Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 7 No. 2, diciembre de 1989

TRANSFORMADA Z GENERALIZACION PARA $n^m f(n)$

José Angel Rueda R. *

La transformada Z facilita el análisis de sistemas de datos muestreados, especialmente cuando se necesitan las respuestas únicamente en el instante en que se hace el muestreo.

Tal transformada para una función f(n) se define asi:

$$Z[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).z^{-n} = F(z)$$

Al estudiar las propiedades de la transformada Z encontramos la de multiplicación por n:

$$Z[n.f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} nf(n)z^{-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-nz^{-n}) =$$

$$= -z\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-nz^{-n-1}) = -z\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\frac{d}{dz}z^{-n} =$$

$$= -z\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f(n).z^{-n}\right] =$$

$$= -z\frac{d}{dz}F(z) = -zF'(z)$$

Ahora podemos, aplicando la propiedad anterior, encontrar lo

* Licenciado en Matemática, UIS.
Profesor del Colegio Nuestra Señora del Pilar - Bucaramanga

correspondiente a $Z[n^2 f(n)]$, así:

$$Z[n^2 f(n)] = Z[n.nf(n)] = -z\frac{d}{dz}(Z[nf(n)]) =$$

$$= -z\frac{d}{dz}(-z\frac{d}{dz}Z[f(n)]) =$$

$$= z\, z\frac{d^2}{dz^2}F(z) + \frac{d}{dz}F(z) =$$

$$= z^2\frac{d^2}{dz^2}F(z) + z\frac{d}{dz}F(z)$$

Análogamente, aplicando la propiedad de multiplicación por n encontramos:

$$Z[n^2 f(n)] = z^2\frac{d^2}{dz^2}F(z) + z\frac{d}{dz}F(z)$$

$$Z[n^3 f(n)] = -z^3\frac{d^3}{dz^3}F(z) - 3z^2\frac{d^2}{dz^2}F(z) - z\frac{d}{dz}F(z)$$

$$Z[n^4 f(n)] = z^4\frac{d^4}{dz^4}F(z) + 6z^3\frac{d^3}{dz^3}F(z) + 7z^2\frac{d^2}{dz^2}F(z) + z\frac{d}{dz}F(z)$$

$$Z[n^5 f(n)] = -z^5\frac{d^5}{dz^5}F(z) - 10z^4\frac{d^4}{dz^4}F(z) - 25z^3\frac{d^3}{dz^3}F(z) -$$

$$- 15z^2\frac{d^2}{dz^2}F(z) - z\frac{d}{dz}F(z),$$

a partir de lo cual puede observarse que $Z[n^m f(n)]$ tiene la forma general

$$Z[n^m f(n)] = (-1)^m[K_m z^m\frac{d^m}{dz^m}F(z) + K_{m-1}z^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}F(z) + \ldots +$$

$$\ldots + K_1 z\frac{d}{dz}F(z)]$$

en donde los K_i representan los coeficientes que dependen de m.

El problema de la generalización buscada ahora se reduce a determinar un método para el cálculo de dichos coeficientes.

Una mirada a la historia de la Matemática nos muestra el triángulo que Pascal diseñó para calcular los coeficientes de un desarrollo binomial. La propuesta aquí es la de construir cierto triángulo mediante unas reglas fáciles de aplicar, mediante el cual obtengamos los coeficientes buscados.

Si utilizamos los coeficientes ya encontrados atrás para m= 1, 2,3 y 4, podemos formar el siguiente triángulo:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & 1 & & & & \rightarrow & m=1 \\
 & & 1 & & 1 & & & \rightarrow & m=2 \\
 & 1 & & 3 & & 1 & & \rightarrow & m=3 \\
1 & & 6 & & 7 & & 1 & \rightarrow & m=4
\end{array}
$$

A continuación vamos a demostrar que, por ejemplo, los coeficientes para m=5 pueden calcularse así:

Primer coeficiente: 1 (en cada línea siempre lo es)
Segundo coeficiente: 1.4 + 6 = 10
Tercer coeficiente: 6.3 + 7 = 25
Cuarto coeficiente: 7.2 + 1 = 15
Quinto coeficiente: 1.1 + 0 = 1 (en cada línea siempre lo es),

en donde debe notarse la utilización de los valores 1, 6, 7 y 1 tomados de la línea anterior (m=4).

