Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 8 No. 2, julio-diciembre 1990

FUNCIONES DE NUCLEO O TOPOLOGIAS [Ma] (*)

Manuel Suárez M. y Germán Torres R. (**)

CONTENIDO:

SINTESIS:
Se utiliza el conocido concepto de núcleo topológico de un punto para definir la noción de "función de núcleo sobre un conjunto" y analizar sus propiedades básicas. Para un conjunto X se encuentra la adjunción entre la colección de sus funciones de núcleo y la de sus topologías. Las topologías puntos fijos de esta adjunción son aquellas en las que para cada punto existe el menor abierto que lo contiene y son denominadas aquí "topologías [Ma]", las cuales coinciden con las "topologías discretas" que P. S. Alexandroff introdujo en 1937, como aquellas en las que la intersección de cualquier colección de abiertos es un conjunto abierto.

(*) Este artículo se fundamenta en el Trabajo de Grado presentado por GTR, dirigido por MSM, en el Programa de Especialización en Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, dentro del Convenio UN-UPTC.

(**) Departamento de Matemáticas. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Tunja.

0. NOCIONES PRELIMINARES

Una colección β de subconjuntos de un conjunto X se llama una **base topológica** sobre X, si cumple las propiedades:

[B1] Todo punto de X está en algún conjunto de β.

[B2] Si un punto x de X está en dos conjuntos de β, B y B´, entonces existe un conjunto B" de β, que contiene a x y que está contenido en los conjuntos B y B´.

Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de X se llama un **filtro** (propio) sobre X, si cumple las siguientes condiciones:

[F1] El conjunto vacío no es un elemento de $\mathcal{F}$.

[F2] El conjunto X es un elemento de $\mathcal{F}$.

[F3] La intersección de dos elementos de $\mathcal{F}$, es de $\mathcal{F}$.

[F3] Los hiperconjuntos de un elemento de $\mathcal{F}$, son de $\mathcal{F}$.

Una colección $\mathcal{G}$ de subconjuntos de X se llama un **cofiltro** (propio) sobre X, si cumple las siguientes condiciones:

[Cf1] El conjunto X no es elemento de $\mathcal{G}$.

[Cf2] El conjunto vacío es un elemento de $\mathcal{G}$.

[Cf3] La reunión de dos elementos de $\mathcal{G}$, es de $\mathcal{G}$.

[Cf4] Los subconjuntos de un elemento de $\mathcal{G}$, son de $\mathcal{G}$.

Sean f: X ---> Y una función, T una topología sobre X y T´ una topología sobre Y.
Se dice que T es la **topología inicial**, si los conjuntos T-abiertos son las preimágenes por f de los T´-abiertos.
Se dice que T´ es la **topología final**, si los conjuntos T´-abiertos son los subconjuntos de Y cuya preimagen por f es T-abierta.

FUNCIONES ADJUNTAS

Sean : $(X,\leq)$, $(Y,\leq)$ conjuntos ordenados,
f: X ---> Y, g: Y ---> X morfismos.
Se dice que <f,g> es un **par adjunto**, si para cada elemento x de X y cada elemento y de Y, se cumple que:

$$g(y) \leq x, \text{ si y sólo si } y \leq f(x).$$

En tal caso, se dice que f tiene (o admite) adjunta, la cual es g. Y también, que g es adjunta de f. Si se requiere señalar el dominio y el codominio de las funciones, se escribe <X,f;g,Y>.

CARACTERIZACIONES

1. Para que el par <f,g> sea adjunto, es necesario y suficiente que se cumplan las dos condiciones siguientes:
   [FA1] Para cada x de X, $gf(x) \leq x$.
   [FA2] Para cada y de Y, $y \leq fg(y)$.
   Para que la función f admita adjunta, es condición necesaria y suficiente que para cada punto y de Y, el conjunto $\{x \in X : y \leq f(x)\}$ tenga mínimo.
3. Para que la función g sea adjunta de alguna función, es condición necesaria y suficiente que para cada punto x de X, el conjunto $\{y \in Y : g(y) \leq x\}$ tenga máximo.
4. Para que la función f admita adjunta es necesario y suficiente que f conmute con extremos inferiores y que para cada y de Y, el conjunto $\{x \in X : y \leq f(x)\}$ sea no vacío y tenga extremo inferior.
5. Para que la función g sea adjunta de alguna función, es necesario y suficiente que g conmute con extremos superiores y que para cada punto x de X, el conjunto $\{y \in Y : g(y) \leq x\}$ sea no vacío y tenga extremo superior.

Isomorfismo de Galois: Los recorridos de las funciones f y g son isomorfos: $R_f \approx R_g$.

NOTACIONES

Sea (X,T) un espacio topológico y x un punto de X. Se utilizarán las siguientes notaciones:

P(X)	: La colección de los subconjuntos de un conjunto X.
c(A)	: El complemento del conjunto A.
$\langle\beta\rangle$	: La topología generada por la base β.
Top(X)	: La colección de las topologías sobre un conjunto X
V(x,T)	: la colección de T-vecindades del punto x.
[x]	: la topología formada con Φ y los subconjuntos de X que contienen a x.
(x)	: la topología formada con X y los subconjuntos de X que no contienen a x.
T[x]	: la topología formada con Φ y los T-abiertos que contienen a x.
T(x)	: la topología formada con X y los T-abiertos que no contienen a x.
T<x>	: la reunión de V(x,T) con la topología (x).
$\cap\alpha$	: La intersección de la colección α.
$\mathcal{F}_{cf}$	: El filtro de los complementarios finitos.
$\mathcal{F}^c$	: El cofiltro de los complementarios del filtro $\mathcal{F}$.

