Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 7 No. 2, diciembre de 1989

UTILIZACION DEL COMPUTADOR CON RELACION A LA ENSEÑANZA DEL PROCESO DE GAUSS

Rubén D. Nieto C. *

Este artículo se divide en dos partes:

I) FUNDAMENTACION

Se presentan aquí algunos aspectos teóricos del álgebra lineal que establecen una manera, posiblemente nueva en ciertos aspectos, de introducir y analizar el concepto de matriz escalonada.

II) FORMULACION

Utilizando algunas ideas presentadas en la primera parte se formula, mediante diagramas de flujo, un caso especial del proceso de Gauss-Jordan facilitando de esta manera su comprensión e introducción en el Computador.

I) FUNDAMENTACION

1) Convenio.

a) Dado un conjunto finito S al número de sus elementos le representaremos con $|S|$.

b) Dado un entero positivo n, al **segmento inicial de orden** n le simbolizaremos con σ_n, ésto es:

$$\sigma_n = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

c) Denotaremos la i-ésima entrada del vector V con $V(i)$ y la i,j entrada de la matriz M con $M(i,j)$.

d) M_i será la i-ésima fila de la matriz M y M^j su j-ésima columna.

e) A la matriz idéntica de orden m la representaremos con U.

2) Definición.

Sea A una matriz de dimensión $m \times n$ con $R \geq 1$ filas no nulas y que es de la

* Profesor Asistente, Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle, Cali, Colombia.

forma

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B \\ -- \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} R \\ \\ m-R \end{array} \\ n & \end{array}$$

donde:

a) B es un bloque de dimensión $R \times n$ que no tiene fila alguna que sea nula.

b) 0 es un bloque nulo de dimensión $(m - R) \times n$ (que no existe si $R = m$).

Entonces:

Definiremos la aplicación $L = L_A$ del conjunto $\{0\} \cup \sigma_R \cup \{R+1\}$ en el conjunto $\{0\} \cup \sigma_n \cup \{n+1\}$ asì

i) $L(0) = 0$.

ii) Para $k \in \sigma_R$ se tiene $L(k) = \min\{j \in \sigma_n : A(k, j) \neq 0\}$.

iii) $L(R+1) = n+1$.

3) Definición.

a) Sea A una matriz como en la definición anterior, entonces A es matriz escalonada (por filas) si su aplicación $L = L_A$ es estrictamente creciente (y por tanto inyectiva), ésto es:

$$0 = L(0) < L(1) < L(2) < \ldots < L(R-1) < L(R) < L(R+1) = n+1.$$

b) Si E es matriz escalonada diremos que R es su rango, $N = n - R$ su nulidad (por columnas) y $L = L_E$ su aplicación asociada.

Con base en las anteriores definiciones se demuestra, sin mayor dificultad, la siguiente proposición:

4) Proposición.

Sea E una matriz escalonada, entonces

a) $x \leq L(x)$;

b) $L(x) + y \leq L(x+y)$;

c) $1 \leq L(x+1) - L(x) \leq L(x+1) - x$;

d) $x \leq y \Rightarrow L(x+1) - x \leq L(y+1) - y$.

5) Definición.

Respecto de la matriz escalonada E, después de tomar $S = \{0, 1, 2, \ldots, R\}$, definamos:

a) para $j \in \sigma_n$ el conjunto

$$S_j = \{x \in S : L(x+1) - x > j\};$$

b) para $k \in S$ los intervalos de enteros

i) $I_k = \{x \in S : L(k) - k < x < L(k+1) - k\}$;

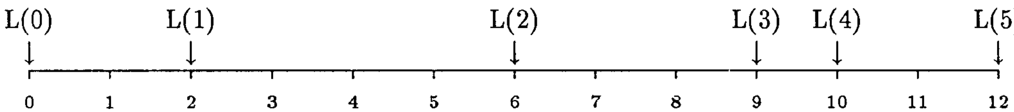
ii) $J_k = \{x \in S : L(k) < x < L(k+1)\}$;

c) el conjunto Γ así:

$$\Gamma = \{k \in S : J_k \text{ no es vacío}\}.$$

6) Ejemplo.

