Revista INTEGRACION
Departamento de Matemáticas UIS
Vol. 6, No. 1, enero-junio 1988

Separaciones de Wallace: Otra aproximación a la topología*

RAFAEL ISAACS**

Hay muchas maneras de acercarse a conceptos topológicos, tales como el de función continua, conjunto abierto, conjunto cerrado, conexos, etc. Hoy en día, la forma clásica acepta como un concepto indefinido el de conjunto abierto, imponiendo ciertos axiomas sobre estos. Una manera dual a ésta, es partiendo del concepto de conjunto cerrado. Otra forma que se estudia en los cursos introductorios a la topología se basa en axiomas referentes a la función de adherencia, sistema que se conoce como la Axiomatización de Kuratowski. De manera dual, se puede partir también de la noción de interior. Otro enfoque, no exactamente igual al anterior, consiste en partir de un concepto igualmente importante, como es el de sucesión convergente. En Colombia se ha trabajado en el tema, y, por ejemplo, Carlos Ruiz y Manuel Suárez tienen resultados que relacionan criterios de convergencia con Topología en el sentido clásico.

Hay que observar que muchas veces es útil definir el espacio topológico que se requiere, diciendo qué sucesiones convergen. Es el caso de las distribuciones en análisis, en donde se exige que para que una sucesión de funciones converja se requiere que todas sus derivadas converjan. Las distribuciones son operadores que respetan esta convergencia.

Es así como, aproximándose por diferentes caminos, se puede esperar enriquecimientos en cuanto a aplicaciones de la topología en un sentido amplio.

---

* El presente artículo constituye parte del proyecto de investigación UIS No. 5050.

** Profesor Asociado, Departamento de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga, Colombia.

Precisamente, la conexión es un camino que nos puede llevar a los conceptos topológicos, de manera que se abarcan aplicaciones más amplias en donde la topología no logra ser satisfactoria. Explícitamente, en estructuras de tipo discreto como los grafos, los naturales, los grupos cíclicos, se encuentran fructíferas aplicaciones; es de esperar que así sea en ciertos campos del análisis.

Como este es un tratamiento poco conocido, el objeto de este trabajo es difundir el enfoque que presentó Wallace (1941), y que es retomado por Hammer (1963), en donde la noción indefinida que se axiomatiza es la de «separación», o sea la negación de la conexidad.

1. SEPARACIONES

Definición:

Una separación sobre el conjunto X es una relación «|» entre subconjuntos de X que cumple las siguientes propiedades (A, B, A' y B' son subconjuntos cualesquiera de X):

i) **Simetría:** $A|B$ implica $B|A$.

ii) **Herencia:** Si A y B son subconjuntos de A y B , respectivamente, y además $A'|B'$ entonces $A|B$.

Si C es un subconjunto de X, diremos que C es **conexo** si no es la unión de dos subconjuntos no vacíos y separados.

Una **separación de Wallace,** además de i) y ii), cumple:

iii) **Exclusividad:** Si $A|B$ entonces $A \cap B = \phi$.

Una separación de Wallace será una separación **completa** si cumple las propiedades:

iv) El vacío está separado de cualquier conjunto.

v) Si $A|B$ y $C|B$ entonces $A \cup C|B$ •

Ejemplos:

1) En la topología clásica se dice que dos conjuntos A y B están separados si se cumple a la vez

$$A \cap B = \phi, \quad \bar{A} \cap B = \phi \quad y \quad A \cap \bar{B} = \phi$$

(en donde $\bar{A}$ denota la clausura topológica de A).

Esta es una separación completa, como se puede demostrar fácilmente. Los conexos según esta separación corresponden a los conexos topológicos. Realmente la condición $A \cap B = \phi$ sobra, pero la anunciamos por ser útil para la siguiente generalización.

2) Consideremos un operador * definido sobre los subconjuntos de X, que sea aditivo (i.e. $(A \cup B)^* = A^* \cup B^*$) y que cumpla $\phi^* = \phi$.