LA FUNCION DE NUCLEO

El concepto de núcleo topológico de un punto está tratado, entre otros, en los artículos [2] y [3]. En esta sección se introduce la noción de "función de núcleo sobre un conjunto" y se obtiene la topología asociada y algunas de sus propiedades básicas. También se encuentra la función de núcleo asociada a una topología y se presentan algunas de sus propiedades. Además, se halla la adjunción entre la colección de funciones de núcleo sobre X, denotada Nuc(X), y la colección de las topologías sobre el mismo conjunto, denotada Top(X).

DEFINICION
Sea X un conjunto (no vacío). Una función N: X ---> P(X) se llama una **función de núcleo** sobre X, si cumple las siguientes dos condiciones:

[N1] Cada punto de X está en su imagen por N.
[N2] La imagen de cada punto de X contiene a las imágenes de sus puntos.

En tal caso, la imagen por N de cada punto x de X se denota N(x) y se llama "el núcleo de x asociado a N".

La Proposición 1.6 permite encontrar ejemplos de funciones de núcleo.

1.1 PROPOSICION

1. El núcleo de cada punto de X es no vacío.
2. El núcleo de cada punto de X es la reunión de los núcleos de sus puntos.
3. Los núcleos de dos puntos de X coinciden, únicamente si cada punto está en el núcleo del otro punto.
4. El núcleo de cada punto de X es el menor conjunto del recorrido de la función N que contiene al punto.

OBSERVACION : Todas las demostraciones que se suprimen en este artículo son rutinarias y no tienen dificultad especial alguna.

NOTACION
Se denota Nuc(X) a la colección de funciones de núcleo sobre X.

DEFINICION
Sean N y N´ funciones de núcleo sobre X. Se dice que N es **menos fina** que N´ si para cada x en X, N´(x) es subconjunto de N(x). En tal caso se escribe $N \le N'$.

1.2 PROPOSICION

1. La relación $\le$ es un orden en Nuc(X).
2. La función $N_\bullet$: X --> P(X), definida por $N_\bullet(x) = X$ para cada x en X, es el mínimo de (Nuc(X), $\le$).
3. La función $N^\bullet$: X --> P(X), definida por $N^\bullet(x) = \{x\}$ para cada x en X, es el máximo de (Nuc(X), $\le$).

1.3 PROPOSICION
Sea Ω una subcolección no vacía de Nuc(X). La función $\Omega_\bullet$: X --> P(X) que a cada x de X le asigna $\cup\{N(x): N \in \Omega\}$, es una función de núcleo sobre X y es el ínfimo de Ω. Además, la función $\Omega^\bullet$: X --> P(X) que a cada x de X le asigna $\cap\{N(x) : N \in \Omega\}$, es una función de núcleo sobre X y es el supremo de Ω.

TOPOLOGIA ASOCIADA A UNA FUNCION DE NUCLEO

1.4 PROPOSICION
Sea N una función de núcleo sobre X. El recorrido de la función N es una base topológica sobre X.

NOTACION
Se denota Top(X) a la colección de topologías sobre X, ordenada por la inclusión.

DEFINICION
Se define la función t: Nuc(X) --> Top(X) de manera que a cada función de núcleo N sobre X, le hace corresponder la topología t(N) generada por el recorrido de la función N.

1.5 PROPOSICION

1. Todo abierto de la topología t(N), que contiene a un punto x de X, contiene a N(x).

2a. $t(N_\bullet)$ es la topología $\{X,\Phi\}$.

2b. $t(N^\bullet)$ es P(X).

3. La función t es un morfismo de conjuntos ordenados. Es decir, si $N \le N'$ entonces $t(N) \le t(N')$, donde $t(N) \le t(N')$ significa que t(N) es subconjunto de t(N´)

4. La función t conmuta con extremos inferiores. Es decir, si Ω es una subcolección no vacía de Nuc(X), entonces $t(\mathrm{Inf}\Omega) = \mathrm{Inf}(t(\Omega))$.
5. La función t admite adjunta.

Demostración:

3. Sean N, N´funciones de núcleo sobre X tales que $N \leq N'$. Entonces para todo x de X, N´(x) es subconjunto de N(x) y así, la topología generada por la base $\{N(x) : x \in X\}$ está contenida en la topología generada por la base $\{N'(x) : x \in X\}$.
   Luego t es un morfismo de conjuntos ordenados.
4. Sea Ω una subcolección no vacía de funciones de núcleo sobre X. El ínfimo de Ω es la función de núcleo $\Omega\bullet$ sobre X que a cada punto x de X le asigna la colección $\cup\{N(x) : N \in \Omega\}$. El recorrido de la función $\Omega\bullet$ es la base $\{ \cup \{N(x) : N \in \Omega\} : x \in X \}$, la cual genera la topología $t(\Omega\bullet)$.
   Como t es un morfismo de conjuntos ordenados, la topología $t(\Omega\bullet)$ es menos fina que el $\mathrm{Inf}(t(\Omega))$, que es la colección $\cap\{t(N) : N \in \Omega\}$.
   Recíprocamente, sea A un conjunto t(N)-abierto, para cada N en Ω, y sea x un punto de A. Por la Proposición 1.5.1, el conjunto A contiene a N(x), para cada N de Ω. Luego A contiene a la colección $\cup\{N(x): N \in \Omega\}$ que es un conjunto básico de $t(\Omega\bullet)$.
5. Como consecuencia las Proposiciones 1.5.2b, 1.5.3 y 1.5.4, se tiene que t admite adjunta. (V. [6]). ∎

A continuación se va a construír la adjunta de la función t, (Proposición 1.10.4).

FUNCION DE NUCLEO ASOCIADA A UNA TOPOLOGIA

DEFINICION ([2])

Dado un espacio topológico (X,T) y un punto x de X, se conoce con el nombre de **núcleo topológico** de x a la intersección de los conjuntos T-abiertos que contienen a x.

1.6 PROPOSICION

Sea (X,T) un espacio topológico. La aplicación N de X en P(X), que a cada punto x de X le asigna su núcleo topológico, es una función de núcleo sobre X.

