con $P = \{X,Y\}$, se tendría lo siguiente: Puesto que en S_2 hay dos permutaciones que son la identidad I y una transposición, y (4) elimina la posibilidad E=I, junto con las dos posibilidades para H podrían darse los casos:

[a]	H[a]	E[a]
X	X	Y
Y	Y	X

(i) $H=I, E^2=I$

[a]	H[a]	E[a]
X	Y	Y
Y	X	X

(ii) $H=E\neq I$

Puesto que en cada uno de los dos casos se establece que $E[a]\neq[a]$, ambos satisfacen (4). En cuanto a (6), en la tabla (i) las funciones generadas por H y E son $H=I, E^2=I, E^{-1}=E$, de las cuales H y E^2 satisfacen la condición, mientras que a E no le es aplicable la exigencia (dado que $E[a]\neq[a]$ para toda [a] en P). Así, (i) corresponde a un SMRE. En el caso de la tabla (ii) la exigencia tampoco es aplicable a E y las demás funciones generadas, $E^2=I$ y $H=E$ satisfacen la condición, luego aquí se tiene también un SMRE. Puesto que evidentemente las tablas no son isomorfas, se concluye que hay exactamente dos estructuras estrictas para $n=2$.

Para $n=3$, la existencia de $3!=6$ permutaciones implica la existencia de $6.6=36$ tablas para SMR, de las cuales deben eliminarse primero las que no correspondan a SMRE y luego las que resulten isomórficas, con lo cual el número se reduce a 3 casos. Para $n=4$ hay $24.24=576$ SMR pero sólo hay 6 estrictos.

Como puede deducirse de todo lo anterior, aún para valores pequeños de n tal método de análisis es demasiado engorroso y es aquí donde toma valor el aporte de los teóricos del Algebra al problema. EL punto de partida es el siguiente:

Como ya se dijo, los primos-hermanos cuyo tipo de relación sea patrilateral o matrilateral paralelo no pueden casarse, pero bajo ciertas condiciones si pueden hacerlo aquellos cuyo tipo de relación sea cruzada. El caso que reune en uno solo a éstos dos tipos se denomina **bilateral** y es aquel en el cual la mamá de ella es hermana del papá de él y al mismo tiempo el papá de ella es hermano de la mamá de él. Este tipo bilateral de casamiento podrá darse si las dos igualdades

$$EH = HE^{-1} \text{ y } EH = HE \qquad (1.3)$$

se verifican simultáneamente, de lo cual se sigue que $HE = HE^{-1}$, es decir, $E = E^{-1}$. Así $EH = HE$ y $E^2 = I$ son las condiciones para que tal casamiento pueda realizarse, condición esta última que implica que los hombres del clan [a] deben casarse con las mujeres del clan [b] y los hombres del clan [b] deben hacerlo con las del clan [a], institucionalizándose así un untercambio. Los casos de casamiento ahora posibles son entonces:

$EH = HE$ — $E^2 \neq I$ matrilateral
— $E^2 = I$ bilateral

$EH = HE^{-1}$ — $E^2 \neq I$ patrilateral
— $E^2 = I$ clanes pareados

Un quinto caso corresponde a las condiciones $E^2\neq I$, $EH^{-1}\neq HE$ y $EH^{-1}\neq HE^{-1}$, y se le conoce como el caso "Residual.

Como parte de la teoría a emplear en la solución del problema, recuérdese que un grupo G de permutaciones de un conjunto X es regular si y solo si:

(a) $p \in G, p \neq$ identidad, $\rightarrow \forall x \in X,\ p(x) \neq x$
(b) $w,x \in X, \rightarrow \exists p \in G,\ p(w) = x$.

