Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 7 No. 2, diciembre de 1989

MAL-CONDICIONAMIENTO: RAICES DE POLINOMIOS

Bruce H. Edwards *
Carlos E. Fernández O.**

1. DESCRIPCION GENERAL DEL PROBLEMA DEL MAL-CONDICIONAMIENTO.

El tema de mal-condicionamiento aparece repetidamente en las matemáticas numéricas, dando lugar con frequencia a interesantes sorpresas. El término mal-condicionamiento expresa una cierta característica de algunos problemas según la cual pequeños cambios en los datos pueden causar grandes cambios en la solución. Esos pequeños cambios pueden ser resultado de mediciones imprecisas o errores de redondeo.

Podemos formarnos una idea bastante buena de mal-condicionamiento de la siguiente manera. Supongamos que tenemos un problema para resolver con la calculadora. Por razones de la arimética interna de la máquina, los datos numéricos pueden ser ligeramente cambiados. Por ejemplo, en la mayoría de las calculadoras actuales, el número 1/3 no puede ser expresado internamente de una manera exacta, porque trabajan con base binaria.

---

* Department of Mathematics - University of Florida - Gainesville, Florida 32611

** Departamento de Matemáticas - Universidad de Antioquia - Medellín- Colombia.

Si un problema tiene como dato el número 1/3, necesariamente ocurrirá un pequeño error de redondeo en este dato, además de otros posibles errores de redondeo en otros datos y durante los cálculos. Si la solución obtenida con la calculadora es "muy diferente" de la verdadera solución del problema, decimos que el problema es mal-condicionado. Por ejemplo, tan (1/3(14.13717)≈-980762, pero tan (.333333(14.13717)) ≈270828.

Es bueno hacer énfasis en el hecho de que el mal-condicionamiento de un problema no depende del algoritmo empleado para resolverlo, sino que es inherente al problema. Es decir, es el problema mismo que es mal o bien-condicionado, no import a el método de resolución. En esto se diferencia del concepto de Estabilidad [1].

En este trabajo discutiremos el mal-condicionamiento en relación con el problema de encontrar las raíces de polinomios. En particular, veremos cómo cambian las raíces de polinomios si sus coeficientes son ligeramente perturbados. El lector puede estudiar otros aspectos del mal-condicionamiento, por ejemplo en la solución de ecuaciones lineales, en los artículos [3] y [4] que aparecieron muy recientemente.

2. ECUACIONES CUADRATICAS.

Consideremos primero el caso sencillo de una ecuación cuadrática:

$$f(x) = x^2 + a_1x + a_0$$

con raíces reales $r_1 > r_2$. Pensamos que las raíces de f(x) dependen de los coeficientes a_1 y a_0. Si cambiamos el coeficiente a_0. Si cambiamos el coeficiente a_0 por $a_0 + \epsilon$, entonces se puede aproximar el cambio en la raíz r_1, Δr_1:

$$\Delta r_1 \approx \frac{\partial r_1}{\partial a_0}\epsilon.$$

Si $r_1 = (-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0})/2$ y $r_2 = (-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0})/2$, es fácil comprobar que

$$\left|\frac{\partial r_1}{\partial a_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_0}} = \frac{1}{(r_1 - r_2)}$$

y entonces $\Delta r_1 \approx \epsilon/(r_1 - r_2)$ será grande si el término $(r_1 - r_2) \approx 0$. En particular, un polinomio cuadrático cuyas raíces son casi iguales es mal-condicionado. Invitamos al lector aplicar estas ideas con el primer problema propuesto al final del artículo.

3. EJEMPLO DE WILKINSON.

¡Pero el asunto es más complicado! Es posible que las raíces de un polinomio sean malcondicionadas aunque estas raíces estén bien separadas. Wilkinson [7] consideró el siguiente polinomio de grado 20:

$$f(x) = (x + 1)(x + 2)...(x + 19)(x + 20)$$

Como el polinomio aparece factorizado, es fácil ver que sus raíces son -1, -2, ..., -19, -20. Supongamos ahora que el polinomio no está factorizado y aparece entonces en la forma

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{19}x^{19} + x^{20}.$$

Si reemplazamos el coeficiente a_{19} por $b = a_{19} + 2^{-23}$, lo cual obviamente es un "cambio pequeñísimo", podría pensarse que las raíces del polinomio resultante,

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + bx^{19} + x^{20}$$

son muy parecidas a las raíces de f(x). ¡Pero no es así! Wilkinson encontró que las raíces de g(x) son "muy diferentes":

-1.000000000

-2.000000000

-3.000000000

-4.000000000

-4.999999928

-6.000006944

-6.999697234

-8.007267603

-8.917250249

-20.846908101

-10.095266145 ±0.643500904i

-11.793633881 ±1.652329728i

-13.992358137 ±2.518830070i

-16.730737466 ±2.812624894i

-19.502439400 ±1.940330347i

Observe que las raíces se han trasladado una distancia considerable, en el plano complejo, como respuesta a ese "cambio pequeño" en los datos. De acuerdo con lo explicado anteriormente, el problema de hallar los ceros de este polinominio es mal-condicionado.