Se tiene igualmente una separación completa, no necesariamente determinada por una topología. En efecto, definimos $A|B$ si se cumple conjuntamente:

$$A \cap B = \phi, \qquad A^* \cap B = \phi \qquad y \qquad A \cap B^* = \phi .$$

Supóngase, por ejemplo, un conjunto de funciones derivables, en donde al ser A un subconjunto de tales funciones, A^* es el conjunto de sus derivadas. ¿Corresponde esta separación a alguna topología sobre el conjunto de funciones derivables? •

3) En $\mathbb{R}^n$ decimos que $A|B$ si existe un hiperplano de dimensión n-1 de tal manera que A y B están situados cada uno en diferentes semi-espacios abiertos de los dos que determina el hiperplano. En otras palabras, toda recta que une un elemento de A con otro de B contiene algún punto del hiperplano.

Esta es una separación de Wallace que no es completa, en donde una esfera con un punto interior aislado conforma un conjunto conexo •

El siguiente resultado es válido para cualquier separación:

Proposición 1:

Si (A_i) es una familia de conexos, dos a dos, no disyuntos, entonces su unión $\cup A_i$ es un conexo.

Demostración: Considérese $B|C$, C y B no vacíos, tales que su unión es la unión $\cup A_i$. Escojamos A_i y A_j tales que $A_i \cap B \neq \phi$ y $A_j \cap C \neq \phi$.

Como $A_i \cap A_j \neq \phi$, existe un elemento X_o común a A_i y A_j, que debe estar en C ó en B. Supongamos que $X_o \in C$; entonces $A_i \cap C \neq \phi$, y se tiene que $A_i \cap B$ y $A_i \cap C$ constituyen una separación de A_i, lo que indica que A_i no es conexo, contrario a lo supuesto. De la misma forma si $X_o \in B$, entonces A_j no es conexo. Tenemos entonces que $\cup A_i$ no se puede separar, es decir es conexa ■

2. CONTINUIDAD

Sean X y Y espacios de separación; definamos una función continua entre ellos de la siguiente manera:

Definicion 2: Sea $f: X \to Y$. Diremos que f es continua si, y sólo si, para cualquier par de conjuntos A y B de X se tiene

$$f(A) \mid f(B) \text{ implica } A|B \bullet$$

Proposición 2: Sean X y Y espacios de separación, y $f: X \to Y$ una función continua; si A es un conexo en X, entonces $f(A)$ es conexo en Y.

Demostración: Supongamos que f es continua y $f(A)$ no es conexo. Existirán B y C, subconjuntos de Y, ninguno vacío, y tales que $B|C$, mientras $f(A) = B \cup C$.

Tomando $B' = A \cap f^{-1}(B)$ y $C' = A \cap f^{-1}(C)$, tenemos que

$$B = f(B') \text{ y } C = f(C').$$

Utilizando la definición de continuidad, tenemos que $B' \mid C'$. Como $A = B' \cup C'$, se deduce que A no es conexo ■

La recíproca de esta proposición no es cierta. Sin embargo, hay proposiciones que caracterizan los espacios de separación en donde sí se cumple.

Una contra-ejemplo es considerar la sucesión $\{1/n\}$ con el elemento O y la separación inducida por la topología usual, en la cual los únicos conjuntos conexos son los puntuales. Como espacio Y consideramos los naturales, en donde dos conjuntos A y B están separados si la distancia entre sus elementos es mayor que 1; aquí los conexos son intervalos, finitos o no.

Definamos f tal que al 0 le asocie el 0 y a $1/n$ le asocie $n (n \neq 0)$. Claramente, f envía conexos en conexos, pero no es continua: si tomamos $Z = \{1/n \mid n \geqslant 3\}$, y $W = \{0\}$, f(z) estará separadade f(w) sin que Z y W lo estén.

Proposición 3: Si τ es una topología de tipo T_1, y definimos a partir de ella el espacio de separación, las funciones continuas según τ son las mismas que se generan por la separación.