Sea E una matriz escalonada de $n = 11$ columnas y rango $R = 4$ cuya aplicación asociada L luce así:



Entonces:

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{0,1,2,3,4\} & \qquad S_5 &= \{2,3,4\} \\ S_2 &= \{1,2,3,4\} & S_6 &= \{2,3,4\} \\ S_3 &= \{1,2,3,4\} & S_7 &= \{4\} \\ S_4 &= \{1,2,3,4\} & S_8 &= \emptyset \end{aligned}$$

$$N = n - R = 11 - 4 = 7.$$

Obsérvese que $S_j = \emptyset$ para $j = N+1, N+2, \ldots, n = 11$. Además:

$$\begin{aligned} I_0 &= (0,2) = \{1\} & \qquad J_0 &= (0,2) = \{1\} \\ I_1 &= (1,5) = \{2,3,4\} & J_1 &= (2,6) = \{3,4,5\} \\ I_2 &= (4,7) = \{5,6\} & J_2 &= (6,9) = \{7,8\} \\ I_3 &= (6,7) = \emptyset & J_3 &= (9,10) = \emptyset \\ I_4 &= (6,8) = \{7\} & J_4 &= (10,12) = \{11\} \end{aligned}$$

El anterior ejemplo sirve también para ilustrar la siguiente proposición.

7) Proposición.

Con relación a la matriz escalonada E:

a) $j \leq N \Leftrightarrow S_j \neq \emptyset$

b) $i < j \Rightarrow S_j \subseteq S_i$

c) $|I_k| = L(k+1) - L(k) - 1 = |J_k|$

d) $I_k \cap I_{k+1} = J_k \cap J_{k+1} = \emptyset$

e) $I_k \subseteq \sigma_N, J_k \subseteq \sigma_n$

Demostración (a):

Suficiencia:

Si $j \leq N$ entonces:

$$L(R+1) - R = n + 1 - R = n - R + 1 = N + 1 > N \geq j$$

y así $R \in S_j$ con lo cual $S_j \neq \emptyset$.

Necesidad:

Procedamos por el absurdo. Supongamos que para algún $j \in \sigma_N$ se tiene $S_j \neq \emptyset$ con $j > N$. Se deduce $j \geq N + 1$ y además la existencia de por lo menos un $k \in S$ para el cual se cumple $L(k+1) - k > j$.

Como $k \in S$ vemos que $k \leq R$ y así en virtud de la proposición 4, se tiene:

$$N + 1 = n - R + 1 = n + 1 - R = L(R+1) - R \geq L(k+1) - k > j \geq N + 1$$

Es decir $N + 1 > N + 1$ o sea $1 > 1$ que es ostensiblemente una falsedad.

8) Definición.

Vinculadas a la matriz escalonada E se definen las siguientes aplicaciones $M = M_E$ y $D = D_E$ así:

Para $j \in \sigma_N$ tomemos

a) $M(j) = minS_j$

b) $D(j) = M(j) + j$

A la aplicación $D = D_E$ le llamaremos **aplicación complementaria asociada a la matriz** E.

En el ejemplo 6) se tiene:

a) $M(1) = 0$, $M(2) = 1$, $M(3) = 1$, $M(4) = 1$, $M(5) = 2$, $M(6) = 2$, $M(7) = 4$.

b) $D(1) = 1$, $D(2) = 3$, $D(3) = 4$, $D(4) = 5$, $D(5) = 7$, $D(6) = 8$, $D(7) = 11$.

9) Proposición.

La aplicación D complementaria asociada a la matriz escalonada E es estrictamente creciente y por tanto inyectiva.

Demostración:

En el supuesto $i < j$, la parte b de la proposición 7 implica $M(i) \leq M(j)$ deduciéndose:

$$D(i) = M(i) + i < M(j) + j = D(j).$$

10) Proposición.

Respecto de la matriz escalonada E, se tiene:

a) $I_k = M^{-1}(k)$

b) $D(I_k) = J_k$

Demostración (b):

Bajo la presunción $j \in D(I_k)$ se deduce la existencia de un $i \in I_k$ tal que $D(i) = j$ con lo cual:

$$\begin{aligned} & L(k) - k < i < L(k+1) - k \\ \therefore \quad & L(k) < k + i < L(k+1) \end{aligned}$$

Como $i \in I_k$ la parte a de esta misma proposición implica $i \in M^{-1}(k)$ es decir $M(i) = k$ y así:

$$\begin{aligned} & L(k) < M(i) + i < L(k+1) \\ \therefore \quad & L(k) < D(i) < L(k+1) \end{aligned}$$

deduciéndose que $j = D(i)$ está en J_k.