4. TEORIA

Ahora veremos en más detalle lo que hemos ilustrado en las secciones anteriores. Siguiendo [6, p. 287], consideramos una raíz simple r del polinomio

$$p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 .$$

Hacemos una pequeña perturbación ϵ en un coeficiente de este polinomio, y formamos el polinomio perturbado:

$$q_\epsilon (x) = p(x) + \epsilon x^k.$$

Si ϵ es suficientemente pequeño, es posible mostrar que existe una función analítica $r(\epsilon)$ tal que $r(0) = r$ y $r(\epsilon)$ es una raíz simple de q_ϵ:

$$p(r(\epsilon)) + \epsilon r(\epsilon)^k = 0.$$

Derivando respecto a la variable ,

$$p'(r(\epsilon))r'(\epsilon) + r(\epsilon)^k + k\epsilon r(\epsilon)^{k-1} r'(\epsilon) = 0.$$

Si ponemos $\epsilon = 0$ se obtiene $r'(0) = -r^k/p'(r)$. Usando los primeros dos términos de una expansión de Taylor, llegamos a la aproximación:

$$r(\epsilon) \approx r(0) + \epsilon r'(0) = r - \epsilon r^k/p'(r)$$

Así que tenemos nuestra fórmula principal sobre el cambio en una raíz r causado por el cambio ϵ en el coeficiente de x^k:

$$(*) \qquad |r(\epsilon) - r| \approx \frac{r^k}{p'(r)} \epsilon$$

Miramos de nuevo la discusión de la ecuación cuadrática $p(x) = x^2 + a_1 x + a_0$. Aquí, $k = 0, p'(x) = 2x + a_1$, y la fórmula (*) nos dice:

$$|r(\epsilon) - r| \approx \frac{1}{2r_1 + a_1} \epsilon$$

Pero, $r_1 + r_2 = -a_1$, y entonces $2r_1 + a_1 = r_1 - r_2$, y llegamos a la aproximación de la segunda sección:

$$|\Delta r_1| = |r(\epsilon) - r| \approx \frac{1}{r_1 - r_2} \epsilon$$

Finalmente, volvemos al polinomio de Wilkinson en la tercera sección. miramos la raíz $r = -20$ bajo el cambio $\epsilon = 2^{-23}$ en el coeficiente de x^{19}. Así que $p'(-20) = -19!$ y la fórmula (*) nos da

$$|r(\epsilon) - r| \approx \frac{r^k}{p'(r)} \epsilon = \frac{20^{19}}{19!} 2^{-23} = 5.138$$

Nótese que el cambio actual fue mucho menos (0.8469). La estimación (*) mejora mientras ϵ tiende a cero.

5. PROBLEMAS PROPUESTOS.

Invitamos a los lectores a resolver los siguientes problemas y mandarnos sus soluciones.

1. Encontrar las raíces de los dos polinomios cuadráticos $x^2 - 2.1x + 1.1$ y $X^2 - 2.1x + 1.099$. Discutir el cambio en las raíces causado por la perturbación pequeña en el término constante.

2. Encontrar las raíces de los polinomios siguientes:

$$p(x) = x^5 - 15.00x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

$$q(x) = x^5 - 15.01x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

3. En el polinomio de Wilkinson, estimar el cambio en la raíz $r = -16$ causado por un cambio de ϵ en el coeficiente de x^5.

BIBLIOGRAFIA

[1] R.L. Burden, J.D. Faires, y A.C. Reynolds, Numerical Analysis, Prindle, Weber and Schmidt, second edition, 1981.

[2] Bruce H. Edwards y Patricia Sharpe, III-Conditioning: A Constant Surprise in Computational Mathematics, The College Mathematics Journal 16, No. 2 (1985), 141-148.

[3] Bruce H. Edwards y Carlos E. Fernández O., Mal-Condicionamiento, Matemática Enseñanza Universitaria, No. 41, Sep-Dic 1987, 3-11.

[4] Carlos E. Fernández O. y Bruce H. Edwards, Mal-Condicionamiento, Parte II, Sistemas de Ecuaciones, Matemática Enseñanza Universitaria, No. 42, Marzo-Junio 1988, 19-30.

[5] William Hager, Applied Numerical Linear Algebra, Prentice-Hall, 1988.

[6] J. Stoer and R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Springer-Verlag, 1980.

[7] J.H. Wilkinson, The Evaluation of the Zeros of Ill-Conditioned Polynomials, Numer. Math 1 (1959), pages 150-180.