Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas, UIS
Vol. 7 No. 1, enero-junio 1989

INVERSA GENERALIZADA DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

MIGUEL ARGAEZ R.*

0. INTRODUCCION

En 1920 E.H. Moore introduce el concepto de una inversa generalizada para una matriz arbitraria. En 1955 R. Penrose da una investigación detallada de la noción anterior. A partir de esos momentos el concepto de inversa generalizada se vuelve uno de los temas de mayor estudio en matemáticas. Nashed en 1700 da una lista de referencias sobre el tema.

El propósito del presente artículo es desarrollar los fundamentos geométricos y algebraicos esenciales para construir una inversa generalizada de una transformación lineal T arbitraria. En particular construiremos la inversa generalizada de Moore-Penrose y estudiaremos sus propiedades esenciales.

1. Definición. Sean U,V espacios vectoriales (sobre el campo de los números reales) y sea T una transformación lineal de U en V. Se dice que una transformación lineal G de V en U

* Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

es una inversa generalizada de T si

$$T\,G\,T = T\,.$$

Si T es una transformación lineal invertible entonces $G = T^{-1}$ y además G es única.

Sea $K = \{x \in U \; ; \; Tx = 0\}$ el núcleo de T y sea M un subespacio complementario de K en U. Sea $R = \{y \in V \; ; \; y = Tx$ para algún $x \in U\}$ el subespacio imagen de T o recorrido de T y S un subespacio complementario de R en V. Así que $U = M \oplus K$ y $V = R \oplus S$. Esto significa que todo $x \in U$ $y \in V$ se pueden expresar de manera única como

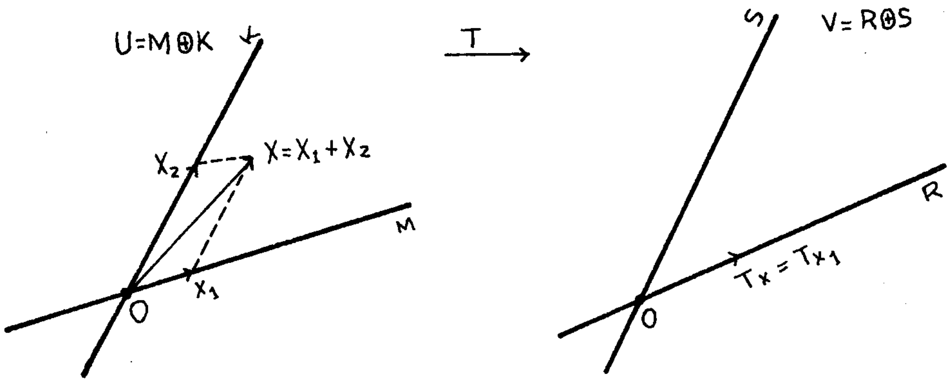
$$x = x_1 + x_2 \quad \text{donde} \quad x_1 \in M\,, \quad x_2 \in K$$

$$y = y_1 + y_2 \quad \text{donde} \quad y_1 \in R\,, \quad y_2 \in S$$

Es importante notar que el "peso" de la transformación lineal T está determinado por el subespacio complementario M puesto que

$$\begin{aligned} Tx &= T(x_1 + x_2) \qquad \text{donde} \quad x_1 \in M\,,\; x_2 \in K \\ &= Tx_1 \end{aligned}$$

La ilustración geométrica de lo anterior es la siguiente:



Notemos algo más:

$\dim M + \dim K = \dim U$,	teorema de dimensión para suma directa
$\dim R + \dim K = \dim U$,	teorema fundamental del álgebra lineal

Luego,

$$\dim M = \dim R$$

y por tanto M y R son isomorfos.

Sea $T_o : M \to R$ tal que $T_o x = Tx$, la restricción de la transformación lineal T a los subespacios M y R. Si x pertenece al núcleo de T_o entonces x pertenece al núcleo de T, por tanto $x \in M \cap K$, luego $x = 0$. De esta manera hemos probado que T_o es una transoformación lineal invertible. Sea $T_o^{-1} : R \to M$ tal que $T_o^{-1} y = x$ si $T_o x = y$.

Generalicemos la transformación lineal T_o^{-1} a los espacios V y U de tal manera que no le asignemos ningún "peso" a los subespacios complementarios S y K de V y U respectivamente.

$$G : V \to U$$

$$y \to Gy = T_o^{-1} y_1$$

donde $y = y_1 + y_2$ y $y_1 \in R$, $y_2 \in S$.

En particular,

$$Gy = T_o^{-1} y \qquad \text{si} \qquad y \in R \tag{1}$$

$$Gy = 0 \qquad \text{si} \qquad y \in S \tag{2}$$

G es una aplicación que está bien definida, puesto que si, $Gy = x_1$ y $Gy = x_2$ entonces $T_0^{-1} y_1 = x_1 = x_2$.