NOTACION

Se denota N(x,T) al núcleo de x asociado a la topología T y se le llama el **T-núcleo** de x.

1.7 PROPOSICION

Sean (X,T) y (X,T´) espacios topológicos, x,z elementos de X y A un subconjunto de X.

1. El T-núcleo de cada punto de X existe y es único.
2. Todo punto está en su T-núcleo.
3. Todo conjunto T-abierto que contiene a x, contiene a su T-núcleo.
4. Todo conjunto T-abierto es la reunión de los T-núcleos de sus puntos.
5. Si un conjunto es la reunión de los T-núcleos de sus puntos, no necesariamente es T-abierto.
6. El T-núcleo de un punto contiene a los T-núcleos de sus puntos.
7. El T-núcleo de un punto es la reunión de los T-núcleos de sus puntos.
8. Para que z sea del T-núcleo de x, es necesario y suficiente que la topología T[x] sea menos fina que la topología T[z].
9. Para que z sea elemento del T-núcleo de un punto x, es necesario y suficiente que la topología T[x] sea menos fina que la topología [z].
10. Que los T-núcleos de dos puntos coincidan, significa que cada punto está en el T-núcleo del otro.
11. Los T-núcleos de dos puntos x,z coinciden, únicamente si coinciden las topologías T[x] y T[z].
12. Si un punto está en la intersección de todos los T-abiertos no vacíos, entonces su T-núcleo está contenido en tal intersección.
13. La intersección de una colección de T-abiertos no vacíos, es la reunión de los T-núcleos sus puntos.
14. Para que A sea la reunión de los T-núcleos de sus puntos, es condición necesaria y suficiente que A contenga al T-núcleo de cada uno de sus puntos.
15. Si la topología T es menos fina que la topología T´, entonces el T´-núcleo de cada punto es un subconjunto de su T-núcleo.

Demostración:

5. **CONTRAEJEMPLO.** En la topología usual sobre el conjunto de los números reales, el núcleo de cada punto x es {x}.

Sinembargo, el intervalo [a;b] no es abierto.

14. Supongamos que A contiene el T-núcleo de cada uno de sus puntos. Como para cada x de X, {x} está contenido en N(x,T), se tiene que A es subconjunto de la reunión de los T-núcleos de sus puntos y esta reunión está contenida en A, con lo cual A es la reunión de los T-núcleos de sus puntos.
    Recíprocamente, si A es la reunión de los T-núcleos de sus puntos, entonces A contiene al T-núcleo de cada uno de sus puntos.
15. Si T es menos fina que T´, entonces T[x] es menos fina que T´[x], para cada x de X. Luego la intersección de todos los T´[x]-abiertos está contenida en la intersección de todos los T[x]-abiertos, esto es, el T´-núcleo de x está contenido en el T-núcleo de x. ∎

1.8 PROPOSICION

Sean (X,T) un espacio topológico y x,z elementos **distintos**, de X.

1. Los núcleos del punto x, en las topologías T y T[x], coinciden. El T[x]-núcleo de z contiene a la reunión de los T-núcleos de z y x.
2. Los núcleos del punto x, en las topologías T y T<x>, coinciden. El T<x>-núcleo de z es {z}.

1.9 PROPOSICION

Sean (X,T) un espacio topológico, x,z elementos de X y A un subconjunto de X.

1. La colección de T-núcleos de los puntos de X, es una base topológica sobre X.
2. El T-núcleo de un punto es T-abierto, si es una T-vecindad del punto.
3. El T-núcleo de un punto es la intersección de las T-vecindades del punto.
4. El T-núcleo de un punto x es el complemento de la reunión de los T-cerrados que no contienen a x.
5. Sean β una base topológica sobre X y T la topología generada por β. El T-núcleo de un punto x de X es la intersección de los conjuntos de β que contienen al punto x.
6. Que z sea del T-núcleo de un punto x, significa que x es punto de la T-adherencia de z.
7. El T-interior de A es la reunión de los T-núcleos de sus puntos.

8. El T-exterior de A es la reunión de los T-núcleos de sus puntos.
9. La T-adherencia de A no necesariamente contiene a los T-núcleos de sus puntos.
10. La T-frontera de A no necesariamente contiene a los T-núcleos de sus puntos.
11. Todo punto está en la T-adherencia de las partes no vacías de su T-núcleo.
12. La única topología cuya función de núcleo es la función constante de valor X, es la topología {X,Φ}.
13. La topología P(X), la de los complementarios finitos y la de los complementarios enumerables, tienen asociada la misma función de núcleo: N°.
14. Una topología es [T1], si y sólo si su función de núcleo asociada es N°.
15. Una topología T es [T0], si y sólo si su función de núcleo asociada es inyectiva.
16. Sea C(x,T) el conjunto de puntos p de X tales que la sucesión constante de valor p, converge a x. Entonces C(x,T) = N(x,T).

Demostración:

9. **CONTRAEJEMPLO.** Sean R con la topología generada por la base {[x; -->): x ∈ R}, r en R y sea A = [r-1;r+1]. La adherencia de A es (<--; r+1], N(r) = [r; -->), r es punto de la adherencia de A y, sinembargo, el núcleo de r no es subconjunto de la adherencia de A.
10. **CONTRAEJEMPLO.** Sea R con la topología generada por la base {[x;-->): x ∈ R}, r un punto de R y A = (r;-->). La frontera de A es (<--;r], N(r)=[r;-->),r es punto de frontera de A y, sin embargo,el núcleo de r no es subconjunto de la frontera A.
16. Sea z un punto de X. Que z sea del T-núcleo de x significa que todo conjunto T-abierto que contiene a x, contiene a z, lo cual equivale a que la sucesión constante de valor z, converge a x. En consecuencia, N(x,T) coincide con C(x,T). ∎

EL PAR ADJUNTO <Nuc(X),t;n,Top(X)>

NOTACION

La función que a cada topología le asigna su función de núcleo se denota n Top(X) --> Nuc(X).

