Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas, UIS
Vol. 7 No. 1, enero-junio 1989

UN METODO ELEMENTAL PARA ENCONTRAR NUMEROS IRRACIONALES*

IVAN CASTRO CHADID**

Uno de los temas que se tratan con más descuido en los primeros semestres universitarios es el relativo a los números irracionales. Usualmente nos contentamos con dar la tradicional demostración atribuida a Híppasos de Metaponto, de la escuela pitagórica (siglo quinto antes de Cristo), sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, y se les informa a los estudiantes que hay más irracionales que racionales, situación que terminan aceptándola así no conozcan otros ejemplos que no estén relacionados con $\sqrt{2}$.

Aunque pruebas como las de la irracionalidad de π y e debidas a Johann Lambert en 1761 y Leonhard Euler en 1737 tienen más de 200 años, son muy pocos los docentes que las presentan en sus cursos; ni siquiera se da la sencilla demostración debida a Iván Niven de la irracionalidad de π (Ver [1]). Sabemos que otros números como sen 5, ln 2, arcocos $\frac{1}{7}$ y muchos más, son trascendentales y por lo tanto irracionales; este resultado lo publicó el matemático alemán Ferdinand Lin-

* Ponencia presentada en el V Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadísticas, Bogotá, 1987.

** Departamento de Matemáticas, Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

demann en 1882, pero su prueba está lejos de la comprensión de los estudiantes de los primeros semestres, ya que se sustenta principalmente sobre resultados de teoría de cuerpos (ver [2]). Algo similar sucede con el criterio de irreductibilidad de Eisenstein, que nos permite demostrar la irracionalida de números del tipo $\sqrt[n]{P}$

Por los motivos anteriormente planteados, creemos conveniente presentar un reciente resultado debido al profesor Alan E. Parks [3], que nos va a permitir demostrar la irracionalidad de una ilimitada cantidad de números reales, sin tener que recurrir a mayores herramientas que las que nos da un curso elemental de cálculo diferencial y el teorema fundamental del cálculo.

Definición:

Sea $c \in \mathbb{R}_+$ y f una función continua de [0, c] en $\mathbb{R}$, positiva en (0,c). Diremos que f es una función especial para c (F.e. para c), si existe una sucesión de funciones f_1 , f_2 , ... de [0,c] en R, derivables en (0,c) tales que:

1) $\forall x \in (0,c)$, $f'_n(x) = \begin{cases} f(x) , \text{ si } n=1 , \\ f_{n-1}(x) , \text{ si } n \geq 2 . \end{cases}$

2) $f_n(0)$ y $f_n(c)$ están en $\mathbb{Z}$, $\forall n \geq 1$.

Lema 1:

Si f es una F.e. para c y

$$P = \{ g(x) \in \mathbb{R}[x] \mid g^{(k)}_{(c)} \text{ y } g^{(k)}_{(o)} \text{ están en } \mathbb{Z},\ \forall k \in N \}$$

entonces $\displaystyle\int_0^c f(x)\ g(x)dx \in \mathbb{Z},\ \forall g(x) \in P$.

Demostración:

Sean $g(x) \in P$ con $\partial g=d$ (grado de g igual a d) y

$$h(x) = \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \ f_{n+1}(x)\ g^{(n)}_{(x)}$$

entonces

$$h'(x) = \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \ (f'_{n+1}(x) \quad g^{(n)}(x) + f_{n+1}(x) \quad g^{(n+1)}(x)\ )$$

$$= f(x)\ g(x) + \sum_{n=1}^{d} (-1)^n\ f_n(x)\ g^{(n)}(x) + \sum_{n=0}^{d-1} (-1)^n\ f_{n+1}(x)\ g^{(n+1)}(x) \ +$$

$$+ (-1)^d\ f_{d+1}(x)\ g^{(d+1)}(x)$$

$$= f(x)\ g(x)\ .$$

Luego

$$\int_0^c f(x)\ g(x)\ dx = (h(x)]_0^c$$

$$= \sum_{n=0}^{d} (-1)^n \left(f_{n+1}(c)\, g^{(n)}(c) - f_{n+1}(0)\, g^{(n)}(0)\right)$$

Como cada uno de estos sumandos es un entero, la suma será un entero.

Lema 2:

Si $g(x)$ y $h(x)$ están en P, entonces $g(x)\ h(x) \varepsilon P$.

Demostración:

Es una consecuencia inmediata de la igualdad

$$(gh)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}_{(x)}\, h^{(n-k)}(x)$$

Observación:

Si $c = \frac{m}{n}$ con $m, n \varepsilon Z_+$ y $t(x) = m - 2nx$, entonces $t(x) \varepsilon P$.

Lema 3:

Si $g_k(x) = \dfrac{x^k(m-nx)^k}{k!}$ $k \varepsilon N$ y $c = \dfrac{m}{n}$ con $m,n \varepsilon Z_+$,

entonces $g_k(x) \varepsilon P$.

Demostración:

Por inducción:

1) $g_o(x) = 1$. Luego $g_o(x) \varepsilon P$.

2) Supongamos que $g_{k-1}(x) \varepsilon P$, veamos que $g_k(x) \varepsilon P$.

En efecto:

$$g'_k(x) = \frac{1}{k!}(k\ x^{k-1}(m-nx)^k - knx^k(m-nx)^{k-1})$$

$$= g_{k-1}(x)\ t(x)$$

Como $g_{k-1}(x)$ y $t(x)$ están en P , por el Lema 2 tenemos

que $g_{k-1}(x)\ t(x) \varepsilon P$.

Luego $g'_k(x) \varepsilon P$.

Para que $g_k(x) \varepsilon P$ sólo falta ver que $g_k(0)$ y $g_k(c)$ son enteros, lo cual es evidente ya que $g_k(0) = 0$ y $g_k(c) = 0$.