2. Teorema. G es una inversa generalizada de T.

Prueba:

(i) G es lineal.

$$G(y + s) = G((y_1 + s_1) + (y_2 + s_2))$$

donde $y = y_1 + y_2$, $s = s_1 + s_2$ y

$y_1 , s_1 \in R$; $y_2 , s_2 \in S$

$$= T_o^{-1} (y_1 + s_1)$$

$$= T_o^{-1} y_1 + T_o^{-1} s_1$$

$$= Gy + Gs .$$

$$G(\lambda y) = G(\lambda y_1 + \lambda y_2)$$

$$= T_o^{-1} (\lambda y_1)$$

$$= \lambda T_o^{-1} (y_1)$$

$$= \lambda Gy .$$

(ii) G es una invesa generalizada de T .

$TGTx = TG(Tx)$

$= TG(Tx_1)$ puesto que $x = x_1 + x_2$ y $x_1 \in M$, $x_2 \in K$

$= T(G(Tx_1))$ Propiedad asociativa de las transf. lineales

$$
\begin{aligned}
&= T(T_o^{-1}(Tx_1)) && \text{por (1)}\\
&= T(T_o^{-1}(T_o x_1)) && \text{puesto que } x_1 \in M\\
&= Tx_1 && \\
&= Tx_1 + Tx_2 && Tx_2 = 0 \text{ puesto que } x_2 \in K\\
&= T(x_1 + x_2) && \text{linealidad de } T\\
&= Tx &&
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$TGT = T$$

Se deja al lector interesado probar los siguientes hechos:

3. T a su vez es una inversa generalizada de G. Esto es, $GTG = G$.

4. TG, GT son idempotentes. Esto es, $(TG)^2 = TG$ y $(GT)^2 = GT$.

5. El núcleo de la transformación lineal T coincide con el núcleo de la transformación lineal GT.

6. El recorrido de la transformación lineal T coincide con el recorrido de la transformación lineal TG.

7. **Teorema. Inversa generalizada de Moore-Penrose**

Si en los espacio vectoriales U y V se define un producto interior y especializamos los subespacios complementarios M y S de K y R respectivamente, de tal manera que sean complementarios ortogonales ($M = K^{\perp}$, $S = R^{\perp}$) entonces la inversa generalizada que se produce se le llama inversa generalizada de Moore-Penrose. (Se nota por I.G. de $M|P$) y tiene las siguientes propiedades adicionales:

$(TG)^t = TG$

$(GT)^t = GT$

Además, la I.G. de $M|P$ es única.

Prueba (*)

$$
\begin{aligned}
\langle TGy , s \rangle &= \langle TGy , s_1 + s_2 \rangle && \text{donde } s = s_1 + s_2 , \; s_1 \in R \text{ y } s_2 \in R^{\perp} \\
&= \langle TGy , s_1 \rangle \\
&= \langle TGy_1 , s_1 \rangle && \text{donde } y = y_1 + y_2 , \; y_1 \in R \text{ y } y_2 \in R^{\perp} \\
&= \langle y_1 , s_1 \rangle .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle y, TGs \rangle &= \langle y_1 + y_2 , TGs \rangle && \text{donde } y_1 \in R \text{ y } y_2 \in R^{\perp} \\
&= \langle y_1 , TGs \rangle \\
&= \langle y_1 , TG(s_1 + s_2) \rangle && \text{donde } s = s_1 + s_2 , \; s_1 \in R \text{ y } s_2 \in R^{\perp} \\
&= \langle y_1 , TGs_1 \rangle \\
&= \langle y_1 , s_1 \rangle .
\end{aligned}
$$

(*) El producto interno de dos vectores, x y s, lo notamos por $\langle x,s \rangle$. La transpuesta de una transformación lineal T la definimos mediante la siguiente propiedad:

$$\langle Tx , s \rangle = \langle x , T^t s \rangle$$

Luego,

$$< TGy \ , \ s > \ = \ < y \ , \ TGs >.$$

y se concluye entonces que

$$(TG)^t = TG$$

De idéntica manera se prueba que

$$(GT)^t = TG \quad .$$

Vamos a probar a continuación la unicidad de la I.G de $M \mid P$.

Sea G^* una inversa generalizada de T que cumple las propiedades adicionales de la inversa generalizada de $M \mid P$. Entonces:

7.1 $G^* = G^* \, TG^*$

$G^{*t} = G^{*t} \, G^*T$

7.2 $< n \ , \ G^*Tx > \ = n^t \, G^* \, Tx \quad , \quad n \in K$

$= (G^{*t} n)^t \, Tx$

$= (G^{*t} \, G^*Tn)^t \, Tx$

$$= \langle G^{*t} G^* Tn , Tx \rangle$$

$$= 0 \qquad \text{Puesto que } Tn = 0$$

Por lo tanto, $G^* Tx \in k^{\perp}$ donde $x \in U$.

7.3 $T(x - G^*Tx) = Tx - TG^* Tx$

$$= Tx - Tx$$

$$= 0$$

Por lo tanto, $x - G^*Tx \in K$.