Demostración: Sea $f: X \to X$ una función τ-continua; debemos probar que si $f(A) \mid f(B)$, entonces $A|B$. Si $f(A)| f(B)$, como esta separación se deriva de τ, por definición tenemos que $\overline{f(A)} \,|\!\cap f(B) = \phi$, y además $f(A) \cap \overline{f(B)} = \phi$. Como f es continua, $f(A) \supset f(\overline{A})$, y por lo tanto se tiene:

$$f(\overline{A}) \cap f(B) = \phi \quad , \quad f(A) \cap f(\overline{A}) = \phi \; .$$

Por conjuntos se sigue:

$$\overline{A} \cap B = \phi \quad , \quad A \cap \overline{B} = \phi \, ,$$

lo cual significa que $A|B$.

Recíprocamente, ahora probaremos que si f es continua según la separación, entonces f es τ-continua.

Supongamos lo contrario, es decir, que f no es τ-continua: entonces existirá A tal que $f(\overline{A}) \not\subset f(A)$, o sea que existe $x \in f(\overline{A})$ que no está en $\overline{f(A)}$, ni en $f(A)$. Por tanto $\{x\}$ y $f(A)$ son disyuntos, así como $\{x\}$ y $f(A)$. Como τ es T_1, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, y por tanto $\overline{\{x\}} \cap f(A)$ es vacío. Tenemos que $\{x\}|f(A)$. Sea $y \in \overline{A}$ tal que $f(y) = x$, $(x \in f(\overline{A}))$; entonces, si $B = \{y\}$, tenemos $f(B) \mid f(A)$. Sin embargo $A \nmid B$, pues $\overline{A} \cap B \neq \phi$. Entonces f no es continua en el sentido de la separación ■

3. RECONSTRUCCION DE LA TOPOLOGIA

Dada una separación, nos proponemos asociarle en lo posible un espacio topológico. Para ello construiremos la función de Wallace (w) que jugará el papel de clausura.

Definición: Sea Y un conjunto en un espacio de separación; definimos:

$$wY = \bigcap_{X/Y} X^c \, .$$

Proposición: Cuando se tiene una separación **completa**, w cumple las siguientes propiedades:

i) $\omega Y \supset Y$ y $\omega \phi = \phi$.

ii) $\omega Y = \bigcap_{\{x\}|Y} \{x\}^c$

iii) $\omega(X \cup Y) = \omega X \cup \omega Y$.

iv) $X|Y \rightarrow \omega X \cap Y = \phi$ y $X \cap \omega Y = \phi$.

Demostración:

i) Sea $y \in Y$; si X es un subconjunto del espacio, por exclusividad $X|Y \rightarrow X \cap Y = \phi$, y por tanto $y \in X^c$, entonces, $y \in \bigcap_{X|Y} X^c$; tenemos pues que $Y \subset wY$.

Que $w\phi = \phi$ es inmediato.

ii) Es claro que $\bigcap_{\{x\}|Y}\{x\}^c \supset \bigcap_{X|Y} x^c$ ya que si $I \subset J$

se tiene $\bigcap_{i \in I} A_i \supset \bigcap_{J \in J} A_j$.

Sea $z \in \bigcap_{\{z\}|Y}$ y $X|Y$. Si $z \in X$, entonces $\{z\} \subset X$, y por herencia $\{z\}|Y$; por tanto, z no estaría en $\bigcap_{\{z\}|Y} \{x\}^c$, contrario a lo supuesto.

Concluimos que $z \notin X$ para todo $X|Y$, lo que quiere decir que $z \in w\,Y$.

iii) Veamos primero que

$$\bigcup_{Z|X \cup Y} Z = (\bigcup_{Z|X} Z) \cup (\bigcap_{Z|Y} Z). \qquad (1)$$

Como se sabe que

$$\bigcup_{i \in I \cap J} A_i \subset (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{j \in J} A_j),$$

la inclusión se tiene en un sentido. Supongamos que u es un elemento de la intersección de la derecha de (1); entonces existirán z_1 y z_2 tales que $u \in Z_1 \cap Z_2$ y $Z_1|X$, al igual que $Z_2|X$. Por ley hereditaria tenemos que $Z_1 \cap Z_2|X$ y $Z_1 \cap Z_2|y$, y como la separación es completa, esto implica que $Z_1 \cap Z_2|xuy$; por tanto, u pertenece a $\bigcup_{z|xuy} Z$. Esto completa la demostración de (1).

