

El Algebra Moderna en la Electrónica*

ARTURO MARTINEZ CAICEDO**

La historia de esta aplicación de la Matemática a la ciencia moderna bien puede decirse que se inicia en la noche del 29 de mayo de 1832, hace hoy algo más de 156 años, cuando un joven que aún no cumplía los 21 años, y que al día siguiente debía enfrentar un duelo a muerte en condiciones no muy favorables para él, con afán, pero con mano firme que no dejaba traslucir el presentimiento de muerte que lo embargaba, después de haber llenado un gran número de páginas con teoremas y demostraciones terminaba una carta dirigida a un gran amigo con las siguientes frases:

«Harás el favor de pedir a Jacobi o a Gauss que digan su opinión, no sobre la verdad sino sobre la importancia de estos teoremas (...). Luego habrá, según espero, gente que considerará provechoso descifrar este llo».

Ese «llo» ha llegado a convertirse en lo que hoy conocemos como Teoría de Galois, y quien aquella carta escribía era, precisamente, su autor: Evaristo Galois, con frecuencia llamado «El elegido de los dioses».

Años después de aquella muerte prematura, cuando hacia 1846 los grandes matemáticos de la época al fin lograron comprender la teoría propuesta en la carta y se decidieron a publicarla, lo que hasta entonces era la «teoría abstracta» de los grupos encontró su primera aplicación «práctica»: la demostración de la imposibilidad de resolver por radicales toda ecuación de grado mayor o igual a cinco, problema que ya por esa época completaba algo más de dos siglos de ser estudiado con detenimiento.

* Conferencia dictada durante el VI Coloquio Regional de Matemática, Cúcuta, noviembre de 1987.

** Profesor Titular. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga.

Muchos años más tarde, utilizando conceptos tomados de la ya más desarrollada Teoría de Grupos, el científico ruso Evgraf S. Fiódorov (1853-1919), en su obra «Simetría de los sistemas regulares de figuras» (1890), demostró que existen exactamente 230 formas posibles de organización de las mallas de los cristales, hecho que fue posteriormente confirmado por completo por medio de análisis con rayos X. Esta aplicación, considerada como la primera oportunidad en que una ciencia abstracta se incorporó a las Ciencias Naturales, causó gran impacto en el ámbito matemático e impulsó notablemente el estudio y desarrollo tanto de la Teoría de Grupos como de una ciencia llamada Cristalografía, tan antigua que ya en 1568 se conocían algunos importantes resultados de ella, y dentro de la cual hemos de ubicarnos en todo lo que sigue de esta conferencia.

Concebida inicialmente como ciencia destinada al estudio del cristal de roca, algo que se consideraba como hielo enfriado de tal manera que no era posible fundirlo de nuevo, con el transcurso de los años se amplió al estudio de los cristales, nombre dado a cada poliedro regular en que se individualiza la materia sólida, es decir, a las figuras geométricas limitadas por caras planas en que se descompone la materia cuando sobre ella se hacen actuar condiciones que modifican las fuerzas atractivas entre las moléculas, como en el caso de someterla a enfriamiento por debajo de su punto de congelación. En estas condiciones la energía cinética de las moléculas ya no es suficiente para dominar las fuerzas de atracción entre ellas, y terminan asociándose en agregados ordenados, adoptando orientaciones y posiciones fijas. A medida que se une a la partícula sólida en crecimiento, cada molécula es orientada en tal forma que se minimizan las fuerzas que actúan sobre ella, de manera que al ocurrir lo mismo sobre cada molécula llega a obtenerse una partícula sólida conformada por un conjunto de moléculas ordenadas en las tres dimensiones. Estrictamente hablando, tal partícula es la que recibe el nombre de cristal, de manera que ahora puede decirse que se trata de un conjunto (finito o infinito) de átomos, un número finito de los cuales conforma cada molécula, dispuestos en un modelo que se repite periódicamente en las tres dimensiones.

Así ocurre, por ejemplo, en el muy conocido caso del benceno (Figura 1), cuyo modelo está conformado por seis átomos de carbono ubicados en los vértices de un exágono regular, con un átomo de hidrógeno unido a cada átomo de carbono. Un caso más sencillo lo constituye el agua (Figura 2), y uno más complejo puede verse en el modelo de la sal de mesa (cloruro de sodio), cuyo cristal contiene muchos iones positivos y negativos que se mantienen juntos por atracción electrostática, rodeado cada uno por iones de carga opuesta (Figura 3) situados en los vértices de un cubo, repitiéndose este modelo una y otra vez a intervalos regularmente espaciados y con la misma orientación, por todo el cristal.