7.4 Si $x \in K^{\perp}$ por 7,2 y 7.3 se tiene $x - G^*Tx \in K \cap K^{\perp}$

Como K y $K^{\perp}$ son subespacios complementarios de U se concluye que

$$x = G^*Tx \qquad \text{donde} \qquad x \in K^{\perp}$$

7.5 Sea $s \in R^{\perp}$ entonces $TG^* s \in K$. Además

$$\begin{aligned} 0 &= \langle s , TG^* s \rangle \\ &= s^t TG^* s \\ &= s^t TG^*TG^* s \\ &= (TG^* s)^t TG^*s \\ &= \langle TG^* s , TG^* s \rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, $TG^*s = 0$ donde $s \in R^{\perp}$. Aplicando G^* a ambos lados de la ecuación tenemos

$$G^*s = 0 \quad \text{donde} \quad s \in R^{\perp}$$

Ahora estamos listos a probar la unicidad de la I.G. de M|P. En efecto,

$$\begin{aligned}
G^*y &= G^*(y_1 + y_2)\ , \quad y_1 \in R\ , \ y_2 \in R^{\perp} \ \text{ y } \ y = y_1 + y_2 \\
&= G^*(Tx + y_2)\ , \quad y_1 = Tx \ \text{ y } \ x \in K^{\perp} \\
&= G^*Tx + G^*y_2 \\
&= x \quad \text{donde} \quad x \in K^{\perp}\ , \quad \text{por 7.4 y 7.5}\ .
\end{aligned}$$

Por la definición de G se tiene $Gy = x$. Por tanto $G^*y = Gy$ para todo $y \in V$.

Así, se ha probado que la I.G. de M|P para una transformación lineal es única.

Finalizaremos el presente artículo ilustrando cómo se obtiene la inversa generalizada G de una transformación lineal T.

Sea $T : u \to v$ con $u = M \oplus K$, $v = R \oplus S$. Además, sean $[u_1 , u_2]$ y $[v_1 , v_2]$ bases de M y R respectivamente y sean $[u_3 , u_4]$, $[v_3]$ bases de K y S respectivamente.

Sean
$$\begin{aligned}
Tu_1 &= \beta_{11}v_1 + \beta_{21}v_2 \\
Tu_2 &= \beta_{12}v_1 + \beta_{22}\, v_2
\end{aligned}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
Tx &= T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4) \\
&= \alpha_1(\beta_{11} v_1 + \beta_{21} v_2) + \alpha_2(\beta_{12} v_1 + \beta_{22} v_2) \\
&= (\beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2)\, v_1 + (\beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2) v_2 \\
&= T_o(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) \quad .
\end{aligned}
$$

Luego la matriz asociada a T_o en las bases $[u_1 \ , \ u_2]$, $[v_1 \ , \ v_2]$ de M y R respectivamente es

$$
[T_o] = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}
$$

y como se ha probado que $[T_o]$ es no-singular, entonces

$$[T_o]^{-1} = \frac{1}{\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}} \begin{bmatrix} \beta_{22} & -\beta_{12} \\ -\beta_{21} & \beta_{11} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta_{22}}{\Delta} & \frac{-\beta_{12}}{\Delta} \\ \frac{-\beta_{21}}{\Delta} & \frac{\beta_{11}}{\Delta} \end{bmatrix} \quad \text{, donde} \quad \Delta = \beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}\beta_{21}$$

Para conocer T_0^{-1} basta con conocer su comportamiento en las bases de R y M. Esto es,

$$T_o^{-1} v_1 = \frac{\beta_{22}}{\Delta} u_1 - \frac{\beta_{12}}{\Delta} u_2$$

$$T_o^{-1} v_2 = \frac{-\beta_{12}}{\Delta} u_1 + \frac{\beta_{11}}{\Delta} u_2$$

Ahora podemos definir G:

$$Gy = G(y_1 + y_2) , \quad y = y_1 + y_2 \quad y \quad y_1 \in R , y_2 \in S$$

$$= T_o^{-1} y_1$$

$$= T_o^{-1} (\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2)$$

$$= \xi_1 T_o^{-1} (v_1) + \xi_2 T_o^{-1} (v_2)$$

$$= \xi_1 \left(\frac{\beta_{22}}{\Delta} u_1 - \frac{\beta_{21}}{\Delta} u_2 \right) + \xi_2 \left(- \frac{\beta_{12}}{\Delta} u_1 + \frac{\beta_{11}}{\Delta} u_2 \right)$$

$$= \left(\frac{\beta_{22}}{\Delta} \xi_1 - \frac{\beta_{12}}{\Delta} \xi_2 \right) u_1 + \left(- \frac{\beta_{21}}{\Delta} \xi_1 + \frac{\beta_{11}}{\Delta} \xi_2 \right) u_2 \ .$$

REFERENCIAS

[1] GLENCROSS, M.I., WONG, E., PLANITZ M. Three slants on the generalized Inverse. **Math. Gazzete,** 173-185, (19).

[2] JAMES, M. The generalized Inverse. **Math. Gazzete,** June, 109-114 (1978).

[3] ROBINSON, D.W.:On the generalized Inverse of an arbitrary linear transformation. **Amer. Math. Monthly.** Vol. 69 No. 5, 412-416. (1962).