Para demostrar iii) tenemos que por definición

$$\omega(xuy) = \bigcap_{z|xuy} z^{c};$$

pero aplicando al término de la derecha las leyes de Morgan,

$$w(xuy) = (\bigcup_{Z|xuy} z)^{c},$$

que es lo mismo, según (1), que

$$w(xuy) = [(\bigcup_{Z|X} Z) \cap (UZ)]^{c},$$

que desarrollando nos prueba:

$$w(xuy) = w(x) \cup \omega(y) .$$

iv) Obvio ■

Teorema:

En una separación de Wallace son equivalentes las siguientes proposiciones:

i) $X|Y \longleftrightarrow [wX \cup Y = \phi$ y $X \cup wY = \phi$ y $X \cup Y = \phi]$.

ii) Si para cualesquiera $p \in X$ y $q \in Y$ se cumple $\{P\}|Y$, $\{q\}|X$, entonces $X|Y$.

Demostración: i) $\rightarrow$ ii):

Supongamos que para todo $p \in X$ y todo $q \in Y$, $\{p\}|Y$ y $\{q\}|X$.

Sabemos, por la proposición precedente, que

$$wX = [\bigcup_{\{q\}|X} \{q\}]^{c},$$

y que si $q_{o} \in Y$ entonces $\{q_{o}\}|X$; es decir $q_{o} \in \bigcup_{\{q\}|X} \{q\}$, o sea $q_{o} \in \omega X$. Quiere decir esto, que $Y \cap wX = \phi$.

Simultáneamente se prueba que $w\,Y \cap X = \phi$, lo que conjuntamente con $X \cap Y = \phi$ nos garantiza por i) que $x|y$.

ii) $\rightarrow$ i) :

Nos interesa probar que $wX \cap Y = \phi$, $X \cap wY = \phi$ y $X \cap Y = \phi$ implica que $X | Y$ (en sentido contrario ya se tiene). Todo esto, suponiendo que ii) se cumple. Supongamos entonces que $y \in Y$.

Como $Y \cap wX = \phi$, se deduce que $y \notin wX$.

Por definición, $y \in \bigcup_{Z | Y} z$,

y por herencia $\{y\} | X$ para todo $y \in Y$. Así mismo vemos que $\{x\} | Y$ para todo $x \in X$, y por ii) tenemos que $X | Y$ ■

Definición: Una separación completa es topológica si, además de cumplir la condición del teorema precedente, cumple que:

$$\{x\} | Y \rightarrow \{x\} | wY .$$

Teorema: En una separación topológica, la función de Wallace w cumple los axiomas de Kuratowski.

Demo stración: Ya que vimos que

$$w\,\phi = \phi ,$$
$$w\,X \supset X ,$$
$$w(XUY) = w(X)U\,w(Y)$$

Falta ver que $w\,w(X) = w(x)$.

Ya se tiene que $w(x) \subset ww(x)$: la otra contenencia, que $ww(x) \subset w(X)$ se tiene, puesto que

$$\bigcap_{y | wX} \{y\}^c \quad \bigcap_{y | X} \{y\}^c \qquad ■$$

BIBLIOGRAFIA

1. HAMMER P. «Las Matemáticas y la Teoría de Sistemas», en *Tendencias en la Teoría General de Sistemas,* recopilación de J. Klir, 1978.

2. HAMMER P. «Extended Topology: The Wallace Function of a Separation», en *New Archief voor Wiscunde* (3), IX, 74-86, 1981.

3. HAMMER P. «Extender Topology: Connected sets and Wallace Separations» *En Portugallae Mathematica*, Vol. 22, Fasc. 4, 1963.

4. «WALLACE Separations Spaces», en *Annal of Mathematics*, Vol. 42, No. 3, July, 1941