Para la demostración matemática -y por lograr simplicidad en la notación- vamos a denotar

$$d^t = \frac{d^t}{dz^t}\,.$$

Supongamos entonces que los coeficientes para la línea correspondiente a m-1 son

$$1 \quad A \quad B \quad C \quad \ldots \quad 1$$

Entonces *

$$Z[n^{m-1} f(n)] = F(z) = -z^{m-1}d^{m-1}F(z) - Az^{m-2}d^{m-2}F(z) - $$
$$- Bz^{m-3}d^{m-3}F(z) - Cz^{m-4}d^{m-4}F(z) - \ldots - zd\,F(z)$$

---

* Hemos supuesto que m es par y de ahí el signo negativo

Calculando $Z[n^m f(n)]$ aplicando la propiedad de la multiplicación por n se obtiene

$$Z[n(n^{m-1} f(n))] = -zF'(z).$$

Calculamos ahora $F'(z)$:

$$F'(z) = -z^{m-1} d^m F(z) - d^{m-1} F(z)(m-1) z^{m-2} - Az^{m-2} d^{m-1} F(z) -$$
$$- d^{m-2} F(z) A(m-2) z^{m-3} - Bz^{m-3} d^{m-2} F(z) -$$
$$- d^{m-3} F(z) B(m-3) z^{m-4} - Cz^{m-4} d^{m-3} F(z) -$$
$$- d^{m-4} F(z) C(m-4) z^{m-5} - \ldots - zd^2 F(z) - dF(z),$$

expresión ésta que simplificada toma la forma

$$F'(z) = -z^{m-1} d^m F(z) - (A+(m-1)) z^{m-2} d^{m-1} F(z) -$$
$$- (A(m-2)+B) z^{m-3} d^{m-2} F(z) - (B(m-3)+C) z^{m-4} d^{m-3} F(z) -$$
$$- \ldots - dF(z),$$

y entonces

$$Z[n^m f(n)] = -zF'(z) = z^m d^m F(z) + (1.A+(m-1)) z^{m-1} d^{m-1} F(z) +$$
$$+ (A(m-2)+B) z^{m-2} d^{m-2} F(z) + (B(m-3)+C) z^{m-3} d^{m-3} F(z)$$
$$+ \ldots + zdF(z),$$

expresión que muestra el algoritmo para la determinación de los coeficientes correspondientes a cualquier valor m.

Así, por ejemplo, para m = 6 consideramos el triángulo con los coeficientes para m = 1, 2, 3, 4 y 5:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 7 & & 1 & \\
1 & & 10 & & 25 & & 15 & & 1
\end{array}$$

obteniendo así A=10, B=25, C=15 y entonces:

Primer coeficiente: 1 (recuérdese que siempre lo es)
Segundo coeficiente: 1.A + (m-1) = 10 + 5 = 15
Tercer coeficiente: A(m-2) + B = 10.4 + 25 = 65
Cuarto coeficiente: B(m-3) + C = 25.3 + 15 = 90
Quinto coeficiente: C(m-4) + D = 15.2 + 1 = 31
Sexto coeficiente: 1 (siempre lo es)

de manera que

$$Z[n^6 f(n)] = z^6 d^6 F(z) + 15z^5 d^5 F(z) + 65z^4 d^4 F(z) + 90z^3 d^3 F(z) +$$

$$+ 31z^2 d^2 F(z) + 1zdF(z)$$

Finalmente, debe siempre tenerse presente que cada línea tiene tantos coeficientes como sea el valor de m.

El lector puede comprobar la bondad del método en cuanto al ahorro de tiempo, resolviendo el anterior ejercicio aplicando la propiedad de multiplicación por n.

Bibliografía

KATSUHIKO Ogata. **Ingeniería de Control Moderna.** Prentice-Hall International.

HSU and MEYER. **Modern Control Principles.** McGraw Hill.

MARULANDA, José L. **Espectros Matemáticos.** Conferencias - UIS.

OSORIO, Rosalba. **Funciones Especiales.** Conferencias - UIS.