De esta manera hemos logrado demostrar

$$D(I_k) \subseteq J_k$$

Más aún, como D es inyectiva y además $|I_k| = |J_k|$ (Proposición 7) concluímos

$$D(I_k) = J_k$$

11) Convenio.

Si E es una matriz escalonada, entonces:

a) Al recorrido de la aplicación D le representaremos con R_D.

b) R_L será el recorrido de la aplicación L **pero restringida al conjunto** σ_R.

12) Proposición.

Con relación a la matriz escalonada E :

a) $\sigma_N = \bigcup_{k \in \Gamma} I_k$

b) $R_D = \bigcup_{k \in \Gamma} J_k$

Demostración (b):

Probemos la inclusión $\bigcup_{k \in \Gamma} J_k \subseteq R_D$.

La suposición $j \in \bigcup_{k \in \Gamma} J_k$ implica la existencia de por lo menos un intervalo J_k con $j \in J_k$ deduciéndose:

$$k \leq L(k) < j < L(k+1)$$

$$0 \leq L(k) - k < j - k < L(k+1) - k$$

Tomando $i = j - k$ se tiene $1 \leq i$ y además $i \in I_k$ con lo cual $i \in M^{-1}(k)$ es decir $M(i) = k$ o sea $k = minS_i$ resultando $S_i \neq \emptyset$.

La proposición 7 implica $i \leq N$ mostrándonos así que $i \in \sigma_N$. Además:

$$j = k + i = M(i) + i = D(i)$$

lo cual nos lleva a la conclusión

$$j \in R_D$$

13) Proposición.

Para toda matriz escalonada E se tiene $\sigma_n \setminus R_L = R_D$.

Demostración:

Probemos la inclusión $\sigma_n \setminus R_L \subseteq R_D$. Bajo la hipótesis $j \in \sigma_n$ pero $j \notin R_L$ consideremos el conjunto

$$I = \{i \in \sigma_R : L(i) < j\}$$

Caso 1. $I = \emptyset$.

Se tiene $L(i) \geq j$ para $i = 1, 2, \ldots, R$ y así en particular $L(1) \geq j$. Si $L(1) = j$ se tendría $j \in R_L$ que no puede ser por hipótesis, deducimos entonces que $L(1) > j$ con lo cual $L(0) < j < L(1)$ o sea $j \in J_0$ concluyéndose por 12 que $j \in R_D$.

Caso 2. $I \neq \emptyset$

Tomemos $k = max\ I$ teniéndose entonces $L(k) < j$. Se presentan los dos siguientes subcasos:

a) Cuando $k = R$, se tiene:

$$j \leq n < n + 1 = L(R + 1)$$
$$\therefore \quad L(k) < j < L(k + 1).$$

Es decir $j \in J_k$ concluyéndose también por 12 que $j \in R_D$.

b) Cuando $k < R$.

Se tiene $L(k + 1) \geq j$ porque de lo contrario el elemento maximal de I no sería k.

Más aún, si $L(k + 1) = j$ entonces $j \in R_D$ contradiciéndose la hipótesis, así que

$$L(k) < j < L(k + 1)$$

y de nuevo se concluye que $j \in R_D$.

Las afirmaciones

a) L es inyectiva.

b) $R_L \subseteq \sigma_n$.

que son ciertas para toda matriz escalonada E aunadas a las dos últimas proposiciones nos permiten establecer:

14) Corolario.

Para toda matriz escalonada E se tiene:

a) $R_L \cap R_D = \emptyset$

b) $R_L \cup R_D = \sigma_n$

15) Definición.

A la matriz escalonada E se le llama Escalonada Reducida (por filas) si $E^{L(j)} = U^j$ para $j = 1, 2, \ldots, R$.

II) FORMULACION.