1.10 PROPOSICION

1. Para todo punto x de X, se cumple que $n(\{X,\Phi\})(x) = X$ y $n(P(X))(x) = \{x\}$.
2. La función n es un morfismo de conjuntos ordenados. Es decir, si T, T´ son topologías sobre X y T es menos fina que T´, entonces n(T) es menos fina que n(T´).
3. Para cada función de núcleo N sobre X y cada topología T sobre X, se cumplen las siguientes condiciones, donde t es la función de Nuc(X) en Top(X):
   [FA1] $T \le tn(T)$,
   [FA2] $nt(N) \le N$.
4. La función n es la adjunta de la función t.
5. La función t no es sobreyectiva.
6. La función n es sobreyectiva. Es decir, toda función de núcleo es generada por una topología.
7. La función t es inyectiva. La función n es sobreyectiva.
8. La función n no es inyectiva. La función t no es sobreyectiva.

Demostración:

3. Sean O un conjunto T-abierto y x un punto de O. Entonces n(T)(x) es un subconjunto de O. Luego O es un abierto de la topología tn(T) y así, se cumple [FA1].
   Sean x en X y z un punto de N(x). Supongamos que O es un abierto de la topología t(N) que contiene a x. Entonces N(x) está contenido en O y así, z está en O. Luego se verifica la condición [FA2].
4. Esta propiedad es una consecuencia de 1.10.2 y 1.10.3.
5. **CONTRAEJEMPLO.** La topología de los complementarios finitos (sobre un conjunto infinito X), no es del recorrido de la función t porque su función de núcleo genera a la topología P(X).
6. Por 1.10.3, se garantiza que nt(N) es menos fina que N. Recíprocamente, sea x un punto cualquiera de X y sea z un punto de nt(N)(x). Como N(x) contiene a x y es abierto en la topología t(N), entonces por definición de la función n, se concluye que z está en N(x).
7. Estas condiciones se deducen de la Proposición 1.10.6, por la adjunción de las funciones n y t.
8. Estas condiciones se deducen de la Proposición 1.10.5, por la adjunción de las funciones n y t. ■

En la Proposición 3.8, se caracteriza el recorrido de la función t como la colección de las topologías Ma(X).

2. FUNCIONES DE NUCLEO EN TOPOLOGIAS ASOCIADAS A FILTROS

Además de los ejemplos de funciones de núcleo en topologías asociadas a filtros, en esta sección se caracteriza el núcleo de un punto en un espacio topológico (X,T), en términos de ultratopologías que dominan a T.

TOPOLOGIAS FILTROSAS

A una topología T sobre X se le llama **filtrosa** (resp. **ultrafiltrosa**) si es P(X) o si el conjunto $T - \{\Phi\}$ es un filtro (resp. ultrafiltro) sobre X. (V. [9]).
Se denota Fil(X) a la colección de las topologías filtrosas sobre X. Se tiene que Fil(X) es una subcolección de Top(X).

2.1 PROPOSICION
Si T es una topología filtrosa sobre X, entonces para todo x de X, $N(x,T)= \cap(T-\{\Phi\}) \cup \{x\}$.

Sean $\mathcal{F}$ un filtro sobre X, A un subconjunto de X, p,x elementos de X y [A] la topología formada con Φ y los subconjuntos de X que contienen a A.

- Si T = [A], entonces $N(x,T) = A \cup \{x\}$.
- Si T = [p], entonces $N(x,T) = \{x,p\}$.
- Si T es una topología más fina que el filtro de los complementarios finitos, entonces $N(x,T) = \{x\}$.
- Si $\mathcal{F}$ es más fino que el filtro de los complementarios finitos sobre X y $T = \mathcal{F} \cap [p]$, entonces $N(x,T) = \{x,p\}$.
- Si $\mathcal{F}$ es menos fino que el filtro de los complementarios finitos sobre X y $T = \mathcal{F} \cap [p]$, entonces $N(x,T) = (\cap\mathcal{F}) \cup \{x,p\}$.
- Si $T = \mathcal{F} \cap [p]$, entonces $N(x,T) = (\cap\mathcal{F}) \cup \{x,p\}$.
- Sea T una topología filtrosa sobre X. Si [A] es la intersección de los ultrafiltros triviales que dominan a T y si $F_\bullet$ es la intersección de los ultrafiltros no triviales que dominan a T, entonces $T = [A] \cap F_\bullet$ y $N(x,T) = F_\bullet \cup A \cup \{x\}$.

TOPOLOGIAS COFILTROSAS

A una topología T sobre X se le llama **cofiltrosa** (resp. **ultracofiltrosa**), si es P(X) o si la colección $T - \{X\}$ es un cofiltro (resp. ultracofiltro) sobre X. (V. [9])

2.2 PROPOSICION
Sea $T = P(A) \cup \{X\}$ una topología cofiltrosa, donde A es un subconjunto de X. Si x está en A, $N(x,T) = \{x\}$, y si x no está en A, $N(x,T) = X$.

Sean A un subconjunto de X, p,x puntos de X y (A) la topología de los subconjuntos de X, disyuntos con A.
- Sea $T = (A)$. Si x está en A, $N(x,T) = X$, y si x no está en A, $N(x,T) = \{x\}$.
- Sea $T = (p)$. Entonces $N(p,T) = X$, y si x es distinto de p, $N(x,T) = \{x\}$.

TOPOLOGIAS METAFILTROSAS ([9])
A una topología (sobre X) se le llama **metafiltrosa** si es la reunión de un filtro (sobre X) con un cofiltro (sobre X).