Lema 4:

Si $c = \dfrac{m}{n}$ con $m,n \varepsilon \mathbf{Z}_+$ y $g_k(x) = \dfrac{x^k(m-nx)^k}{k!}$ $k \varepsilon N$, entonces

$$\int_0^c f(x)g_k(x)\ dx\ \varepsilon\, \mathbb{Z}_+ \ .$$

Demostración:

De los lemas 3 y 1 se desprende que $\int_0^c f(x)\ g_k(x)\ dx\ \varepsilon\, Z$

Como g_k y f son continuas en $[0,c]$ y positivas en $[0,c]$ y positivas en $(0,c)$ entonces $\int_0^c f(x)g_k(x)dx > 0$.

Lema 5:

Si $c = \frac{m}{n}$ con $m,n\ \varepsilon\ \mathbb{Z}_+$ y $g_k(x) = \frac{x^k (m-nx)^k}{k!}$ $k\ \varepsilon \mathbb{N}$,

existe $N\, \varepsilon\, \mathbb{N}$ tal que $\forall\ k \geq N$, $0 < \int_0^c f(x)g_k(x)dx < 1$.

Demostración:

Sea $h(x) = x(m-nx)$ $\forall x\, \varepsilon\, [0,c]$. Como f y h son continuas y positivas en $[0,c]$, existen $M > 0$ y $L > 0$ tales que $f(x) \leq M$ y $h(x) \leq L$ $\forall x\, \varepsilon\, [0,c]$.

Por lo tanto,

$$0 < \int_0^c f(x)\ g_k(x)\ dx \leq CM\ \frac{L^K}{K!} \quad \forall\ k\, \varepsilon\, \mathbb{Z}_+ \ .$$

Dado que $\lim\limits_{K\to\infty} \frac{L^K}{K!} = 0$, existe $N\, \varepsilon\, \mathbb{Z}_+$ tal que $\forall K \geq N$,

$$0 < CM \frac{L^K}{K!} < 1 .$$

De donde, $\forall\ k \gtreqqless N$ $\qquad 0 < \int_0^c f(x)g_k(x)dx < 1$.

Teorema

Si f es una F.e. para c, entonces c es irracional.

Demostración:

Si c fuera racional, los lemas 4 y 5 nos conducirían a una contradicción.

Corolario 1:

Si cos r y sen r son racionales, con $0 < |r| \leq \pi$, entonces r es irracional .

Demostración:

Como cos $|r|$ y sen $|r|$ son racionales, existe $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que m cos $|r|$ y m sen $|r|$ son enteros.
Sea $f(x) = m$ senx $\forall x \in [0, |r|]$, f es una f.e. para $|r|$, entonces $|r|$ es irracional y por lo tanto r es irracional.

Ejemplo 1:

Como cos $\pi = -1$ y sen $\pi = 0$ entoces π es irracional.

Ejercicio 1:

Sean $x, y, z \in Q$ tales que $x^2 + y^2 = z^2$ y $zy \neq 0$, entonces arcocos $\frac{x}{z}$ es irracional.

Demostración:

1) Si $x=0$, arcocos $\frac{x}{z} = \frac{\pi}{2}$ que es un número irracional.

2) Si $x \neq 0$. Se presentan las siguientes posibilidades:

2-1) Que $xz > 0$ y $yz > 0$.
En este caso existe un único ángulo $\Theta \varepsilon (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $\cos \Theta = \frac{x}{z}$ y sen $\Theta = \frac{y}{z}$.

Aplicando el corolario 1 tenemos que θ es irracional. De donde arcocos $\frac{x}{z}$ y arcosen $\frac{y}{z}$ son irracionales.

2-2) Que $xz > 0$ y $yz < 0$.
En este caso existe un único ángulo $\Theta \varepsilon (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que $\cos \Theta = \frac{x}{z}$ y sen $\Theta = \frac{y}{z}$ como $0 < |\Theta| < \frac{\pi}{2}$, aplicando el corolario 1 se tiene que arcocos $\frac{x}{z}$ y arcosen $\frac{y}{z}$ son irracionales.

2-3) Que $xz < 0$ y $yz > 0$.

Existe un único ángulo $\Theta \varepsilon (\frac{\pi}{2}, \pi)$ tal que $\cos \Theta = \frac{x}{z}$ y sen $\Theta = \frac{y}{z}$. Luego por el corolario 1 tenemos que arcos $\frac{x}{z}$ y arcosen $\frac{y}{z}$ son irracionales.

Corolario 2:

Si $r \in Q_+$ y $r \neq 1$, Ln r es irracional.

Demostración:

1) Si $r > 1$ entoces $\text{Ln } r > 0$. Como $r \in Q_+$, existen m y n en Z_+ tales que $r = \frac{m}{n}$.

$f(x) = n\, e^x \;\; \forall\, x \in [0, \text{Ln } r]$ es una F.e para Ln r.

Por lo tanto Ln r es irracional.

2) Si $0 < r < 1$, entoces $\frac{1}{r} \in Q_+$ y $\frac{1}{r} > 1$. Aplicando 1) tenemos que $\text{Ln } r^{-1}$ es irracional y por lo tanto Ln r es irracional.

BIBLIOGRAFIA

[1] NIVEN, Iván. "A simple proof of the irrationality of π", **Bull. Amer. Math. Soc.,** 53(1947) 509.

[2] CASTRO Iván. "El teorema de Lindemann y la trascendencia de π: **Segundo Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística,** U. Pedagógica Nacional, Bogotá, 1985.

[3] PARKS, Alan E. "π,e, and other irrational numbers". **Amer. Math. Monthly,** November 1986, pp. 722-723.