Ahora puede observarse que (6) corresponde a la condición (a), más exactamente a su contrarecíproca: $\exists x \in X, p(x)=x \rightarrow p=$ identidad, y que (5) corresponde a la condición (b), de manera que los axiomas (5) y (6) exigen que el grupo generado por E y H sea **regular**, mientras que por (4) debe tenerse $E\neq I$. Resumiendo, si (P,E,H) es un SMRE entonces el grupo $G=\langle E,H\rangle$ es regular y $E\neq I$. Recíprocamente sólo se tiene que si (P,E,H) es un SMR en el cual $G = \langle E,H\rangle$ es regular y $E\neq I$ entonces el sistema satisface (4) y (5). Ahora bien, si en tal sistema existe [a] en P tal que $E[a]=[a]$ entonces por (6) se tiene la contradicción E=I, de manera que debe tenerse que $E[a]\neq[a]$ para toda [a] en P y así $E\neq I$ implica (4). Con este resultado queda demostrado el siguiente teorema, conocido como el teorema de **Kemeny-Snell-Thompson** por haber aparecido su primera demostración en el libro de estos tres autores [5].

Teorema (de KST): Un SMR (P,E,H) es escricto si y sólo si $E\neq I$ y el grupo de permutaciones generado por E y H es regular.

Otro aspecto de la Teoría de los Grupos que va a utilizarse es el siguiente: supóngase que la **tabla** 1 corresponde a un grupo G (en este caso el grupo 4 de Klein) y considérense las permutaciones en S(G) que asignan a cada elemento de la primera fila los elementos en cada una de las siguientes filas:

	e	a	b	
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

TABLA 1

$$e' = \begin{pmatrix} e & a & & \\ e & a & b & c \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} e & a & b & \\ a & & & b \end{pmatrix}$$

$$b' = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ b & c & e & a \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} e & a & b & c \\ c & b & a & e \end{pmatrix}$$

Una rápida verificación muestra que $G' = \{e', a', b', c'\}$ es un subgrupo regular de $S(G)$, isomórfico con G, lo cual es apenas una aplicación del teorema de Cayley, cuya generalización se toma sin demostración:

Teorema (de Representación Regular): Dado un grupo finito G, el conjunto de permutaciones en S(G) determinado por las filas de la tabla de G es un subgrupo regular de S(G), isomórfico con G.

Como puede observarse, el enunciado del teorema se constituye en un algoritmo para la obtención de grupos regulares. Más aún, si el grupo G está generado por dos elementos diferentes de la identidad, entonces el grupo regular G' obtenido a partir de la tabla de G va a satisfacer lo exigido por el teorema de KST, de manera que llamando P al grupo G', E y H a los dos generadores de G', se obtendrá en (P,E,H) un SMRE. Si el mismo procedimiento se aplica para cada par de generadores de G se obtendrá una familia de SMRE la cual deberá clasificarse vía isomorfismo, que en este caso se define así:

Dos SMRE, (P,E,H) y (P',E',H'), son isomórficos si existe una biyección $f: P \to P'$ tal que

$$\begin{aligned} &1)\ E[a] = [b] \longleftrightarrow E'(f[a]) = f[b] \\ &2)\ H[a] = [b] \longleftrightarrow H'(f[a]) = f[b] \end{aligned} \qquad (1.4)$$

Como en el caso que se analiza se tiene P=P', f es una permutación de P.

En cuanto a la relación entre E y E', H y H', considérese primero el siguiente resultado:

Si los SMR (P,E,H) y (P',E',H') son isomórficos las condiciones de la definición 1.4 pueden plantearse en la forma

$$1')\ E^{-1}[b] = [a] \longleftrightarrow E'(f[a]) = f[b]$$

$$2')\ H^{-1}[b] = [a] \longleftrightarrow H'(f[a]) = f[b]$$

y entonces para 1' se tienen las equivalencias

$$\begin{aligned} E^{-1}[b] = [a] &\longleftrightarrow E'(f[a]) = f[b] \\ &\longleftrightarrow E'(F(E^{-1}[b])) = f[b] \\ &\longleftrightarrow E'fE^{-1} = f \\ &\longleftrightarrow E' = fEf^{-1} \end{aligned}$$

Análogamente para 2' se obtiene $H' = fHf^{-1}$, con lo cual queda demostrado el siguiente resultado:

Teorema (de Isomorfismo): Los SMR (P,E,H) y (P',E',H') son isomórficos si y sólo si existe una permutación f en S(P) tal que

$$E' = fEf^{-1} \quad y \quad H' = fHf^{-1}$$

Como se recordará, si w,x son elementos en un grupo G tales que $x = gwg^{-1}$ para algún g en G, se dice que x es el **conjugado de** w (por g) o, más concisamente, que w y x son conjugados. Esta definición se puede ampliar a parejas ordenadas de permutaciones así:

Si w,x,y,z son permutaciones en S(X) las parejas (w,x), (y,z) son conjugadas si existe p en S(X) tal que

$$y = pwp^{-1} \quad y \quad z = pxp^{-1}. \qquad (1.5)$$

Regresando al caso del grupo regular G' obtenido a partir de la tabla del grupo G, la permutación p de las igualdades en 1.5 puede no estar en G' sino en S(G) que es el grupo de todas las permutaciones de G.

Dos conceptos más para recordar:

- Dos permutaciones, p y p' son conjugadas si y sólo si su expresión como producto de ciclos (descomposición cíclica) es la misma (1.6)

La relación R definida en G x G por

$$wRx \Longleftrightarrow w = g\,x\,g^{-1} \quad \text{para algún } g \text{ en } G$$

es una relación de equivalencia que particiona al grupo G, así que en particular la relación "ser parejas conjugadas" particiona cualquier conjunto de parejas ordenadas de permutaciones, mediante lo cual pueden clasificarse los pares de generadores del grupo G' para identificar los que generan SMRE no isomórficos. (1.7)

Una limitación al procedimiento planteado en (1.7) se hará evidente una vez analizados los ejemplos para n=2 y n=3.

Ejemplo 1: n=2. El único grupo de orden 2 es C_2 (el grupo cíclico de orden 2) cuya tabla está dada por la **tabla 2**, de manera que las permutaciones para el grupo G' son

	e	c
e	e	c
c	c	e

TABLA 2

$$e' = \begin{pmatrix} e & c \\ e & c \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} e & c \\ c & e \end{pmatrix} = (e\ c)$$

y entonces las parejas de permutaciones que generan el grupo regular corresponden a las parejas de elementos que incluyen un generador de C_2, o sea

$$(e',c'),\quad (c',c'),\quad (c',e').$$

Si se acuerda identificar la función H con la primera componente de estas parejas, la restricción impuesta por (4) elimina la pareja (c',e'). De las dos parejas restantes se sabe que e' y c' tienen descomposición cíclica diferente, luego no pueden ser conjugadas y así los SMRE obtenidos a partir de ellas no son isomórficos, obteniéndose:

[a]	H[a]	E[a]
X		
Y	Y	X

(i)

[a]	H[a]	E[a]
X	Y	Y
Y	X	X

(ii)

con $H = I = E^2$ en (i) y $H^2 = I = E^2$ en (ii). Más aún, dado que C_2 es conmutativo, también lo es su representación regular y entonces tanto en el caso (i) como en el (ii) se verifica la igualdad EH = HE, significando que estos dos casos corresponden a

sistemas de casamiento bilateral.

Ejemplo 2: n=3. El único grupo de orden 3 es C_3, cuya tabla está dada en la **tabla 3**, luego la representación regular la constituyen:

	e	c	c^2
e	e	c	c^2
c	c	c^2	e
c^2	c^2	e	c

TABLA 3

$$e' = \begin{pmatrix} e & c & c^2 \\ e & c & c^2 \end{pmatrix} \qquad c' = \begin{pmatrix} e & c & c^2 \\ c & c^2 & e \end{pmatrix} = (e\ c\ c^2)$$

$$c'^2 = \begin{pmatrix} e & c & c^2 \\ c^2 & e & c \end{pmatrix} = (e\ c^2\ c),$$

con los cuales pueden conformarse 9 parejas ordenadas.

Una vez más el axioma (4) elimina algunas parejas, en este caso (e',e'), (c',e') y (c'²,e'). Puesto que se ha supuesto que c es un generador de C_3, cada una de las seis parejas remanentes genera un grupo regular y puesto que $c^{-1} = c^2$ también genera a C_3, entonces tanto c' como c'² generan al grupo buscado.