2.3 PROPOSICION
Sean A un subconjunto de X, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y la topología $T = \mathcal{F} \cup P(A)$. Si x está en A, $N(x,T) = \{x\}$, y si x no está en A, $N(x,T) = (\cap\mathcal{F}) \cup \{x\}$.

Sean A,B subconjuntos de X, p,x elementos de X, $\mathcal{F}$ un filtro sobre X y $\mathcal{V}$ un ultrafiltro no trivial sobre X.
- Si $T = [p] \cup P(A)$, entonces $N(x,T) = \{x,p\}$.
- Sea $T = [B] \cup P(A)$. Si x está en A, $N(x,T) = \{x\}$, y si x no está en X, $N(x,T) = B \cup \{x\}$.
- Sea $T = [A] \cup P(A)$. Si x está en A, $N(x,T) = \{x\}$, y si x no está en A, $N(x,T) = A \cup \{x\}$.
- Sea $T = (p) \cup \mathcal{F}$. Entonces $N(p,T) = (\cap\mathcal{F}) \cup \{p\}$, y si x es distinto de p, $N(x,T) = \{x\}$.
- Sea $T = P(A) \cup \mathcal{V}$. Si x está en A, $N(x,T) = \{x\}$, y si x no está en A, $N(x,T) = (\cap\mathcal{V}) \cup \{x\}$.

INFRATOPOLOGIAS
Una topología T sobre un conjunto X se llama **infratopología**, si $\{X,\Phi\}$ es la única topología estrictamente menos fina que T. (V. [8]).
Es bien conocido que:
- Existen las infratopologías sobre un conjunto X. Y son de la forma $\{X,\Phi,A\}$, donde A es un subconjunto de X, distinto de X y Φ.
- Toda topología, distinta de $\{X,\Phi\}$, domina al menos a una infratopología.
- Toda topología, distinta de $\{X,\Phi\}$, es el extremo superior (la reunión) de las infratopologías que domina.

2.4 PROPOSICION
Sea $T = \{X,\Phi,A\}$ una infratopología sobre X, donde A es un subconjunto de X. Si x está en A, entonces $N(x,T) = A$, y si x no está en A, entonces $N(x,T) = X$.

2.5 PROPOSICION
La función de núcleo asociada a una topología T es el supremo de la colección de las funciones de núcleo asociadas a las infratopologías que T domina.

Demostración:
Sea $\{ \{X,\Phi,A_i\} : i \in I \}$ la colección de infratopologías dominadas por T. Para cada índice i, la función de núcleo N_i asociada a la infratopología $\{X,\Phi,A_i\}$ es tal que $N_i(x) = A_i$, si x está en A_i. En caso contrario, $N_i(x) = X$. En consecuencia, el extremo superior de la colección $\{N_i : i \in I\}$ es la función de núcleo N, tal que para cada x de X, $N(x) = \cap(\{A_i \in T : x \in A_i\} \cup \{X\}) = \cap T[x]$. Esto es, la función N coincide con la función de T-núcleo. ∎

ULTRATOPOLOGIAS
Una topología T se llama **ultratopología** si P(X) es la única topología estrictamente más fina que T. (V. [8]).
A las ultratopologías se les denomina triviales o no triviales, dependiendo de que el ultrafiltro lo sea o nó.
El siguiente teorema es debido a O. Fröhlich:
- Existen las ultratopologías sobre un conjunto X. Y son de la forma $(p) \cup \mathcal{V}$, donde $\mathcal{V}$ es un ultrafiltro distinto de [p].
- Toda topología, distina de P(X), es dominada por alguna ultratopología.
- Toda topología, distinta de P(X), es el extremo inferior (la intersección) de las ultratopologías que la dominan.

Se observa que las ultratopologías son topologías metafiltrosas.
A las ultratopologías de la forma $(x) \cup [z]$, donde x,z son elementos distintos de X, en [8], se les denomina "ultrato-

pologías principales'

2.6 PROPOSICION
Sea $T = (p) \cup \mathcal{V}$ una ultratopología sobre X, donde p es un punto de X y $\mathcal{V}$ un ultrafiltro sobre X, distinto de [p]. Para un punto x distinto de p, $N(x,T) = \{x\}$, y $N(p,T) = (\cap\mathcal{V}) \cup \{p\}$.

Sean p,q puntos distintos, de X y sea $\mathcal{V}$ un ultrafiltro no trivial sobre X.
- Si $T = (p) \cup \mathcal{V}$, entonces para todo x de X, $N(x,T) = \{x\}$.
- Sea $T = (p) \cup [q]$. Para un punto x distinto de p, $N(x,T) = \{x\}$, y $N(p,T) = \{p,q\}$.

2.7 PROPOSICION
Sean (X,T) un espacio topológico y x,z elementos distintos, de X.
1. Para que el punto z sea del T-núcleo de x, es necesario y suficiente que T sea dominada por la ultratopología $(x) \cup [z]$.
2. $N(x,T) = \{ z \in X : T \leq (x) \cup [z] \}$.

Demostración:
1. Necesidad. Si z está en N(x,T), por la Proposición 1.7.9, T[x] es menos fina que [z]. Como T[x] es menos fina que (x) y $T = T[x] \cup T(x)$, entonces T es menos fina que $(x) \cup [z]$.
   Suficiencia. Sea T menos fina que $(x) \cup [z]$. Como $T = T(x) \cup T[x]$, entonces T[x] es menos fina que [z]. Luego, por la Proposición 1.7.9, z está en N(x,T).
2. Es consecuencia de la Proposición 2.7.1. ■

2.8 PROPOSICION
Sea T una topología distinta de P(X). La función de núcleo asociada a T es el ínfimo de la colección de las funciones de núcleo asociadas a las ultratopologías que dominan a T.