BENCENO

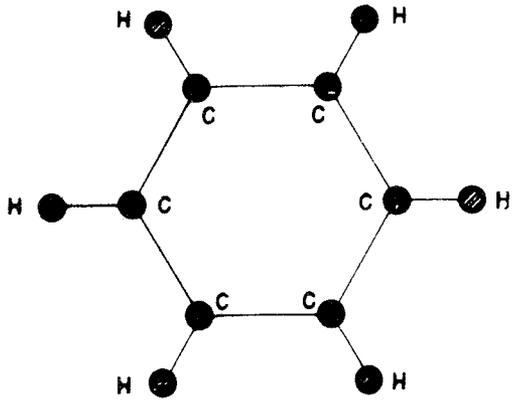


FIG. 1

AGUA

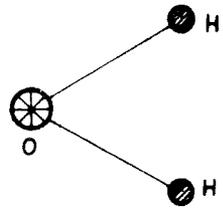


FIG. 2

CLORURO DE SODIO

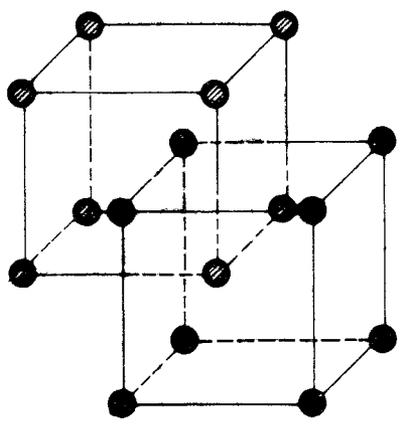


FIG. 3

La Cristalografía es, entonces, la parte de la Física y la Química que estudia los cristales, tanto en su forma externa como en su estructura interna, a partir de lo cual se establecen sus diferentes propiedades específicas relacionadas con dos aspectos: la anisotropía o forma en que varían las propiedades físicas según la dirección en que se considere el cristal, como es el caso del cristal de cuarzo, dentro del cual la velocidad de propagación de la luz varía según la dirección que sigan los rayos.

El otro aspecto lo constituye la propiedad de simetría, consistente en que después de efectuarse el movimiento llamado «operación de simetría» sobre el cristal, éste ocupa una posición indistinguible de la que ocupaba inicialmente. Más exactamente, la inspección del cristal y sus alrededores no revelará si el movimiento se ha efectuado o no.

Las operaciones de simetría que aquí se consideran son las conocidas como reflexión sobre un plano, rotación alrededor de un eje e inversión en un punto; así como sus combinaciones:

rotación + reflexión = rotación + inversión;

reflexión + inversión = rotación;

rotación + reflexión + inversión = rotación + rotación.

El elemento geométrico (plano, recta, punto) que va asociado con cada una de estas operaciones recibe el nombre de elemento de simetría. Así, por ejemplo, en el cristal de benceno la recta perpendicular al plano del hexágono y que pasa por su centro es elemento de simetría para rotaciones de 60°, 120°, 180°, 240°, 300° y 360°, mientras que en el caso del agua lo es el plano perpendicular al plano determinado por los tres átomos y que pase por la bisectriz del ángulo H-O-H.

En el caso del cloroformo (Figura 4) los tres átomos de Cl son coplanares y determinan un triángulo equilátero, con el C ubicado exactamente encima del centro de éste triángulo y el H exactamente encima del C, de manera que la recta que contiene al H y al C es eje de simetría para rotaciones de 120°, 240° y 360° (Figura 5), mientras que cada uno de los planos determinados por los átomos de H y C con cada uno de los Cl son planos de simetría (Figura 6).

Todas las operaciones de simetría que se han presentado tienen la propiedad común de dejar fijo al menos un punto del cristal: en la rotación, todos los que están sobre el eje; en la reflexión, todos los que están sobre el plano; y en la inversión, el centro de simetría. Además de esto, ningún punto nuevo