1) Dada una matriz A de m filas y n columnas con entradas todas enteras, se formula una manera sencilla, (que puede ser llevada a un computador pequeño, por ejemplo al computador CASIO PB 770), de obtener una de las siguientes opciones:

a) Una matriz escalonada H equivalente por filas a la matriz A ([1]).

b) Una matriz $H = pE$ (p entero positivo) múltiplo escalar de la matriz escalonada reducida E equivalente por filas a la matriz A. En caso de ser A cuadrada se obtiene además el determinante K_A de la matriz A ([2]).

2) Convenio.

a) Para indicar dónde principió un diagrama de flujo usaremos el símbolo Ⓟ y para indicar dónde termina usaremos el símbolo Ⓣ ([3]).

b) $\theta[m]$ será un vector o arreglo de m entradas todas nulas, ésto es $\theta(1) = 0$, $\theta(2) = 0, \ldots, \theta(m) = 0$.

c) Para indicar la operación de asignación usaremos el símbolo "$\leftarrow$" ([3]).

d) Para indicar un nodo (punto) donde hay que tomar una decisión usaremos un rombo junto con las letras S para significar "Sí" y N para significar "No".

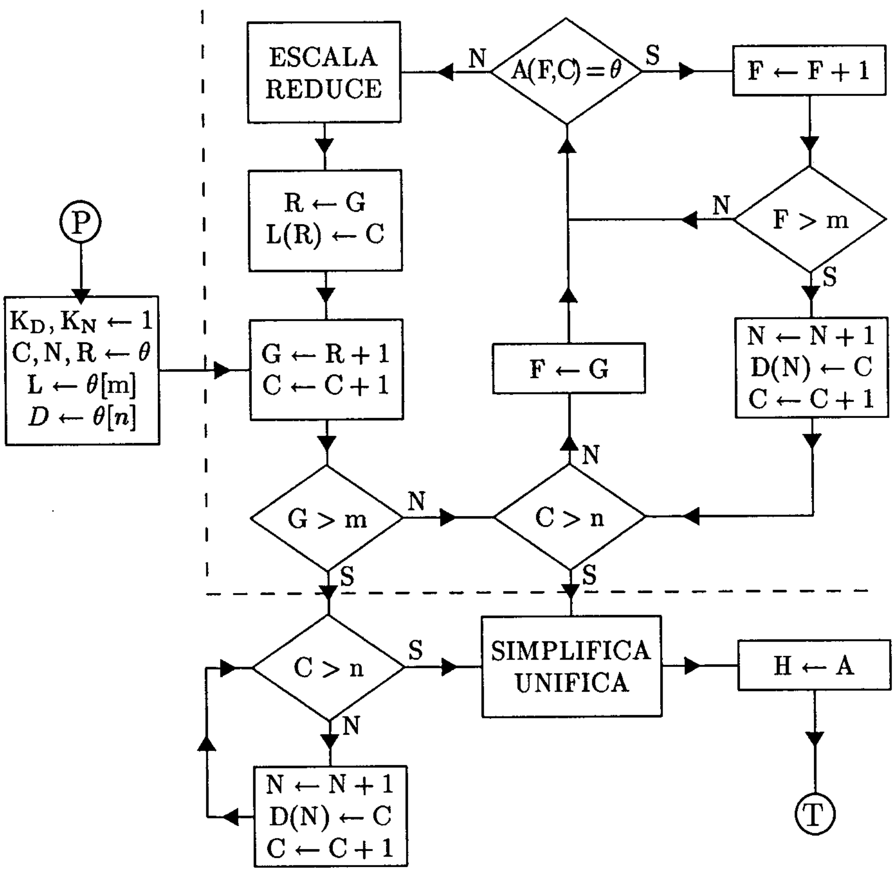
3)a) El subprograma "MENU" asigna a la variable O$ el valor "E" si se desea la primera opción y el valor "R" si sedesea la segunda opción.

b) El subprograma "RECIBE A" introduce al computador la matriz A de m filas y n columnas. El valor de u es n a menos que el programador considere otras posibilidades.

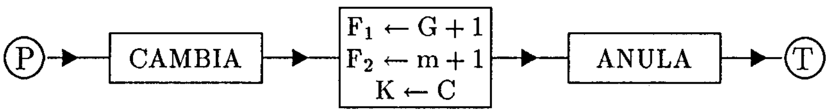
c) El subprograma "PRESENTA H" enseña la matriz H en una pantalla o la escribe mediante impresora.