Demostración:
Supóngase que toda topología ultrafiltrosa que domina a T es no trivial. Entonces la función de núcleo asociada a cada ultratopología que domina a T, coincide con la función de T-núcleo, la cual asigna a cada punto x de X, {x}.
Supóngase que la colección $\{(p_i) \cup [q_i] : i \in I\}$ de topologías ultrafiltrosas triviales que dominan a T, no es vacía. Para cada índice i, la función de núcleo N_i asociada a la topología $(p_i) \cup [q_i]$ es tal que $N_i(p_i) = \{p_i,q_i\}$ y para x distinto de p_i, $N_i(x) = \{x\}$.
Por la Proposición 2.7.2, $N(x,T) = \{q_i : i \in I\} \cup \{x\}$, si $x \in \{p_i : i \in I\}$. En caso contrario $N(x,T) = \{x\}$. Se observa que $N = \mathrm{Inf}\{N_i : i \in I\}$ y como cada ultratopología no trivial que domina a T tiene asociada la máxima función de núcleo N^*, se cumple que N es el ínfimo de todas las funciones de núcleo asociadas a las ultratopologías que dominan a T. ■

TOPOLOGIAS BOOLEANAS
Una topología sobre un conjunto X se llama **booleana**, si es una subálgebra booleana de $< P(X), \cup, \cap, c >$. (V. [9]).
Son ejemplos de topologías booleanas sobre un conjunto no vacío X, las topologías $\{X,\Phi\}$, P(X) y $[A] \cup (A)$, donde A es un subconjunto de X.
Si $\mathcal{F}$ es el filtro [A], entonces $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}^c$ es una topología booleana.

2.9 PROPOSICION
Sea T una topología booleana sobre X y sea R la relación de equivalencia asociada. Para un punto x de X, $N(x,T) = Rx$, donde Rx denota la clase de equivalencia de x según R.

Sea A un subconjunto de X y x un punto de X.
- Si $T = \{X,\Phi\}$, entonces $N(x,T) = X$.
- Si $T = P(X)$, entonces $N(x,T) = \{x\}$.
- Sea $T = [A] \cup (A)$. Si x está en A, $N(x,T) = A$, y si x no está en A, $N(x,T) = \{x\}$.

TOPOLOGIAS HIPERCONEXAS
Una topología T sobre un conjunto X se llama **hiperconexa** si cada vez que se tengan dos conjuntos T-abiertos no vacíos, su intersección es no vacía. (V. [7]).
Sea T una topología menos fina que la topología de los complementarios finitos sobre X. Para cada x de X, $N(x,T) = \cap(T-\{\Phi\}) \cup \{x\}$.
Sea A un subconjunto infinito de X y T la topología formada con X, Φ y los subconjuntos de A cuyo complementario (en A) es finito. Si x está en A, $N(x,T) = \{x\}$, y si x no está en A, $N(x,T) = X$.

3. ESPACIOS TOPOLOGICOS [Ma]

En esta sección se estudia el concepto de topología [Ma] y se determinan algunas de sus propiedades. También se caracteriza la colección de topologías [Ma] como la colección de topologías principales, presentadas en [8]. Además se obtiene la adjunción entre la colección de las topologías [Ma] sobre un conjunto X y la colección de las topologías sobre el mismo conjunto, utilizando las funciones de núcleo asociadas.

DEFINICION
Sea (X,T) un espacio topológico. Se dice que T cumple la propiedad [Ma], si para cada punto de X, existe el menor T-abierto que lo contiene. En tal caso, se dice que (X,T) es un espacio topológico [Ma], o que T es una **topología [Ma]** sobre X.

La noción de topología [Ma] fué introducida en 1937, por P.S. Alexandroff, con el nombre de "topología discreta", como aquella topología en la que la intersección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.

NOTACION
Se denota Ma(X) a la colección de las topologías [Ma] sobre un conjunto X.

3.1 PROPOSICION
Si T es una topología [Ma] sobre X, entonces el menor T-abierto que contiene a cada punto x, es el T-núcleo de x.

EJEMPLOS
A continuación se presentan ejemplos y contraejemplos de topologías [Ma] sobre un conjunto X, no vacío.
1. Las topologías $\{X,\emptyset\}$ y P(X).
2. Las infratopologías.
3. Las topologías con un número finito de abiertos.
4. Las topologías sobre un conjunto finito.
5. Las topologías booleanas.
6. Las ultratopologías triviales.
7. Las topologías ultrafiltrosas triviales.
8. Las topologías cofiltrosas.
9. No son topologías [Ma], la topología de los complementarios finitos y la topología de los complementarios enumerables, sobre un conjunto no enumerable.
10. Tampoco son topologías [Ma], la topología usual sobre el conjunto de los números reales R y la topología $\{(x;\to) : x \in R\} \cup \{R,\emptyset\}$.
11. La topología $\langle\{[x;\to) : x \in R\}\rangle$ es una topología [Ma] sobre el conjunto de los números reales R.

3.2 PROPOSICION
1. Para que T sea una topología [Ma], es condición necesaria y suficiente que el T-núcleo de cada punto de X sea T-abierto.
2. Una topología T es [Ma], si y sólo si la intersección de cualquier colección de T-abiertos es T-abierta.
3. Que T sea una topología [Ma], significa que para todo punto existe la menor T-vecindad que lo contiene.
4. Que T sea una topología [Ma], significa que para cada punto x de X, la topología T[x] es [Ma].
5. Para que T sea una topología [Ma], es condición necesaria y suficiente que para cada punto x de X, la topología T<x> sea [Ma].
6. Sea C(x,T) el conjunto de puntos p de X, tales que la sucesión constante de valor p, converge a x. Para que T sea una topología [Ma], es condición necesaria y suficiente que para cada x de X, el conjunto C(x,T) sea T-abierto.