Para particionar al conjunto

$$A = \{(e',c'),(e',c'^2),(c',c'),(c',c'^2),(c'^2,c'),(c'^2,c'^2)\}$$

con respecto a la conjugación, en primer lugar se tiene que, por (1.6), ninguna pareja que contenga a e' puede ser conjugada con otra que no la contenga, y c' es conjugado con c'², entonces una primera clase de equivalencia es

$$\{(e',c'),\ (e',c'^2)\}$$

Por otra parte, ya que c' y c'² son conjugados, las parejas (c',c') y (c'²,c'²), así como (c',c'²) y (c'²,c') son conjugadas, y la clase de equivalencia de las dos primeras es diferente de la de las dos segundas, de manera que la partición P del conjunto A es en este caso

$$P = \{\{(e',c'),(e',c'^2)\}, \{(c',c'), (c^2,c'^2)\}, \{(c',c'^2),(c^2,c')\}\}$$

Considerando un elemento de cada clase de equivalencia, por ejemplo (e',c'), (c',c') y (c',c'^2), se obtienen los casos siguientes:

[a]	H[a]	E[a]
X		
Y	Y	Z
Z	Z	X

$H=I,\ E^3=I$

(iii)

[a]	H[a]	E[a]
X	Y	Y
Y	Z	Z
Z	X	X

$H^3 = I = E^3$

(iv)

[a]	H[a]	E[a]
X	Y	Z
Y	Z	X
Z	X	Y

$H^3=I,\ E=H^{-1}$

(v)

También ahora la representación regular es conmutativa (C_3 lo es), de lo cual se obtiene que $EH = HE$ en cada caso, así como $E^2 \neq I$, resultando los tres casos del tipo de casamiento matrilateral.

La limitación mencionada previamente debe ahora ser evidente: aún es necesaria la comparación de las parejas para la determinación de las clases de equivalencia.

Así, por ejemplo, para $n=4$ deben considerarse los dos grupos de orden 4 que existen, el grupo cíclico de orden 4 y el grupo cuatro de Klein. Este último permite la formación de seis parejas de generadores y aún a sabiendas de que la relación de parejas conjugadas es una equivalencia, no puede evitarse la comparación de un buen número de parejas antes de poder construir las clases de eqivalencia. A continuación habría que considerar el grupo cíclico de orden 4, sus parejas y sus clases de equivalencia y, finalmente, se necesitaría considerar las posibles parejas conjugadas tomadas de cada construcción, ya que todas se han definido como permutaciones de cuatro elementos.

Así el método del enfoque por conjugación al problema de enumeración parece que deja de ser fácilmente aplicable muy rápido. No obstante ya hay demostraciones de algoritmos que abrevian los cálculos de la enumeración (ver por ejemplo [7]), tema sobre el cual se espera presentar un artículo en un próximo número de esta revista.

REFERENCIAS

[1] COXETER, H.S.M. y MOSER, W.O. (1965). **Generators and Their Relations for Discrete Groups.** Springer, Berlin.

[2] FARARO, Thomas J. (1973). **Mathematical Sociology. An Introduction to Fundamentals.** John Wiley, New York.

[3] GROSSMAN, I. and MAGNUS, W. (1964) **Groups and Their Graphs.** Random Hose, New York.

[4] HIGMAN, B. (1964) **Applied Group Theoretic and Matrix Methods.** Dover, New York.

[5] KEMENY, J. G., SNELL, J. L. y THOMPSON, G. L. (1966). **Introduction to Finite Mathematics.** 2a. ed. Prentice-Hall, Englewood.

[6] VASCO CARLOS E. (1982). **Matrices, Grupos y Matrimonios.** (Una aplicación del cálculo matricial y la teoría de grupos a la antropología). Matemática Enseñanza Universitaria, No. 22, pp. 28-41.

[7] WHITE, H. C. (1963). **An Anatomy of Kinship.** Prentice-Hall, Englewood.

[8] YALE, P. (1968). **Geometry and Symetry.** Holden-day, San Francisco.