DIRIGE $\left\{\right.$ Dependiendo de la opción escogida para O$ en el menu obtiene a partir de la matriz A:

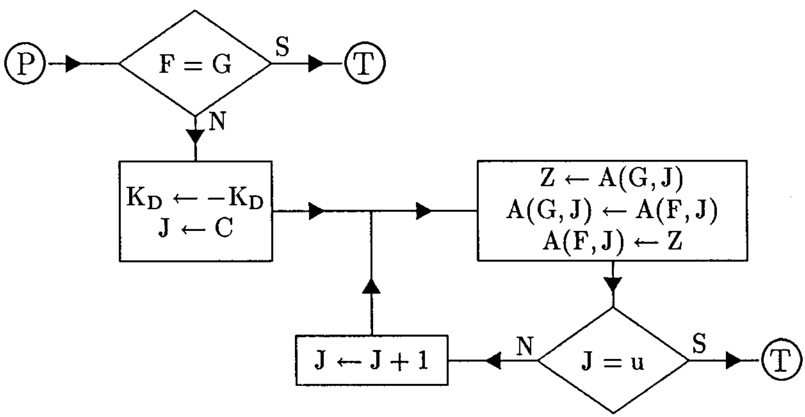
1) Una matriz H escalonada equivalente por filas a A si O$="E".
2) Si O$="R":
   a) Una matriz H=pE (p entero positivo) múltiplo escalar de la matriz escalonada reducida E equivalente por filas a A.
   b) K_A= determinante de A si A es cuadrada.



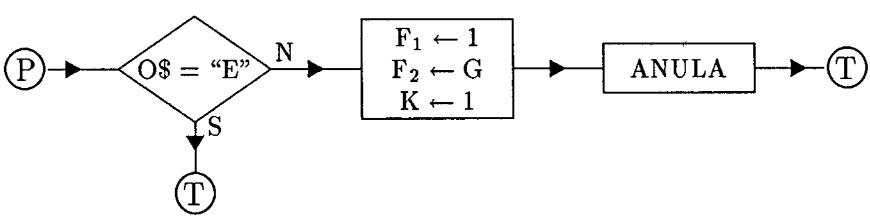
ESCALA { Logra que $A^C(i) = \theta$ para $i = G + 1, \ldots, m.$ }



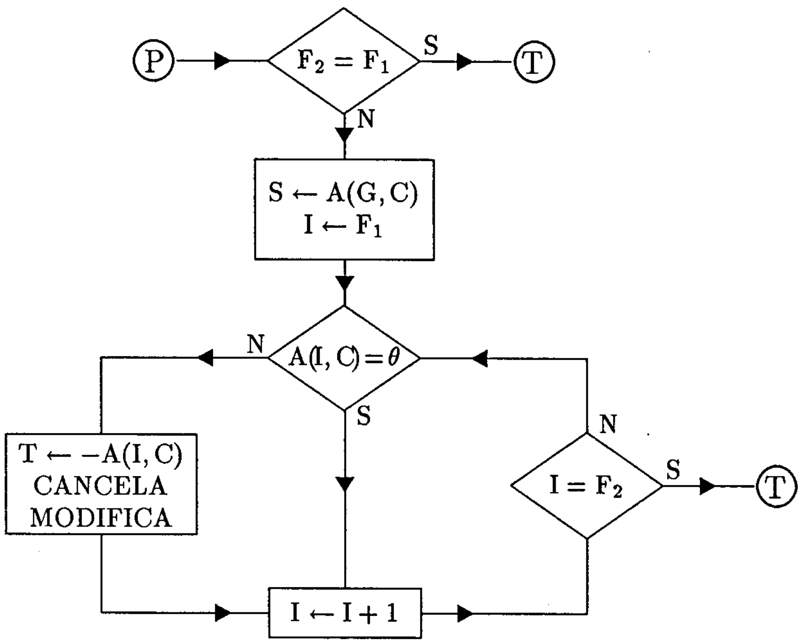
CAMBIA { Si $F \neq G$ intercambia las filas F y G de la matriz A. }