Demostración:

2. Sean T una topología de Ma(X), Ω una colección no vacía de conjuntos T-abiertos, O la intersección de la colección Ω y sea x un punto de O. Puesto que todo T-abierto de Ω contiene a x, también incluye al menor T-abierto que contiene a x. Así, x es un punto del T-interior del conjunto O.
   Recíprocamente, sea Ωx la colección de conjuntos T-abiertos que contiene a x. Como por hipótesis, el conjunto $\cap(\Omega x)$ es T-abierto, se tiene que T es [Ma].
4. Necesidad. Sea x un punto cualquiera de X. Para todo punto z de X, por la Proposición 1.8.1 y por ser T una topología [Ma], N(z,T[x]) = N(z,T) U N(x,T). Además, N(z,T) y N(x,T) son T-abiertos, con lo cual N(z,T[x]) es un T-abierto que contiene a x. Esto es, N(z,T[x]) es un T[x]-abierto y así, T[x] es una topología [Ma].
   Suficiencia. Sea x un punto cualquiera de X. Por la Proposición 1.8.1, N(x,T[x]) = N(x,T) y, como por hi-

pótesis, la topología $T[x]$ es [Ma], se tiene que $N(x,T)$ es $T[x]$-abierto. Como $T[x]$ es menos fina que T, se concluye que $N(x,T)$ es T-abierto, y que, T es [Ma]. Recíprocamente, sea Ωx la colección de conjuntos T-abiertos que contienen a x. Como por hipótesis el conjunto $\cap\Omega x$ es T-abierto, se tiene que T es [Ma].

5. Necesidad. Por la Proposición 1.8.2, para cada x de X, $N(x,T\langle x\rangle) = N(x,T)$.Como T es una topología [Ma], $N(x,T)$ es T-abierto y, como T es menos fina que $T\langle x\rangle$, se concluye que $N(x,T\langle x\rangle)$ es $T\langle x\rangle$-abierto. Si z es un punto distinto de x, $N(z,T\langle x\rangle) = \{z\}$ que también es un conjunto $T\langle x\rangle$-abierto. Luego $T\langle x\rangle$ es una topología [Ma]. Suficiencia. Si para cada x de X, $T\langle x\rangle$ es una topología [Ma], entonces $N(x,T\langle x\rangle)$ es $T\langle x\rangle$-abierto. Pero, por la Proposición 1.8.2, $N(x,T\langle x\rangle) = N(x,T)$, con lo cual $N(x,T)$ es un $T\langle x\rangle$-abierto. Como $T\langle x\rangle = V(x,T) \cup (p)$, entonces $N(x,T)$ es una T-vecindad de x y, por la Proposición 1.9.2, $N(x,T)$ es T-abierto. Luego, T es [Ma].
6. Es una consecuencia de 1.9.16 y 3.3.1. ■

3.3 PROPOSICION

1. La colección $Ma(X)$ tiene mínimo y tiene máximo.
2. La colección $Ma(X) - \{P(X)\}$ tiene maximales.
3. La colección $Ma(X) - \{X,\Phi\}$ tiene minimales.
4. La colección $Ma(X)$ es cerrada para intersecciones arbitrarias.
5. Si T es una topología [Ma], distinta de $P(X)$, entonces existe una topología [Ma] estrictamente más fina que T.
6. Si T es una topología [T1], entonces existe una única topología [Ma] más fina que T.
7. Si T es una topología [Ma] y T' es menos fina que T, no necesariamente T' es [Ma].
8. Si T es una topología [Ma] y T' es más fina que T, entonces no necesariamente T' es [Ma].
9. Sean T y T' dos topologías [Ma]. Si T'' es más fina que T y menos fina que T', no necesariamente T'' es [Ma].
10. Sean T y T' dos topologías no [Ma]. Si T'' es más fina que T y menos fina que T', entonces T puede ser [Ma].
11. Toda topología [Ma] es 1-contable.
12. Toda topología [Ma] es secuencial. Esto es, los conjuntos T-abiertos y los conjuntos secuencialmente abiertos coinciden.
13. La única topología [Ma] y [T1], es la topología $P(X)$.

Demostración:

7. CONTRAEJEMPLO. Sea R el conjunto de los números reales. Considérese la topología T' formada por la reunión del conjunto $\{R\}$ con la topología euclídea restringida al intervalo $[-1;1]$, y sea $T = (2)$.
8. CONTRAEJEMPLO. Sobre el conjunto R de los números reales, considérense la topología $T = \{ R, \Phi, R-\{2\} \}$ y la topología T' de los complementarios finitos.
9. CONTRAEJEMPLO. Ninguna ultratopología no trivial sobre X es [Ma], pero es más fina que $\{X,\Phi\}$ y menos fina que $P(X)$, que sí son [Ma].
10. CONTRAEJEMPLO. Sobre el conjunto R de los números reales, considérense las topologías $T = \langle\{[x,\longrightarrow): x \in R\}\rangle \cap$ *For*, $T' = \{(x,\longrightarrow) : x \in R\}$ y $T'' = \langle\{[x,\longrightarrow): x \in R\}\rangle$. Las topologías T y T' no son [Ma], pero la topología T'' sí lo es.
11. Si T es una topología [Ma], para cada punto x de X, el conjunto $\{N(x,T)\}$ es una base local abierta enumerable.
12. Sea T' la topología secuencial asociada a T. Es inmediato que T es menos fina que T'. Sea O un T'-abierto. Se cumple que $O = \cup\{N(x,T'): x\in O\} = \cup \{C(x,T') : x \in O\} = \cup \{C(x,T) : x \in O\} = \cup \{N(x,T): x \in O\}$. Como T es [Ma], entonces O es T-abierto. ■

3.4 PROPOSICION

Sean X,Y dos conjuntos (no vacíos), $f:X \longrightarrow Y$ una función, T una topología sobre X y T' una topología sobre Y.