CLOROFORMO
CHCL₃

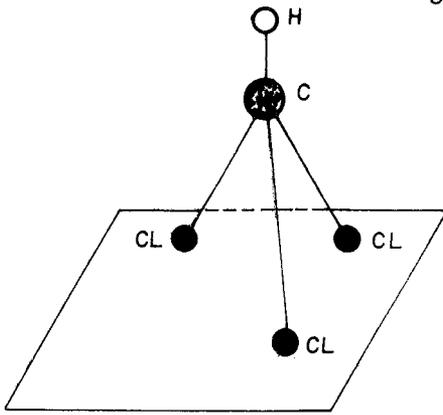


FIG. 4

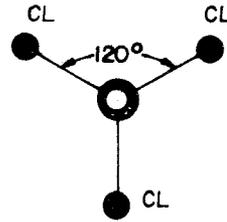


FIG. 5

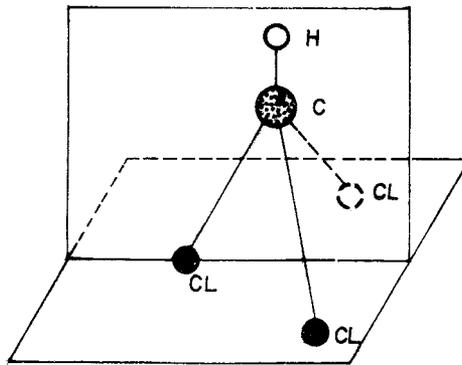


FIG. 6

se genera por acción del movimiento, aunque esto no significa que no existan operaciones de simetría que no dejen fijo punto alguno. Lo que ocurre en las moléculas es que si una de ellas tuviera un elemento de simetría que no dejara fijo ninguno de sus puntos, la operación correspondiente debería producir otra molécula que también contendría un elemento de simetría análogo, pues de no ser así las dos moléculas serían distinguibles, hecho que contradice la definición de simetría. La repetición sucesiva de la operación sobre los nuevos puntos así obtenidos terminaría generando un conjunto infinito de puntos, proceso que no es posible, ya que se ha considerado la molécula como conjunto finito de átomos.

El conjunto de operaciones de simetría que cada molécula admite conforma su Grupo Cristalográfico, entendiéndose aquí que tales operaciones de simetría cumplen las propiedades de clausura, asociatividad, elemento identidad e inversos, necesarias para dotar a tal conjunto de la estructura algebraica de grupo.

Un análisis de los posibles elementos de simetría que pueden presentarse en los cristales, así como de las restricciones a las que puedan estar sometidos, condujo a la clasificación de estos en siete Sistemas Cristalográficos, subdivididos en 32 grupos puntuales finitos y 230 infinitos.

Después de este recorrido teórico en busca del concepto de grupo cristalográfico, puede adelantarse lo correspondiente a su representación matricial partiendo el hecho de poder ubicar el cristal en un sistema coordenado X_1, X_2, X_3 , no necesariamente rectangular, colocando ahora el punto que queda fijo bajo todas las operaciones de su grupo cristalográfico en el origen de tal sistema coordenado, y procediendo a definir analíticamente cada operación de simetría en términos de las nuevas posiciones X'_1, X'_2, X'_3 que ocupen los ejes coordenados luego de sufrir el efecto de la operación. Si tal cosa se hace en términos de los cosenos directores de las nuevas posiciones de los ejes con respecto a las originales, para cada operación de simetría se obtiene una matriz cuadrada de orden tres por tres, (c_{ij}) , en la cual

$$c_{ij} = \cos \angle X'_i O X_j,$$

considerando el ángulo positivo si, observado desde el extremo positivo del eje en la dirección del centro de coordenadas, el giro a partir del eje original hacia el nuevo se realiza en sentido contrario al de las agujas del reloj. El conjunto de matrices así obtenido conforma un grupo multiplicativo, llamado Representación Matricial del Grupo Cristalográfico.

Por ejemplo, para el cristal de cuarzo una reducción de la temperatura ocasiona movimientos de simetría cuya representación matricial se determina

de la siguiente manera: según la clasificación dada al cristal de cuarzo (sistema cristalográfico Trigonal), sus elementos de simetría son tres ejes para rotaciones de 180° situados en un mismo plano y un eje para rotaciones de 120° perpendicular a dicho plano (los tres primeros son llamados bi-ejes y el último tri-eje), con un sistema coordenado rectangular en este caso y orientado según se indica en la Figura 7, en la cual el tri-eje X_3 se ha tomado perpendicular al plano de la figura.