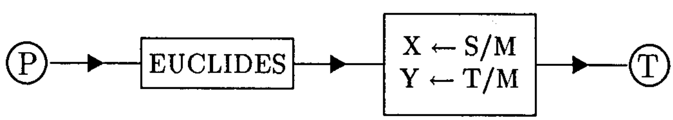
REDUCE { Logra que $A^C(i) = \theta$ para $i = 1, 2, \ldots, G - 1.$ }



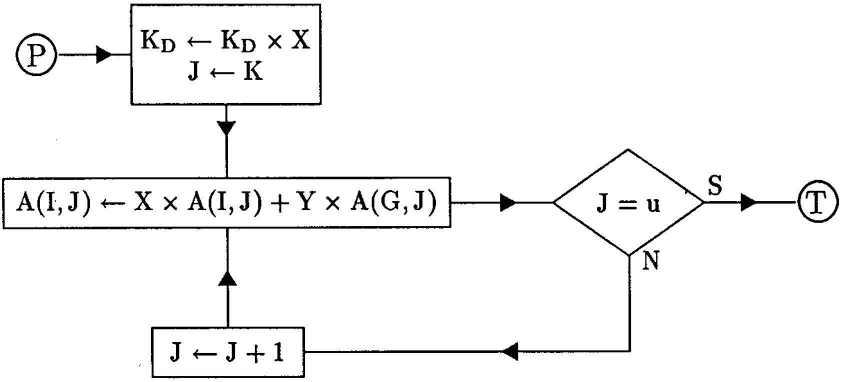
ANULA $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mediante operaciones elementales (por filas) transforma la matriz} \\ \text{A de tal manera que } \mathrm{A^C(i)} = \theta \text{ para } i = F_1, F_1+1, F_1+2, \ldots, F_2-1 \end{array} \right\}$



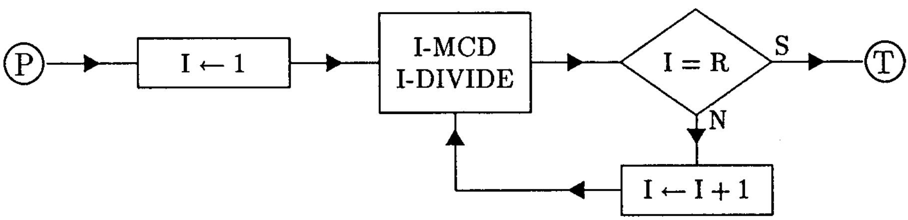
CANCELA $\left\{ \begin{array}{l} \text{Cancela factores comunes a los enteros S y T reemplazandolos} \\ \text{luego por X y Y respectivamente.} \end{array} \right\}$



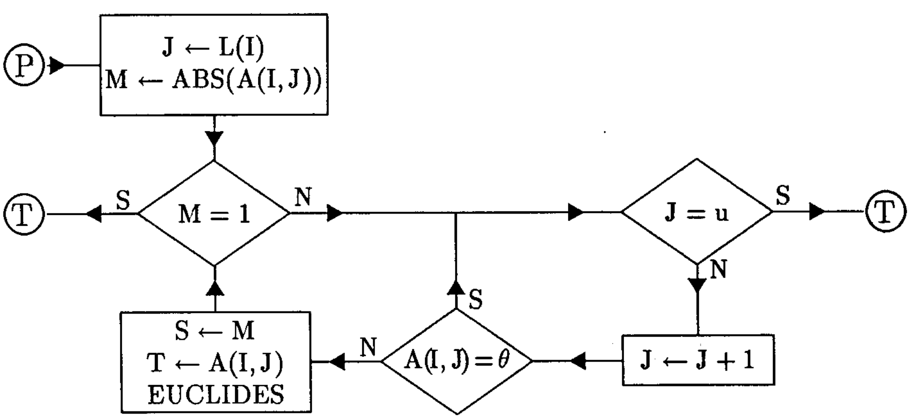
MODIFICA { Reemplaza la fila A_I de la matriz A por $xA_I + yA_G$. }