1. Si T' es una topología de $Ma(Y)$ y T es la topología inicial, entonces para cada x de X, el T-núcleo de x coincide con $f^{-1}(N(f(x),T'))$.
2. Si T' es una topología de $Ma(Y)$ y T es la topología inicial, entonces T es una topología de $Ma(X)$.
3. La propiedad [Ma] es hereditaria. Esto es, todo subespacio topológico de un espacio topológico [Ma], es tambien [Ma].
4. Si T es una topología de $Ma(X)$, T' es la topología final y f es inyectiva, entonces para cada punto x de X, el T'-núcleo de $f(x)$ coincide con $f(N(x,T))$.
5. Si T es una topología de $Ma(X)$, T' es la topología final y f es inyectiva, entonces T' es una topología de $Ma(Y)$.
6. La propiedad [Ma] es divisible. Esto es, si R es una relación de equivalencia sobre X, la topología cociente también es [Ma].

3.5 PROPOSICION

Sean X,Y dos conjuntos (no vacíos), f:X ---> Y una función, T una topología sobre X y T´ una topología sobre Y.

1. Si f es una función sobreyectiva, continua y abierta, y si T es una topología de Ma(X), entonces T´ es una topología de Ma(Y).
2. Si f es una función inyectiva, continua y abierta, y si T´ es una topología de Ma(Y), entonces T es una topología de Ma(X).
3. La propiedad [Ma] es topológica. Esto es, la propiedad [Ma] se preserva por homeomorfismos.

3.6 PROPOSICION

1. Si T es una topología [Ma] sobre X, el T-núcleo de cada punto de X es compacto abierto.
2. Si T es una topología sobre X y el T-núcleo de cada punto de X es compacto, no necesariamente la topología T es [Ma].
3. Sea T una topología [Ma] sobre X. Un subconjunto A de X es T-abierto y compacto, únicamente si A es la reunión de los T-núcleos de un número finito de sus puntos.
4. Sea T una topología [Ma] sobre X. Para que un subconjunto A de X sea T-abierto, es necesario y suficiente que A sea reunión de conjuntos compactos y T-abiertos.

Demostración:

2. **CONTRAEJEMPLO**. En la topología usual T sobre el conjunto R de los números reales, el T-núcleo de cada punto x es {x} y, sinembargo, T no es [Ma].

DEFINICION

Se dice que una topología T sobre un conjunto (no vacío) X es **principal** sobre X, si T es la intersección de ultra-topologías triviales. (V. [8]).

3.7 PROPOSICION

1. Si T una topología principal sobre X, entonces para cada x de X, el T-núcleo de x es T-abierto.
2. Si T es una topología principal sobre X, entonces para cada x de X, todo conjunto T-abierto que contiene a x, debe también contener al T-núcleo de x.
3. Una topología T es principal, si y sólo si T es [Ma].

4. Una topología T es principal, si y sólo si la intersección arbitraria de conjuntos T-abiertos es T-abierta.

Demostración:

Estas propiedades se deducen de 2.7.2 y de los Teoremas 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4 de [8], respectivamente. ■

EL PAR ADJUNTO <Ma(X),1;tn,Top(X)>

3.8 PROPOSICION

1. El recorrido de la función t: Nuc(X) ---> Top(X), definida en la sección 1, es la colección Ma(X).
2. Los conjuntos ordenados Nuc(X) y Ma(X) son isomorfos. (Isomorfismo de Galois).

3.9 PROPOSICION

Sea 1 : Ma(X) ---> Top(X) la función de inclusión, es decir, si T es una topología [Ma], entonces 1(T) = T.

1. La función 1 es un morfismo de conjuntos ordenados.
2. La función 1 conmuta con extremos inferiores.
3. La función 1 admite adjunta.

3.10 PROPOSICION

Como consecuencia de las propiedades de adjunción de las funciones n: Top(X) ---> Nuc(X) y t: Nuc(X) ---> Ma(X), las siguientes son algunas propiedades de la función compuesta tn: Top(X) ---> Ma(X).

1. La función tn es un morfismo de conjuntos ordenados.
2. Las topologías [Ma] son los puntos fijos de la función tn.
3. Para cada topología T sobre X y cada topología T´, [Ma] sobre X, se cumplen las siguientes dos condiciones:
   [FA1] $T \le tn(T)$,
   [FA2] $tn(T') \le T'$.
4. El par <1,tn> es adjunto.
5. La función tn es sobreyectiva.
6. La función 1 no es sobreyectiva.
7. La función tn no es inyectiva.
8. La función 1 es inyectiva.

BIBLIOGRAFIA

1. BOURBAKI, N.: Topologie Générale. Hermann. Paris, (1971).

[2] DUBE, K.K.: "A note on R_o-topological spaces" Mat. Vesnik, 11(26), 1974; p. 203-208.

[3] GUIA, J.: "Some new proximity relations". Indian J. Pure Appl. Math., 16(6), 1985; p. 609-616.

[4] HUTTON, B. y REILLY, I.:"On compactness and fineteness in topological spaces". Mat. Vesnik, 13(28), 1976; p. 59-62.

[5] RUIZ S., C.J.: Topología o Convergencia. Fascículo 1. UPTC. Tunja, (1975).

[6] RUIZ S., C.J. y SUAREZ M., M.:Topología o Convergencia. Fascículo 2. UPTC. Tunja, (1980).

[7] STEEN, L.A. y SEEBACH, J.A.: Counterexamples in topology. Holt, Rinehart and Winston, Inc. New York, (1970).

[8] STEINER, A.K.: "The lattice of topologies : Structure and Complementation". Trans. Amer. Math. Soc.,122, 1966; p. 379-398.

[9] SUAREZ M., M.:"Topologías asociadas a filtros". VI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, Bogotá, (1989).

[10] TORRES R., G.: Espacios Topológicos [Ma]. Trabajo de Grado dirigido por M. Suárez M. Programa de Especialización en Matemática Avanzada. Universidad Nacional de Colombia. Convenio UN-UPTC. Tunja, (1990).