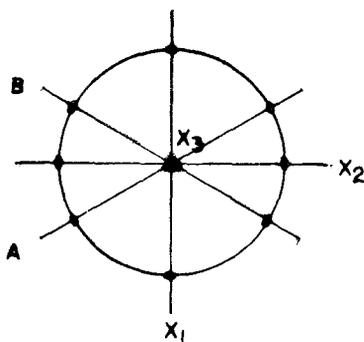


FIG. 7

Las matrices correspondientes a las rotaciones de 120° , 240° y 360° alrededor del Tri-eje X_3 , así como las de las rotaciones de 180° alrededor de los bi-ejes X_1 , A y B son, respectivamente:

$$C(120^\circ, X_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$C(240^\circ, X_3) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$C(360^\circ, X_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$C(180^\circ, X_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ;$$

$$C(180^\circ, A) = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ;$$

$$C(180^\circ, B) = \begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ;$$

De esta forma queda establecido que, para la reducción de la temperatura, el grupo cristalográfico del cuarzo tiene orden 6 y es generado por una rotación de orden 3 (alrededor de X_3) y una de orden 2 (alrededor de X_1 de A o de B), como puede ser fácilmente comprobado, reconociéndose así su isomorfismo con el grupo diédrico del triángulo, D_3 .

Para entrar ya en el campo de las aplicaciones prácticas y poder ver cómo es que el Algebra Moderna está presente en la Electrónica, sólo hace falta introducir un par de definiciones provenientes del campo de la Física, afortunadamente no muy complicadas.

En primer término, un dieléctrico es un elemento aislante, capaz de mantener un campo eléctrico en equilibrio, sin que pase corriente eléctrica por él; a sus moléculas se las llama polares si en presencia de un campo eléctrico orientan sus dipolos en la dirección del campo. En caso contrario se las llama no-polares, y en ellas los dipolos sólo se orientan cuando el campo actúa. Ahora bien, habiéndose establecido que en un cristal cualquiera el vector de polarización eléctrica sólo puede situarse a lo largo de alguno de los ejes de simetría, pudo deducirse que sólo los dieléctricos cuyos cristales corresponden a 10 de los 32 grupos cristalográficos presentan el llamado efecto piroeléctrico, es decir, presentan polarización eléctrica al ser sometidos a variaciones de temperatura, efecto que se detectó por primera vez en la turmalina y posteriormente en el cuarzo (corazón de los relojes de moda), entre otros. Con base en tales resultados pueden ahora resolverse problemas de un increíble alcance práctico, tales como los siguientes:

- ¿Qué clase de simetría debe tener un cristal piroeléctrico para que su vector de polarización eléctrica pueda cambiar tanto de magnitud como de dirección al ser sometido a variaciones de temperatura?

- ¿Qué cambio de temperatura se puede medir utilizando un receptor piroeléctrico que consta de una lámina de turmalina y un milivoltímetro cuya sensibilidad es de 10^{-3} V/graduación?
- Determinar la magnitud de la doble refracción (birrefringencia) de una lámina de cuarzo, cuya normal está orientada formando un cierto ángulo con respecto al eje X_3 . ¿De qué manera hay que cortarla para que tal magnitud sea máxima?
- ¿Qué tensión se genera entre las armaduras de un condensador representado en sí por una lámina de turmalina de dimensiones conocidas, enfriándola de 50° hasta la temperatura ambiente?

Una segunda aplicación, en mucho análoga a la anterior, se encuentra en el llamado efecto piezoeléctrico, el cual comprende una serie de fenómenos mediante los cuales las tensiones mecánicas originan en los cristales una polarización eléctrica. Como puede verse, en este caso la tensión mecánica juega el papel de la variación de temperatura en el efecto piroeléctrico, y se ha comprobado que el efecto piezoeléctrico sólo se presenta si las tensiones se aplican orientadas en determinada forma con respecto a los ejes de simetría. Concretamente, en el cuarzo se hace necesario que la lámina sea cortada de tal modo que sus caras activas sean perpendiculares a uno de los ejes para las rotaciones de 180° .

Finalmente, pueden citarse aplicaciones en el campo de los semiconductores que, como bien se sabe, son los componentes de los transistores, mediante los cuales se han logrado los avances más notables de la Electrónica, entre los cuales a no dudar deben mencionarse el radio de transistores y las maravillosas minicalculadoras, hoy prácticamente al alcance de todo el mundo. Y ni qué decir al respecto al hablar de computadores, en los cuales también -aunque en forma invisible e ignorada por el común de las gentes- los grupos cristalográficos han permitido al hombre alcanzar los umbrales de lo ayer apenas soñado en cuanto a capacidad de cálculo, exactitud y rapidez, todo a nombre de aquel lío planteado en una noche de 1932, que hoy se conoce como Álgebra Moderna y es parte fundamental de lo que muchos llaman casi despectivamente «Matemática Moderna» y que, en general, es criticada por «abstracta e inútil».