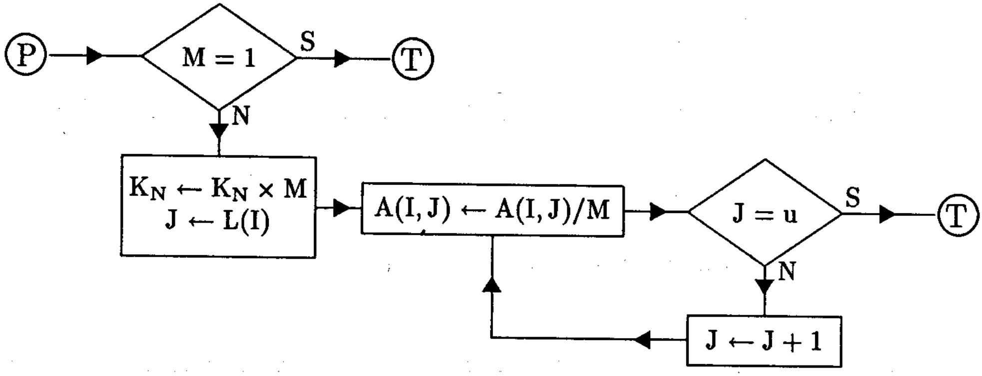
SIMPLIFICA { Para cada fila no nula de la matriz A cancela los factores comunes de todas las entradas de esa fila. }



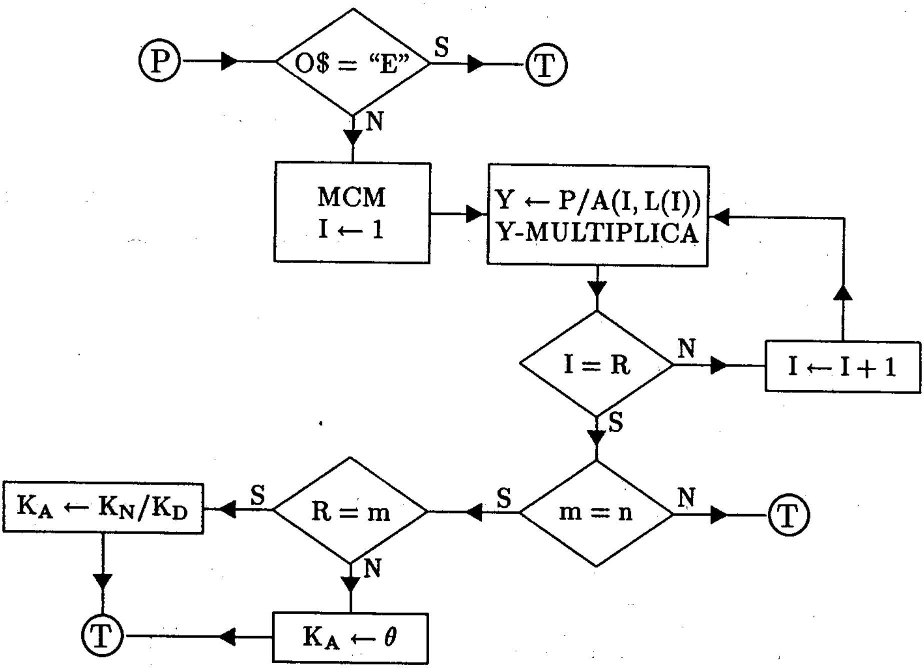
I – MCD { Obtiene el máximo común divisor de todas las entradas no nulas de la fila I de la matriz A. }



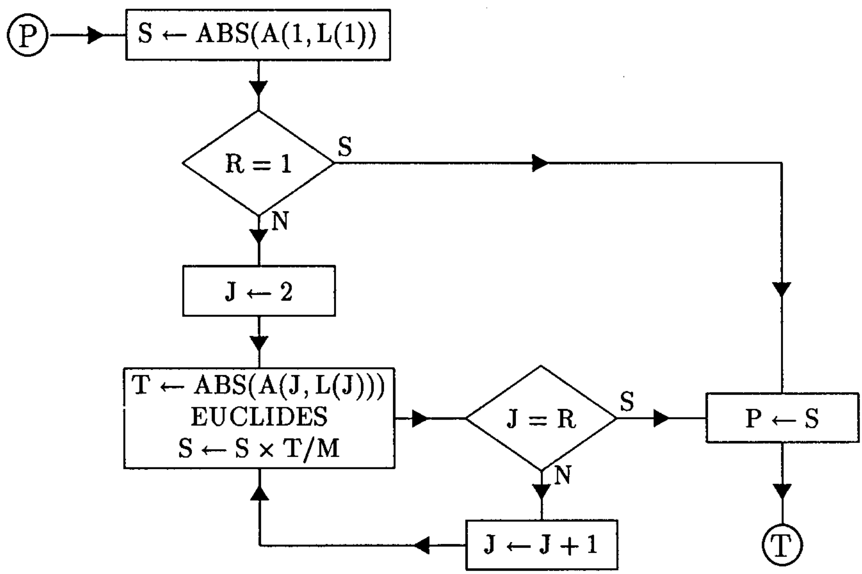
I – DIVIDE { Divide todas las entradas de la fila I de la matriz A por M. }



