Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 7 No. 2, diciembre de 1989

Notas de clase:
A PROPOSITO DE FORMAS INDETERMINADAS

Sergio Gamboa *

Quienes lleven muchos años enseñando matemáticas en universidades, como es el caso del autor de la presente nota, posiblemente compartan con él la opinión de que los dos tomos del **CALCULUS** de Apostol constituyen "lo máximo" en la materia. Por ello sorprende más de lo normal el hecho de que la primera edición [1] del tomo I contenga una notable imperfección -que no errata-. Si bien es cierto que en la segunda (y última) edición [2] el error fue corregido, no deja de llamar la atención el que los traductores de la primera edición en castellano [1'] no hubieran advertido la inexactitud y la hubieran dejado tal como estaba.

Pues bien, en la página 405 de [1] (y en la 451 de [1']), dentro del parágrafo 8.15 "Otras formas Indeterminadas", en el ejemplo 6 aparece como forma indeterminada la expresión 0^∞. Es obvio que si se tiene la función compuesta

$$\Phi(x) = [f(x)]^{g(x)},$$

con $0 < f(x)$ tendiendo a cero y $g(x)$ a infinito cuando x tiende a algún número concreto a, podemos escribir

$$\Phi(x) = e^{g(x)\ln f(x)};$$

puesto que en cualquier caso se tiene

* Profesor Titular, Departamento de Matemática, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

$$\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x) = (+\infty)(-\infty) = -\infty,$$

tendremos SIEMPRE que $\Phi(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, sin ninguna clase de indeterminación.

Pero no se trata de que 0^{∞} aparezca por accidente en una lista de "indeterminaciones." No. En el citado ejemplo 6 se intenta justificar su presencia demostrando que

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\log x} = \infty.$$

Podría pensarse entonces que lo que se quería ilustrar era la forma indeterminada $0^{-\infty}$ y que el "menos" se lo comieron en la imprenta. Pero si tenemos

$$0 < f(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0 \qquad y \qquad g(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} -\infty$$

y puesto que

$$g(x)\ln f(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} (-\infty)(-\infty) = \infty,$$

entonces

$$\lim_{x\to 0+} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to 0+} e^{g(x)\ln f(x)} = \infty,$$

otra vez sin ninguna clase de indeterminación. Así pues que ni 0^{∞} ni $0^{-\infty}$ pueden ser consideradas como "formas indeterminadas". Como se anotó, en la segunda edición del texto el error fué enmendado (suprimiendo el ejemplo correspondiente).

BIBLIOGRAFIA

[1] APOSTOL Tom M. CALCULUS, Vol I (First Edition). Blaisdell Publishing Company, New York, 1961.

[1'] APOSTOL Tom M. CALCULUS, Vol I (Primera Edición). Editorial Reverté, Barcelona, 1965.

[2] APOSTOL Tom M. CALCULUS, Vol I (Second Edition). Xerox College Publishing, Lexington, 1967.