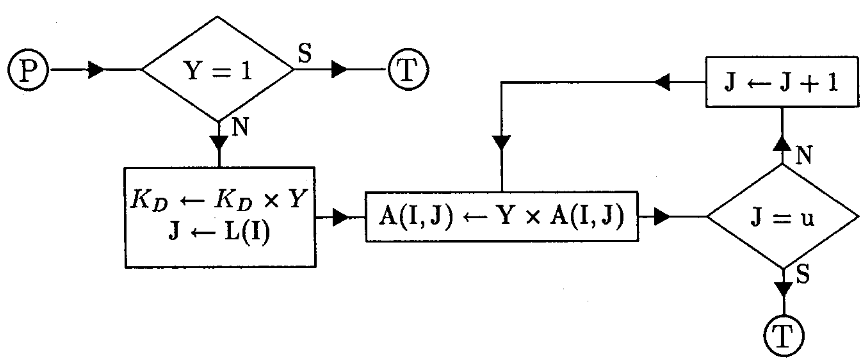
UNIFICA { Logra que todos los pivotes de A sean iguales. }



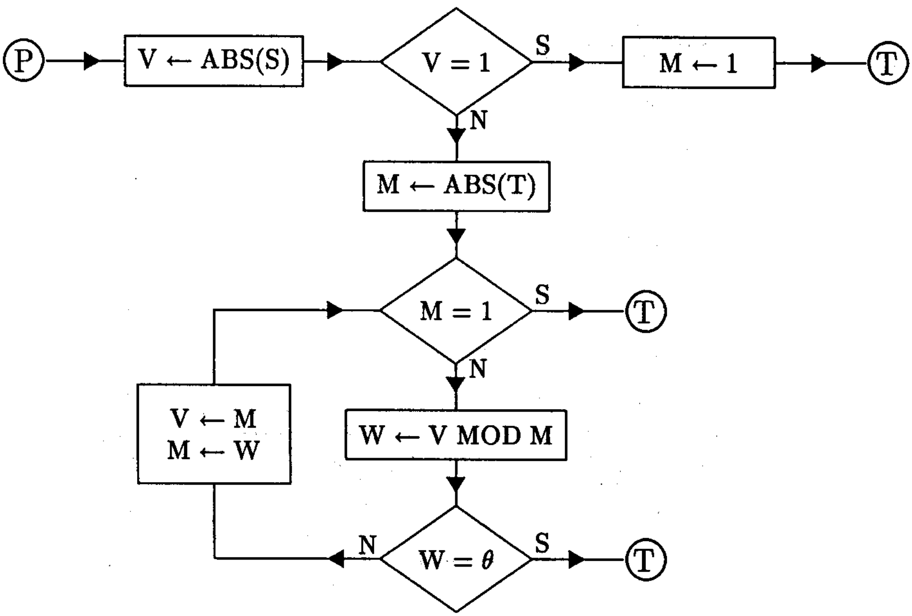
MCM { Obtiene el mínimo común múltiplo de todos los pivotes. }



Y − MULTIPLICA { Multiplica toda la fila I de A por el factor Y. }



EUCLIDES { Obtiene el máximo común divisor de los enteros S y T. }



REFERENCIAS

[1] LIPSCHUTZ S., *Algebra Lineal.* McGraw-Hill, Mexico D.F., 1970.

[2] NOMIZU K., *Fundamentals of Linear Algebra.* McGraw-Hill,New York, 1966.

[3] TREMBLAY J., BUNT R., *Indroducción a la Ciencia de las Computadoras. Enfoque Algorítmico.* McGraw-Hill, Mexico D.F., 1982.